MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA

KREYSZIG



3ª / ed

LIMUSA WILEY

MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA

VOL. I

MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA

VOL. I

Tercera edición

ERWIN KREYSZIG
Profesor de Matemáticas
Ohio State University
Columbus, Ohio

Kreyszig, Erwin
Matemáticas avanzadas para ingeniería I = Advanced engineering mathematics / Erwin Kreyszig ; Rodolfo García Piña, tr ; Hugo Villagómez Velázquez, tr. -- 3a ed.
México : Limusa Wiley, 2003.
721p. il. ; 17 cm.
ISBN: 968-18-5310-5

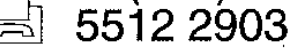
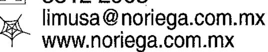
I. Análisis matemático II. Matemáticas para ingenieros

LC: QA401 Dewey: 515 dc21

VERSIÓN AUTORIZADA EN ESPAÑOL DE LA OBRA PUBLICADA EN INGLÉS CON EL TÍTULO:
ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS
© JOHN WILEY & SONS, INC., NEW YORK, CHICHESTER, BRISBANE, SINGAPORE, TORONTO AND WEINHEIM.

COLABORADORES EN LA TRADUCCIÓN:
RODOLFO PIÑA GARCÍA
HUGO VILLAGÓMEZ VELÁZQUEZ

REVISIÓN:
ALMA ROSA GRISELDA ZETINA VÉLEZ
INGENIERA QUÍMICA POR LA FACULTAD DE QUÍMICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO. DOCENTE EN MATEMÁTICAS. JEFA DEL DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA, UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN DE POSGRADO, DGAE, DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO. PROFESORA EN LA ESCUELA DE CIENCIAS QUÍMICAS DE LA UNIVERSIDAD LA SALLE.

GRUPO NORIEGA EDITORES
BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.
C.P. 06040
8503 8050
01(800) 706 9100

5512 2903

limusa@noriega.com.mx
www.noriega.com.mx

CANIEM NÚM. 121

Prefacio

Propósito del libro. Este libro presenta a los estudiantes de ingeniería, física, matemáticas y ciencias de la computación las áreas de las matemáticas que, desde una perspectiva moderna, poseen mayor importancia en relación con problemas prácticos.

El contenido y carácter de las matemáticas necesarias en aplicaciones prácticas cambian con rapidez. Cada vez son más importantes el álgebra lineal —en particular las matrices— y los métodos numéricos para computadoras. La estadística y la teoría de las gráficas desempeñan papeles más sobresalientes. El análisis real (las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales) y el análisis complejo siguen siendo indispensables. El material del presente texto, dividido en dos volúmenes, está organizado consecuentemente en siete partes independientes (ver también el diagrama de la página siguiente):

A Ecuaciones diferenciales ordinarias (capítulos 1-6)

B Álgebra lineal, cálculo vectorial (capítulos 7-9)

C Análisis de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales (capítulos 10, 11)

D Análisis complejo (capítulos 12-17)

E Métodos numéricos (capítulos 18-20)

F Optimización, gráficas (capítulos 21, 22)

G Probabilidad y estadística (capítulos 23, 24)

A lo que sigue:

Bibliografía (apéndice 1)

Respuestas a los problemas de número impar (apéndice 2)

Material complementario (apéndice 3)

Demostraciones adicionales (apéndice 4)

Tablas de funciones (apéndice 5)

Este libro ha contribuido a allanar el camino para el progreso actual y capacitará a los estudiantes para la situación actual y el futuro mediante un tratamiento moderno de las áreas mencionadas y de las ideas —algunas de ellas relacionadas con la computación— que dan lugar en la actualidad a cambios fundamentales; muchos métodos son ya obsoletos. Se hace hincapié en las ideas nuevas, por ejemplo, la estabilidad, la estimación de errores y problemas estructurales de algoritmos, por citar sólo algunas. Las tendencias se alimentan por la oferta y la demanda: oferta de nuevos y eficaces métodos matemáticos y numéricos aunados a los enormes recursos de las computadoras; la demanda de resolver problemas de complejidad y alcance crecientes, los cuales se originan de sistemas o procesos de producción cada vez más elaborados, de condiciones

PARTE A

Capítulos 1–6

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Capítulos 1–4
Material básico

Capítulo 5
Soluciones en series de potencias. Funciones especiales

Capítulo 6
Transformada de Laplace

PARTE B

Capítulos 7–9

Álgebra lineal. Cálculo vectorial

Capítulo 7
Vectores y matrices

Capítulo 8
Cálculo diferencial vectorial

Capítulo 9
Cálculo integral vectorial

PARTE C

Capítulos 10, 11

Análisis de Fourier. Ecuaciones diferenciales parciales

Capítulo 10
Análisis de Fourier

Capítulo 11
Ecuaciones diferenciales parciales

PARTE D

Capítulos 12–17

Análisis complejo

Capítulo 12–15
Material básico

Capítulo 16
Mapeo conforme

Capítulo 17
Teoría del potencial

PARTE E

Capítulos 18–20

Métodos numéricos

Capítulo 18
Métodos numéricos generales

Capítulo 19
Métodos para álgebra lineal

Capítulo 20
Métodos para ecuaciones diferenciales

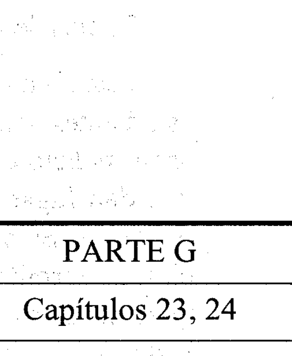
PARTE F

Capítulos 21, 22

Optimización. Gráficas

Capítulo 21
Programa lineal

Capítulo 22
Gráficas. Optimización combinatoria



básicos, así como una percepción clara de cuál es el campo de acción de las matemáticas para ingeniería en las tres fases de la solución de problemas:

Modelado: Traducir la información y los datos físicos o de otras áreas a una forma matemática, a un *modelo* matemático (una ecuación diferencial, un sistema de ecuaciones o alguna otra expresión matemática).

Solución: Obtener la solución seleccionando y aplicando los métodos matemáticos apropiados y, en la mayoría de los casos, realizando los cálculos numéricos en una computadora. Esta es la tarea principal de este libro.

Interpretación: Entender el significado e implicaciones de la solución matemática del problema original en términos de física —o del campo en donde se origine el problema.

No tendría sentido sobrecargar a los estudiantes con todo tipo de detalles que sólo se usarán de vez en cuando. Más bien, es importante que los estudiantes se familiaricen con las formas de pensar matemáticamente, que entiendan la necesidad de aplicar métodos matemáticos a problemas de ingeniería, que se den cuenta de que las matemáticas son una ciencia sistemática construida a partir de un número relativamente reducido de conceptos básicos que incluye eficaces principios unificadores y lleguen a una comprensión firme de la interrelación entre la teoría, los cálculos y la experimentación.

Los acelerados avances mencionados arriba han redundado en la incorporación de diversos cambios y nuevas características en la presente edición de este libro.

En particular, se han redactado de nuevo varias secciones de una manera más detallada y pausada, para hacer más sencillo el libro.

Lo anterior también ha llevado a un mejor equilibrio entre aplicaciones, ideas algorítmicas, ejemplos resueltos y teoría.

Los principales cambios en esta edición

1 **NUEVOS EJERCICIOS DE LAS SECCIONES.** Ahora guardan una relación más estrecha con los ejemplos resueltos en el texto.

2 **REORGANIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.** Las ecuaciones de orden n se ampliaron en un capítulo aparte. Los sistemas se ampliaron y actualizaron de manera sustancial.

3 **REORGANIZACIÓN COMPLETA DEL ÁLGEBRA LINEAL:**

Vectores y matrices (capítulo 7)

Álgebra vectorial y cálculo diferencial en R^3 (capítulo 8)

Cálculo integral vectorial en R^3 (capítulo 9)

Cambios adicionales y nuevas características de los capítulos

- ***De segundo orden*** (capítulo 2). Mayor fluidez del material al reordenarlo —toda la teoría se encuentra ahora en secciones consecutivas (secciones 2.7, 2.8), seguida por los dos métodos principales para encontrar soluciones particulares (secciones 2.9, 2.10) y por las aplicaciones básicas de oscilaciones forzadas (secciones 2.11, 2.12).
- ***De orden n*** (capítulo 3). Separación del material de las ecuaciones de segundo orden y colocación en un capítulo aparte, con una ampliación del material; la presentación sigue en la medida de lo posible el esquema del capítulo 2.
- ***Sistemas*** (capítulo 4). Redacción por completo nueva y ampliación del tema, con el uso sistemático de matrices 2×2 (las cuales se repasan en la sección 4.0).
- ***Método de Frobenius*** (capítulo 5). Ejemplos más sencillos; ampliación de la discusión de las funciones de Bessel (sección 5.6). Ampliación de la discusión del desarrollo de eigenfunciones (sección 5.9).
- ***Transformada de Laplace*** (capítulo 6). Inclusión de la función de transferencia (sección 6.2); inclusión de la ecuación de Laguerre (sección 6.5); ampliación de la discusión de las entradas discontinuas y las técnicas de convolución (sección 6.6); mejor tratamiento de las fracciones parciales (sección 6.7).

Álgebra lineal, cálculo vectorial (capítulos 7-9)

- ***Vectores y matrices en R^n***, se encuentran ahora antes (capítulo 7), seguidos de
- ***Álgebra vectorial, geometría y cálculo diferencial en R^3*** (capítulo 8). Seguidos de
- ***Cálculo integral vectorial*** (capítulo 9; la independencia de la trayectoria aparece ahora al principio en la sección 9.2).

Esta nueva disposición del material ofrece una mejor fluidez.

Análisis de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales (capítulos 10,11)

- ***Series e integrales de Fourier*** (capítulo 10). Nueva sección sobre series complejas de Fourier (sección 10.6); nueva discusión del espectro de la amplitud de la integral de Fourier y su significado físico (secciones 10.9, 10.11).
- ***Ecuaciones diferenciales parciales*** (capítulo 11). Se amplía el tema 2 de la solución de d'Alembert (sección 11.4); más problemas con valores en la frontera (sección 11.5, etc.); material tomado de los ejercicios y desarrollado en el texto, a fin de ofrecer más ayuda al estudiante.

Análisis complejo (capítulos 12-17)

- *Mapeos* (capítulos 16, 17). Análisis simplificado de algunos de los problemas más complicados.

Métodos numéricos (capítulos 18-20)

- ***Aspectos y algoritmos relacionados con las computadoras***, se hace aún más hincapié en ellos.
- ***Actualización*** y análisis simplificado en los tres capítulos; más detalles sobre la estabilidad (sección 18.1, etc.); un mejor análisis de los errores de interpolación (sección 18.3); más sobre interpolación segmentaria (splines) (sección 18.4) y mejoramiento de la convergencia por desplazamiento (sección 19.8).

Apéndices

- **Apéndice 1** (bibliografía), actualizado.
- **Apéndice 4**, reúne las demostraciones opcionales que se encontraban dispersas.

Sugerencias para cursos: cuatro semestres consecutivos

El material puede tomarse en cualquier orden y es adecuado para cuatro cursos consecutivos de un semestre, con 3 a 5 horas por semana:

Primer semestre.	Ecuaciones diferenciales ordinarias (capítulos 1-6)
Segundo semestre.	Álgebra lineal y análisis vectorial (capítulos 7-9)
Tercer semestre.	Análisis complejo (capítulos 12-17)
Cuarto semestre.	Métodos numéricos (capítulos 18-20)

En cuanto a los capítulos restantes, ver abajo. Obviamente se puede intercambiar el material; por ejemplo, los métodos numéricos podrían preceder al análisis complejo, etc.

Sugerencias para cursos: cursos independientes de un semestre

Esta obra también se presta para varios cursos independientes de un semestre con 3 horas a la semana; por ejemplo,

Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias (capítulos 1-3)

Transformada de Laplace (capítulo 6)

Álgebra y cálculo vectoriales (capítulos 8, 9)

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales (capítulo 7)

Series de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales (capítulos 10, 11, secciones 20.4 - 20.7)

Gráficas y optimización combinatoria (capítulo 22)

Probabilidad y estadística (capítulos 23, 24)

Características generales de esta edición

La selección, ordenación y presentación del material se han hecho con el mayor cuidado, con base en mi experiencia pasada y actual como docente, investigador y asesor. Algunas de las características sobresalientes de la obra son:

El libro es independiente, excepto por algunos puntos marcados con toda claridad porque una demostración rebasaría el nivel de un libro como éste y en su lugar se ofrece una referencia bibliográfica.

Ocultar las dificultades o hacer una simplificación excesiva no sería de ayuda para los estudiantes.

La presentación es detallada, con el fin de evitar incomodar al lector con referencias frecuentes para que consulte los detalles en otros libros.

Los ejemplos son sencillos, a fin de conseguir que el libro se presente para la enseñanza —¿por qué escoger ejemplos complicados cuando los sencillos son tan ilustrativos, o incluso mejores?

La notación es moderna y convencional, para ayudar a que los estudiantes lean artículos en revistas o en otros libros modernos y entiendan otros cursos con orientación matemática.

Los capítulos son en gran medida independientes, lo que permite gran flexibilidad en la enseñanza de cursos especiales (ver arriba).

Agradecimientos

Me encuentro en deuda con muchos de mis antiguos profesores, colegas y estudiantes que directa o indirectamente me han ayudado en la elaboración de este libro, en particular, de la presente edición del mismo. Varias partes del manuscrito se distribuyeron en mis clases en forma mimeografiada y volvieron a mí con recomendaciones para mejorarlas. Las discusiones con ingenieros y matemáticos (así como los comentarios escritos) me fueron de gran ayuda; quisiera mencionar en especial a los profesores S.L. Campbell, J.T. Cargo, P.L. Chambré, V.F. Connolly, A. Cronheim, J. Delany, J.W. Dettman, D. Dicker, D. Ellis, W. Fox, R.G. Helsel, V.W. Howe, W.N. Huff, J. Keener, E.C. Klipple, V. Komkow, H. Kuhn, G. Lamb, H.B. Mann, I. Marx, K. Millet, J.D. Moore, W.D. Munroe, J.N. Ong, Jr., P.J. Pritchard, H.-W.Pu, W.O. Ray, P.V. Reichelderfer, J.T. Scheick, H.A. Smit, J.P. Spencer, J. Todd, H. Unz, A.L. Villone, H.J. Weiss, A. Wilansky, C.H. Wilcox, L. Zia, A.D. Ziebur, todos ellos estadounidenses; a los profesores H.S.M. Coxeter y R. Vaillancourt y al señor H. Kreyszig (cuyo dominio de las computadoras fue de gran ayuda en los capítulos18-20) de Canadá, y a los profesores H. Florian, M. Kracht, H. Unger, H. Wielandt, todos ellos de Europa. Aquí sólo me es posible ofrecer un reconocimiento insuficiente de mi aprecio.

Contenido

Volumen 1

CAPÍTULO 3

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior **157**

CAPÍTULO 4

Sistemas de ecuaciones diferenciales. Plano fase, estabilidad **183**

CAPÍTULO 5

Soluciones en series de potencias de las ecuaciones diferenciales. Funciones especiales **231**

CAPÍTULO 6

Transformada de Laplace 299

PARTE B. ÁLGEBRA LINEAL, CÁLCULO VECTORIAL 367

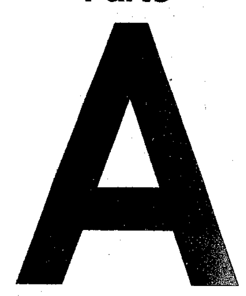
CAPÍTULO 7

Álgebra lineal: matrices, vectores, determinantes 369

Volumen 2

PARTE C. ANÁLISIS DE FOURIER Y ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES 21

Parte



ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Las ecuaciones diferenciales poseen una importancia fundamental en las matemáticas para ingeniería porque muchas leyes y relaciones físicas se expresan matemáticamente utilizando este tipo de ecuaciones. En esta parte, que consta de seis capítulos, se considerarán diversos problemas físicos y geométricos que llevan a ecuaciones diferenciales y se explicarán los métodos estándares más importantes para resolverlas.

Se prestará especial atención a la obtención de ecuaciones diferenciales a partir de situaciones físicas dadas. Esta transición del problema físico al "modelo matemático" correspondiente se conoce como **modelado**. El procedimiento es de gran importancia práctica para ingenieros y físicos y se ilustrará usando ejemplos típicos.

Las ecuaciones diferenciales se prestan particularmente para las computadoras

Capítulo

1

Ecuaciones diferenciales de primer orden

En este capítulo se inicia el programa de estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y sus aplicaciones considerando los casos más simples de estas ecuaciones. Se trata de las llamadas ecuaciones diferenciales de *primer* orden, pues en ellas interviene tan sólo la derivada de *primer* orden de la función desconocida. En este capítulo, así como en los siguientes, uno de los objetivos principales es capacitar al estudiante en los métodos para resolver ecuaciones diferenciales, centrándose la atención en las que son de importancia práctica.

Prerrequisitos para este capítulo: Cálculo integral.
Secciones que pueden omitirse en un curso más corto: 1.8–1.11.
Bibliografía: Apéndice 1, parte A.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

1.1 CONCEPTOS E IDEAS BÁSICAS

Una **ecuación diferencial ordinaria** es aquella que contiene una o varias derivadas de una función desconocida, la cual se denomina $y(x)$, y que quiere determinarse a partir de la ecuación; la ecuación también puede incluir a la propia función y así como funciones y constantes dadas. Por ejemplo,

(1) $$y' = \cos x,$$

(2) $$y'' + 4y = 0,$$

(3) $$x^2 y''' y' + 2e^x y'' = (x^2 + 2)y^2$$

Las ecuaciones diferenciales surgen en muchas aplicaciones de ingeniería y otras disciplinas como modelos matemáticos de diversos sistemas físicos y de otros tipos. Los casos más simples pueden resolverse recordando el cálculo diferencial e integral elemental.

Por ejemplo, si una población (de seres humanos, animales, bacterias, etc.) crece a razón de $y' = dy/dx$ (x = tiempo) igual a la población actual $y(x)$, el modelo de la población es $y' = y$, una ecuación diferencial. Si se recuerda del cálculo que la función $y = e^x$ (o en términos más generales, $y = ce^x$) posee la propiedad de que $y' = y$, se habrá obtenido una solución del problema.

Como otro ejemplo, si se deja caer una piedra, entonces su aceleración $y'' = d^2y/dx^2$ (x = tiempo, como en el ejemplo anterior) es igual a la aceleración de la gravedad g (una constante). Por tanto, el modelo de este problema de "caída libre" es $y'' = g$, que es una buena aproximación, ya que la resistencia del aire tiene una influencia reducida en este caso. Al integrar se obtiene la velocidad $y' = dy/dx = gx + v_0$, donde v_0 es la velocidad inicial con la que empezó el movimiento (por ejemplo, $v_0 = 0$). Al integrar otra vez se obtiene la distancia recorrida $y = \frac{1}{2}gx^2 + v_0x + y_0$, donde y_0 es la distancia desde 0 al principio (por ejemplo, $y_0 = 0$).

Modelos más complicados, como los que se ilustran en la figura 1 así como en muchas figuras más del libro, requieren métodos más refinados para encontrar sus soluciones y para discutirlos, los cuales se abordarán de manera sistemática. Para ello se empieza con una clasificación de las ecuaciones diferenciales de acuerdo con su "orden":

El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada mayor que interviene en la ecuación.

Así, las **ecuaciones diferenciales de primer orden**, que se estudiarán en este capítulo, sólo contienen y' y pueden incluir a y así como a funciones dadas de x; por tanto pueden escribirse

$$F(x, y, y') = 0 \tag{4}$$

o en ocasiones

$$y' = f(x, y).$$

Ejemplos son las ecuaciones (1) y $y' = y$, que se acaba de considerar. Las ecuaciones (2) y (3) son de segundo y tercer orden, respectivamente; estas ecuaciones de órdenes superiores se discutirán en los capítulos 2–6.

Concepto de solución

Una **solución** de una ecuación diferencial de primer orden (4) en un intervalo abierto[1] $a < x < b$ es una función $y = h(x)$ que tiene una derivada $y' = h'(x)$ y satisface (4) para toda x en dicho intervalo; es decir, (4) se convierte en una identidad si se sustituye la función desconocida y por h y y' por h'.

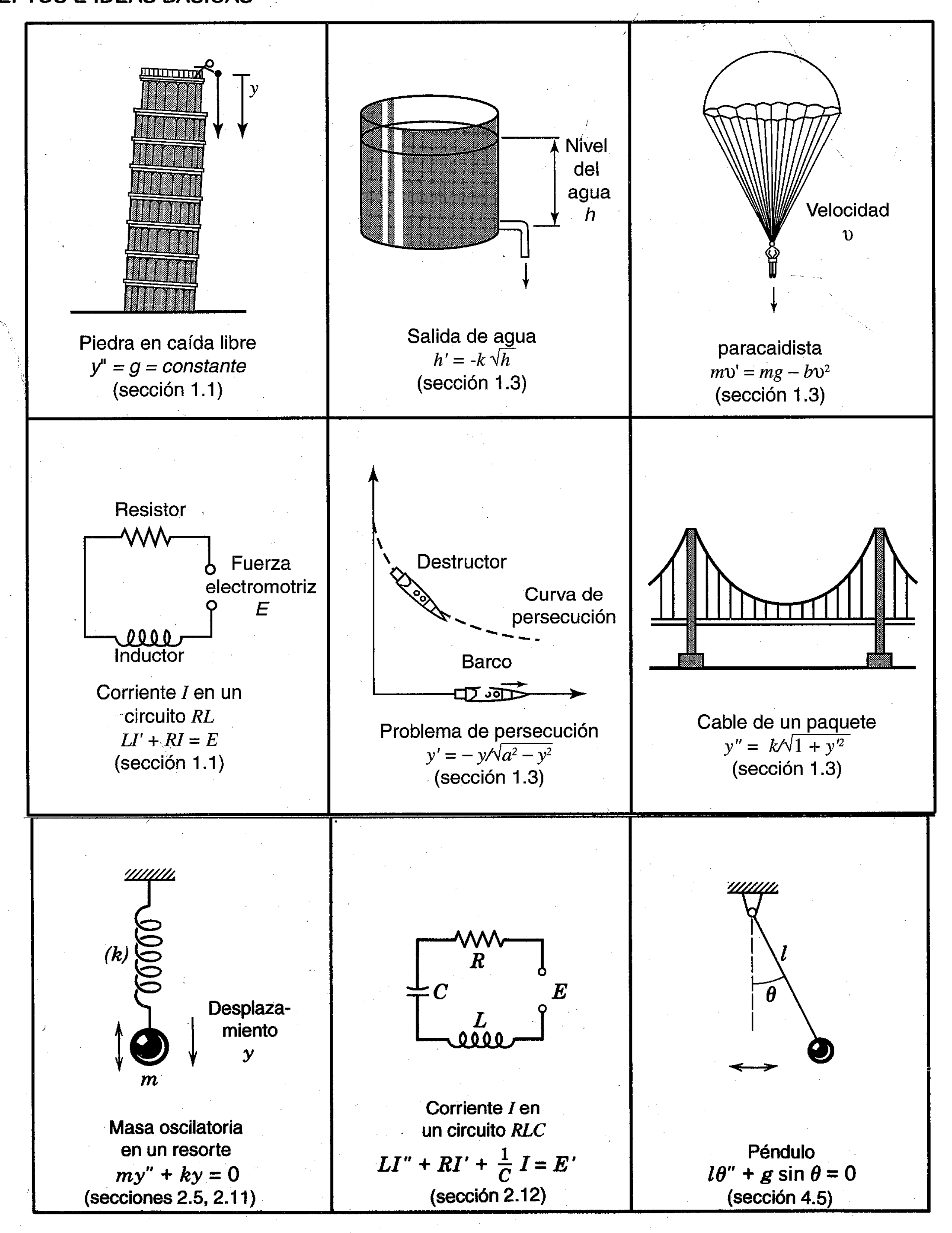


Figura 1. Algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO 1 Concepto de solución

Comprobar que $y = x^2$ es una solución de $xy' = 2y$ para toda x.

De hecho, $y' = 2x\, y$, por sustitución, $xy' = x(2x) = 2y = 2x^2$, una identidad en x. ▮

En ocasiones una solución de una ecuación diferencial aparecerá como una fun-

EJEMPLO 2 Solución implícita

La función y de x dada implícitamente por $x^2 + y^2 - 1 = 0$ $(y > 0)$, que representa una semicircunferencia de radio uno en el semiplano superior, es una solución implícita de la ecuación diferencial $yy' = -x$ en el intervalo $-1 < x < 1$, como puede comprobar el estudiante derivando. ∎

A continuación se hará notar que una ecuación diferencial puede tener (y en general tendrá) varias soluciones. Esto en realidad no debería ser motivo de sorpresa, dado que por cálculo elemental se sabe que la integración introduce constantes arbitrarias.

EJEMPLO 3

La ecuación (1) era $y' = \cos x$ y puede resolverse aplicando cálculo elemental. De la integración se obtienen las curvas seno $y = \operatorname{sen} x + c$, con c arbitraria. De cada c se obtiene una de ellas y éstas son todas las soluciones posibles, como sabemos por cálculo. En la figura 2 se muestran algunas de las curvas, para $c = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$. ∎

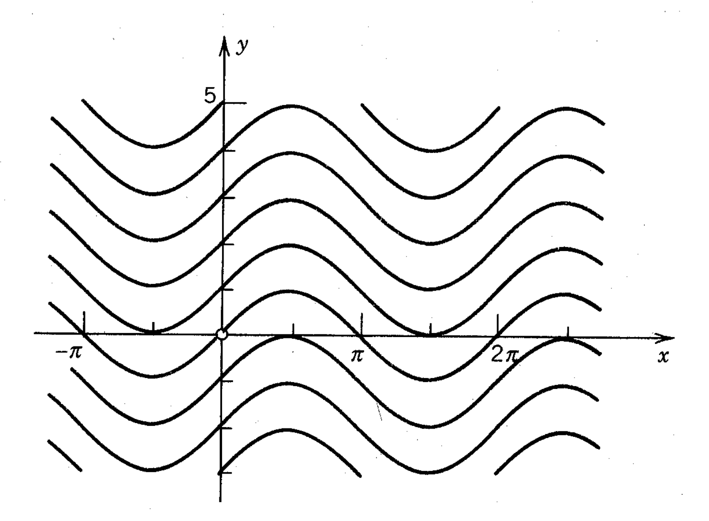


Figura 2. Soluciones de $y' = \cos x$.

Este ejemplo, a pesar su simplicidad, es típico de la mayoría de las ecuaciones de primer orden. Muestra que todas las soluciones están representadas por una sola fórmula que incluye una constante arbitraria c. Se acostumbra hacer referencia a esta fórmula que incluye una constante arbitraria[2] como una **solución general** de una ecuación diferencial de primer orden. Y si se elige un valor específico de c (por ejemplo, $c = 2, 0, -5/3$, etc.), se obtiene lo que se conoce como una **solución particular** de esa ecuación.

Por tanto, $y = \operatorname{sen} x + c$ es una solución general de $y' = \cos x$, y $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{sen} x - 2$, $y = \operatorname{sen} x + 0.75$, etc., son soluciones particulares.

En las secciones siguientes se desarrollarán varios métodos para obtener soluciones generales de ecuaciones de primer orden. Para una ecuación dada, una solución general obtenida mediante uno de estos métodos es única, excepto por la notación, y

COMENTARIO Soluciones singulares

En ocasiones una ecuación diferencial puede tener una solución adicional que no puede obtenerse a partir de la solución general y entonces se llama **solución singular**. Este caso no es de mucho interés en la ingeniería y sólo se menciona como referencia. Por ejemplo,

$$y'^2 - xy' + y = 0 \qquad (5)$$

tiene la solución general $y = cx - c^2$, como el estudiante puede comprobar derivando y sustituyendo. Esta expresión representa una familia de rectas, una recta para cada valor de c. Son las soluciones particulares que se muestran en la figura 3. Por sustitución se comprueba asimismo que la parábola $y = x^2/4$ de la figura 3 también es una solución. Se trata de una solución singular de (5) porque no puede obtenerse a partir de $y = cx - c^2$ eligiendo un valor adecuado de c.

Se verá que las condiciones bajo las cuales una ecuación diferencial dada tiene soluciones son bastante generales. Pero deberá tenerse presente que existen ecuaciones simples que no tienen ninguna solución y otras que no tienen solución general. Por ejemplo, la ecuación $y'^2 = -1$ no tiene solución para y real. (¿Por qué?) La ecuación $|y'| + |y| = 0$ no tiene solución general, ya que su única solución es $y \equiv 0$.

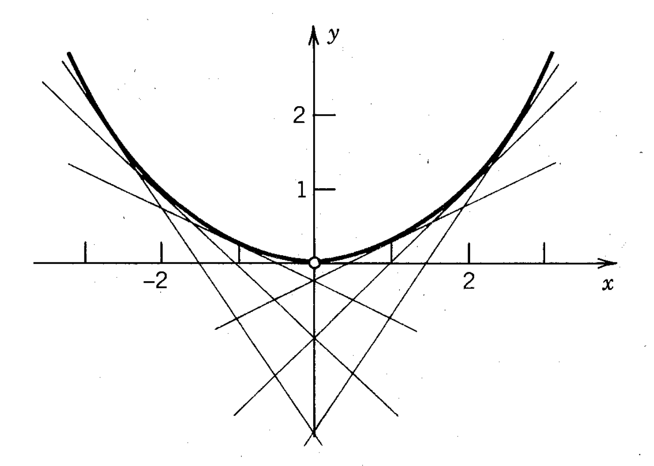


Figura 3. Solución singular (que representa una parábola) y soluciones particulares de la ecuación (5).

Aplicaciones. Modelado. Problemas con valor inicial

Las ecuaciones diferenciales son de gran importancia en ingeniería debido a que muchas leyes y relaciones físicas se expresan matemáticamente en la forma de ecuaciones diferenciales.

Para empezar, se considera una aplicación física básica que ilustrará los pasos típicos del **modelado**, es decir, los pasos que llevan de la situación física (*sistema físico*) a una formulación matemática (*modelo matemático*) y a una solución, así como a la interpretación física del resultado. Quizás sea ésta la manera más fácil de obtener una idea inicial de la naturaleza y finalidad de las ecuaciones diferenciales y de sus aplicaciones.

Solución. Primer paso. Establecimiento de un modelo matemático (de una ecuación diferencial) del proceso físico. Se denota por $y(t)$ la cantidad de sustancia que aún está presente en el tiempo t. La razón de cambio es dy/dt. De acuerdo con la ley física que gobierna el proceso de la radiación, dy/dt es proporcional a y:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky.} \tag{6}$$

Por tanto, y es la función desconocida, la cual depende de t. La constante k es una constante física definida cuyo valor numérico se conoce para varias sustancias radiactivas. (Por ejemplo, en el caso del radio $_{88}Ra^{226}$ se tiene $k \approx -1.4 \cdot 10^{-11}\ s^{-1}$.) Evidentemente, dado que la cantidad de sustancia es positiva y disminuye con el tiempo, dy/dt es negativa y, en consecuencia, k también lo es. Se observa que el proceso físico bajo consideración se describe matemáticamente por medio de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Por tanto, esta ecuación es el modelo matemático de ese proceso físico. ***Siempre que en una ley física intervenga la razón de cambio de una función, como la velocidad, la aceleración, etc., se llegará a una ecuación diferencial. Por esta razón las ecuaciones diferenciales se presentan con frecuencia en física e ingeniería.***

Segundo paso. Resolución de la ecuación diferencial. No se conoce aún ningún método para encontrar la solución, pero en este caso el cálculo será de utilidad. De hecho, la ecuación (6) dice que si existe una solución $y(t)$, su derivada debe ser proporcional a y. Se recuerda del cálculo elemental que las funciones exponenciales poseen esta propiedad. Por derivación y sustitución se ve que una solución para toda t es e^{kt} ya que $(e^{kt})' = ke^{kt}$, o en términos más generales,

$$y(t) = ce^{kt} \tag{7}$$

con una constante c cualquiera, ya que $y'(t) = cke^{kt} = ky(t)$. Puesto que c es arbitraria, (7) es la **solución general** de (6), por definición.

Tercer paso. Determinación de una solución particular a partir de una condición inicial. Evidentemente, este proceso físico tiene un comportamiento único. En consecuencia, debería ser posible obtener de (7) una solución particular única. Entonces la cantidad de sustancia en cierto tiempo t dependerá de la cantidad inicial $y = 2$ gramos en el tiempo $t = 0$ o, expresado mediante una fórmula,

$$y(0) = 2. \tag{8}$$

Esta expresión recibe el nombre de ***condición inicial***. Se usa para encontrar c en (7):

$$y(0) = ce^0 = 2, \qquad \text{por tanto} \qquad c = 2.$$

Con este valor de c, de la ecuación (7) se obtiene como respuesta para la solución particular

$$y(t) = 2e^{kt} \tag{9}$$ **(Fig. 4).**

Por tanto, la cantidad de sustancia radiactiva experimenta un decaimiento exponencial (disminución exponencial con el tiempo). Este resultado concuerda con los experimentos físicos.

Cuarto paso. Comprobación. A partir de (9) se tiene

$$\frac{dy}{dt} = 2ke^{kt} = ky \qquad \text{y} \qquad y(0) = 2e^0 = 2.$$

y

Se observa que la función (9) satisface tanto la ecuación (6) como la condición inicial (8).

El estudiante nunca debe olvidar llevar a cabo este importante paso final, el cual indica si la función es (o no) la solución del problema. ∎

A una ecuación diferencial acompañada de una condición inicial, como en el ejemplo anterior, se le llama **problema con valor inicial.** Con x como variable independiente (en lugar de t), es de la forma

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{10}$$

donde x_0 y y_0 son valores dados. (En el ejemplo tratado, $x_0 = t_0 = 0$ y $y_0 = y(0) = 2$.) La condición inicial $y(x_0) = y_0$ se usa para determinar un valor de c en la solución general.

A continuación se establece que los problemas geométricos también dan lugar a ecuaciones diferenciales y a problemas con valor inicial.

EJEMPLO 5 Una aplicación geométrica

Encontrar la curva que pasa por el punto (1, 1) en el plano xy y que en cada uno de sus puntos tiene la pendiente $-y/x$.

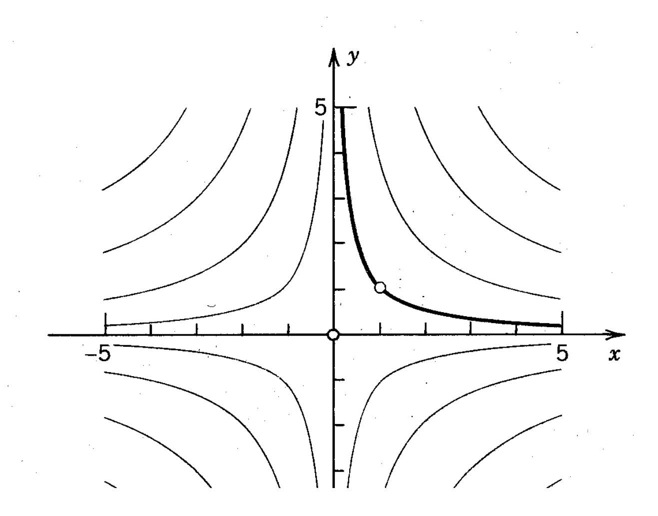
Solución. La función que produce la curva buscada debe ser una solución de la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{y}{x}. \tag{11}$$

Pronto se aprenderá cómo resolver ecuaciones como ésta. Mientras tanto, el estudiante puede comprobar que la solución general de (11) es (figura 5).

$$y = \frac{c}{x} \qquad (c \text{ arbitrario}). \tag{12}$$

Puesto que se busca la curva que pasa por (1, 1), debe tenerse $y = 1$ cuando $x = 1$. De esta condición inicial $y(1) = 1$ se obtiene $c = 1$ en (12) y como respuesta la solución particular $y = 1/x$. ∎



A lo largo del capítulo se desarrollarán muchos ejemplos más; así es que se abordará sin demora el objetivo principal, la explicación y aplicación de los métodos más importantes para encontrar las soluciones, empezando en la siguiente sección.

Problemas de la sección 1.1

En cada caso, establecer el orden de la ecuación diferencial y comprobar que la función dada es una solución.

1. $y' + 4y = 8x, \quad y = ce^{-4x} + 2x - \frac{1}{2}$
2. $y'' + 9y = 0, \quad y = A\cos 3x + B\,\mathrm{sen}\,3x$
3. $y' - 0.5y = 1, \quad y = ce^{0.5x} - 2$
4. $y''' = 6, \quad y = x^3 + ax^2 + bx + c$
5. $y' + y\tan x = 0, \quad y = c\cos x$
6. $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y = e^x(A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x)$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

7. $y' = e^{-2x}$ **8.** $y' = xe^{x^2}$ **9.** $y' = -\cos\frac{1}{2}x$ **10.** $y''' = 48x$

En cada caso, comprobar que la función dada es una solución de la ecuación diferencial correspondiente y determinar el valor de c para que la solución particular resultante satisfaga la condición inicial dada.

11. $y' + y = 1, \quad y = ce^{-x} + 1, \quad y = 2.5$ cuando $x = 0$
12. $y' = 2xy, \quad y = ce^{x^2}, \quad y = 4$ cuando $x = 1$
13. $xy' = 2y, \quad y = cx^2, \quad y = 12$ cuando $x = 2$
14. $yy' = x, \quad y^2 - x^2 = c, \quad y(0) = 1$
15. $y' = y\cot x, \quad y = c\,\mathrm{sen}\,x, \quad y(-\pi/2) = 2$
16. $yy' + x = 0, \quad x^2 + y^2 = c, \quad y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Encontrar una ecuación diferencial de primer orden que contenga tanto a y como a y' y para la cual la función dada sea una solución.

17. $y = x^2$ **18.** $y = x^3 - 4$ **19.** $y = \tan x$ **20.** $x^2 + 9y^2 = 9$

Aplicaciones, modelado

21. **(Cuerpo en caída libre)** Experimentos demuestran que si un cuerpo cae en el vacío debido a la acción de la gravedad, entonces su aceleración es constante (igual a $g = 9.80$ m/s^2 = 32.1 ft/s^2; se le conoce como *aceleración de la gravedad*). Expresar esta ley como una ecuación diferencial para $y(t)$, la distancia recorrida en la caída como una función del tiempo t (ya citada en el texto), y resolverla para obtener la conocida ley

22. **(Cuerpo en caída libre, condiciones iniciales generales)** Si en el problema 21 el cuerpo empieza en $t = 0$ desde su posición inicial $y = y_0$ con velocidad inicial $v = v_0$, demostrar que entonces la solución es

$$y(t) = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0.$$

23. **(Despegue de un aeroplano)** Para despegar, un aeroplano recorre 1.8 kilómetros de la pista. Si el avión empieza con una velocidad de 5 m/s, avanza con aceleración constante y recorre los 1.8 km en 40 s, ¿cuál es su velocidad al despegar?

24. En el problema 23, si desea reducirse la velocidad de despegue a 250 km/h, ¿hasta qué valor puede reducirse la aceleración constante, considerando que los demás datos permanecen como antes?

25. **(Crecimiento exponencial)** Se sabe por el texto que la ecuación $y' = y$ con solución $y(x) = ce^x$ gobierna el crecimiento de una población si la razón de crecimiento $y' = dy/dx$ es igual a la problación $y(x)$ actual (x = tiempo). (a) ¿Cuál es la solución particular que satisface $y(0) = 3$? (b) ¿Cuál es la cantidad inicial $y(0)$ necesaria para obtener $y = 100$ después de $x = 2$ [horas]?

26. **(Crecimiento exponencial)** Si en un cultivo de levadura la razón de crecimiento $y'(x)$ es proporcional a la población actual en el tiempo x, por ejemplo, $y' = ky$, comprobar que $y(x) = ce^{kx}$. Si y se duplica en un día, ¿qué cantidad puede esperarse después de una semana con la misma razón de crecimiento? ¿Después de dos semanas?

27. **(Ley de Malthus)** La ley del problema 26 (razón de crecimiento proporcional a la población actual) se conoce como la *ley de Malthus*.[3] Para Estados Unidos, los valores observados de $y(t) = y_0 e^{kt}$, en millones, son los siguientes:

t	0	30	60	90	120	150	180	190
Año	1800	1830	1860	1890	1920	1950	1980	1990
Población	5.3	13	31	63	105	150	230	250

Usar las dos primeras columnas para determinar y_0 y k. Calcular después los valores de 1860, 1890, . . . , 1990 y compararlos con los valores observados. Comentar.

28. **(Decaimiento exponencial; presión atmosférica)** Observaciones indican que la razón de cambio de la presión atmosférica y con la altura x es proporcional a la presión. Suponiendo que la presión a 6000 metros (casi 18,000 pies) es la mitad de su valor y_0 al nivel del mar, encontrar la fórmula de la presión a cualquier altura.

29. **(Vida media)** La *vida media* de una sustancia radiactiva es el tiempo en que desaparece la mitad de una cantidad dada. ¿Cuál es la vida media del ${}_{88}Ra^{226}$ (en años) del ejemplo 4?

30. **(Tasas de interés)** Sea $y(x)$ la inversión resultante de un depósito y_0 después de x años a una tasa de interés r. Demostrar que

$$y(x) = y_0[1 + r]^x \quad \text{(interés compuesto anual)}$$

$$y(x) = y_0[1 + (r/4)]^{4x} \quad \text{(interés compuesto trimestral)}$$

$$y(x) = y_0[1 + (r/365)]^{365x} \quad \text{(interés compuesto diario).}$$

Recuérdese del cálculo elemental que $[1 + (1/n)]^n \to e$ cuando $n \to \infty$, por lo tanto, $[1 + (r/n)]^{nx} \to e^{rx}$, de donde se obtiene

$$y(x) = y_0 e^{rx} \qquad \text{(interés compuesto continuo).}$$

¿Qué ecuación diferencial satisface la última función? Sean y_0 = \$1000.00 y r = 8%. Calcular $y(1)$ y $y(5)$ usando las cuatro fórmulas y confirmar que no hay mucha diferencia entre la composición diaria y la continua.

1.2 ECUACIONES DIFERENCIALES SEPARABLES

Muchas ecuaciones diferenciales de primer orden pueden reducirse a la forma

$$g(y)y' = f(x) \tag{1}$$

por medio de manipulaciones algebraicas. Puesto que $y' = dy/dx$, resulta conveniente escribir

$$\boxed{g(y)\, dy = f(x)\, dx,} \tag{2}$$

pero debe tenerse presente que sólo es otra forma de escribir (1). A esta ecuación se le llama **ecuación separable**, ya que en (2) las variables x y y están *separadas* de tal modo que x sólo aparece en el segundo miembro y y sólo aparece en el primer miembro.

Para resolver (1) se integran ambos miembros con respecto a x, obteniéndose

$$\int g(y) \frac{dy}{dx}\, dx = \int f(x)\, dx + c.$$

Ahora es posible hacer el cambio a y como variable de integración. Por cálculo, $(dy/dx)dx = dy$, de donde se obtiene

$$\boxed{\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx + c.} \tag{3}$$

Si se supone que f y g son funciones continuas, las integrales de (3) existen y al evaluarlas se obtiene la solución general de (1).

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación diferencial

$$9yy' + 4x = 0$$

Al integrar ambos miembros se obtiene la solución general

$$\frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + \tilde{c}, \quad \text{por tanto} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = c \quad \left(c = \frac{\tilde{c}}{18}\right).$$

La solución representa una familia de elipses. ¿Puede trazar algunas? ∎

EJEMPLO 2 Resolver la ecuación diferencial

$$y' = 1 + y^2.$$

Solución. Al separar las variables e integrar se obtiene

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx, \qquad \text{arc tan } y = x + c, \qquad y = \tan(x + c).$$

Es de suma importancia introducir la constante de integración inmediatamente cuando se efectúe la integración. ∎

EJEMPLO 3 Problema con valor inicial

Resolver el problema con valor inicial

$$y' + 5x^4y^2 = 0, \qquad y(0) = 1.$$

Solución. Al separar las variables e integrar se obtiene

$$\frac{dy}{y^2} = -5x^4\,dx, \qquad -\frac{1}{y} = -x^5 + c, \qquad y = \frac{1}{x^5 - c}.$$

A partir de este resultado y de la condición inicial se encuentra que

$$y(0) = \frac{1}{-c} = 1, \qquad c = -1, \qquad \text{por tanto} \qquad y = \frac{1}{x^5 + 1}.$$

Comprobación. Se comprueba el resultado,

$$y' + 5x^4y^2 = -\frac{5x^4}{(x^5+1)^2} + 5x^4\frac{1}{(x^5+1)^2} = 0, \qquad y(0) = \frac{1}{1} = 1.$$ ∎

EJEMPLO 4 Problema con valor inicial

Resolver

$$y' = \frac{x}{y}, \qquad y(1) = 3.$$

Solución. Después de separar las variables, integrar y hacer uso de la condición inicial, se obtiene

$$y\,dy = x\,dx, \qquad \tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{1}{2}x^2 + c \qquad \tfrac{1}{2}\cdot 3^2 = \tfrac{1}{2}\cdot 1^2 + c, \qquad c = 4.$$

Por tanto, la respuesta es la rama superior de la hipérbola $y^2 - x^2 = 2c = 8$. (¿Por qué no la inferior?) ∎

EJEMPLO 5 Problema con valor inicial

Resolver el problema con valor inicial

$$y' = ky, \qquad y(0) = 2.$$

Solución. Al separar las variables e integrar,

$$\frac{dy}{y} = k, \qquad \ln|y| = kx + \tilde{c}$$

[ya que por cálculo, $(\ln|y|)' = y'/y$; de hecho, si $y > 0$, entonces $(\ln|y|)' = (\ln y)' = y'/y$; y si $y < 0$, entonces $-y > 0$ y $(\ln|y|)' = (\ln(-y))' = -y'/(-y) = y'/y$]. Tomando exponenciales y observando que $e^{a+b} = e^a e^b$, se obtiene

$$|y| = e^{kx+\tilde{c}} = e^{kx}e^{\tilde{c}}, \qquad \text{por tanto} \qquad y = ce^{kx},$$

donde $c = +e^{\tilde{c}}$ cuando $y > 0$ y $c = -e^{\tilde{c}}$ cuando $y < 0$, y también puede aceptarse $c = 0$ (obteniéndose $y \equiv 0$). Esta es la solución general. A partir de la condición inicial $y(0) = ce^0 = 2$ se tiene que $c = 2$ y como respuesta se obtiene la solución particular $y = 2e^{kx}$, de conformidad con el ejemplo 4 de la seccion 1.1. ∎

EJEMPLO 6 Curvas en forma de campana

Resolver el problema con valor inicial

$$y' = -2xy, \qquad y(0) = 1.$$

Solución. Separando las variables, integrando y tomando exponentes, se obtiene

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx, \qquad \ln|y| = -x^2 + \tilde{c}, \qquad |y| = e^{-x^2+\tilde{c}}.$$

Al hacer $e^{\tilde{c}} = +c$ cuando $y > 0$ y $e^{\tilde{c}} = -c$ cuando $y < 0$, y aceptando también $c = 0$ (que da la solución $y \equiv 0$), se llega a la solución general

$$y = ce^{-x^2},$$

que representa las llamadas "**curvas en forma de campana**", las cuales se aplican en la conducción del calor (sección 11.6) y en probabilidad y estadística (sección 23.7 y capítulo 24). En la figura 6 se muestran algunas de estas curvas para $c > 0$.

El estudiante puede demostrar que la solución particular del problema con condición inicial tratado es

$$y = e^{-x^2}.$$ ∎

Figura 6. Soluciones de $y' = -2xy$ ("curvas acampanadas") en el semiplano superior ($y > 0$).

Muchos problemas de física e ingeniería tienen como modelo una ecuación diferencial que es separable. Este hecho se ejemplifica en la siguiente sección donde se analiza una cuidadosa selección de algunos problemas típicos de esta naturaleza.

Problemas de la sección 1.2

1. ¿Por qué es importante introducir la constante de integración inmediatamente una vez que se ha llevado cabo la integración?

Encontrar una solución general. Comprobar la respuesta por sustitución.

2. $y' + (x + 1)y^3 = 0$
3. $y' = 3(y + 1)$
4. $y' + \csc y = 0$
5. $y' = (1 + x)(1 + y^2)$
6. $yy' = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 \omega x \quad (\omega \neq 0)$
7. $y' \operatorname{sen} 2x = y \cos 2x$
8. $y' = \cos x \tan y$
9. $y' = y \tanh x$
10. $y' + y^2 = 1$
11. $y' = e^{2x} \cos^2 y$
12. $y' = y^2 \operatorname{sen} x$
13. $y' = y/(x \ln x)$
14. $y' = x^2y^2 - 2y^2 + x^2 - 2$
15. $y' = \sqrt{1 - y^2}$

Resolver los siguientes problemas con valor inicial. Comprobar las respuestas. (L y R son constantes.)

16. $y' = x^3e^{-y}, \quad y(2) = 0$
17. $yy' + x = 0, \quad y(0) = -2$
18. $y' = 2e^xy^3, \quad y(0) = 0.5$
19. $y' \cosh^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 0, \quad y(0) = \frac{1}{4}\pi$
20. $y' = 4\sqrt{y + 1} \cos 2x, \quad y(\frac{1}{4}\pi) = -1$
21. $y' = (1 - x)/y, \quad y(1) = 1$
22. $dr/dt = -4tr, \quad r(0) = 8.2$
23. $v(dv/dt) = g = const, \quad v(t_0) = v_0$
24. $e^xy' = 2(x + 3)y^3, \quad y(0) = \frac{1}{4}$
25. $dr \operatorname{sen} \theta = r \cos \theta \, d\theta, \quad r(\frac{1}{2}\pi) = -0.3$
26. $(x^2 + 1)^{1/2}y' = xy^3, \quad y(0) = 2$
27. $L(dI/dt) + RI = 0, \quad I(0) = I_0$

28. Un problema con valor inicial por lo general se resuelve determinando primero la solución general de la ecuación y después la solución particular. Aplicando (3), demostrar que la solución particular de (1) que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$ también puede obtenerse directamente de

$$\int_{y_0}^{y} g(y^*)\, dy^* = \int_{x_0}^{x} f(x^*)\, dx^*.$$

Utilizando la fórmula del problema 28, resolver:

29. El problema 17.
30. El problema 19.

1.3 MODELADO: ECUACIONES SEPARABLES

Modelar significa establecer modelos matemáticos de sistemas físicos o de otros géneros. En esta sección se consideran algunos de los múltiples sistemas para los que puede encontrarse un modelo en términos de una ecuación diferencial separable.

EJEMPLO 1 Fechamiento por carbono radiactivo

Si un hueso fosilizado contiene 25% de la cantidad original de carbono radiactivo ${}_6C^{14}$, ¿cuál es su antigüedad?

Idea del método que va a usarse. En la atmósfera, la proporción del carbono radiactivo ${}_6C^{14}$ y el carbón común ${}_6C^{12}$ es constante, lo cual también se cumple para los organismos *vivos*. Cuando un organismo muere, cesa la absorción de ${}_6C^{14}$ al respirar y comer. Por tanto, la edad de un fósil puede estimarse comparando la proporción de carbono presente en el fósil con el de la atmósfera. Esta es la idea del fechamiento por carbono radiactivo de W. Libby (premio Nobel de química, 1960). La vida media del ${}_6C^{14}$ es de 5730 años (*CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 54ava ed., 1973, p. B251).

Solución. Como en el ejemplo 4 de la sección 1.1, el modelo matemático del proceso del decaimiento radiactivo es

$$y' = ky, \qquad \text{solución} \qquad y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Aquí, y_0 es la cantidad inicial de ${}_6C^{14}$. Por definición, la vida media (5730 años) es el tiempo después del cual la cantidad de sustancia radiactiva (${}_6C^{14}$) ha disminuido a la mitad de su valor original. Por tanto,

$$(1) \qquad y_0 e^{k \cdot 5730} = \tfrac{1}{2} y_0, \qquad e^{5730k} = \tfrac{1}{2}, \qquad k = \frac{\ln 1/2}{5730} = -0.000\ 121.$$

El tiempo después del cual el 25% de la cantidad original de ${}_6C^{14}$ sigue estando presente puede calcularse ahora a partir de

$$(2) \qquad y_0 e^{-0.000\ 121t} = \tfrac{1}{4} y_0, \qquad t = \frac{\ln 1/4}{-0.000\ 121} = 11\ 460\ [\text{años}].$$

Por tanto, la respuesta matemática es que el hueso tiene una antigüedad de 11 460 años. En realidad, la determinación experimental de la vida media del ${}_6C^{14}$ incluye un error de unos 40 años. Asimismo, una comparación con otros métodos revela que el fechamiento con carbono radiactivo tiende a producir valores que son demasiado pequeños, quizás debido a que la razón del ${}_6C^{14}$ al ${}_6C^{12}$ puede haber cambiado en periodos prolongados. En consecuencia, probablemente 12 000 ó 13 000 años es una respuesta más realista para el problema tratado.

¿Observó el lector que la respuesta es el doble de la vida media? ¿Se trata de un hecho fortuito? ■

EJEMPLO 2 Ley de enfriamiento de Newton[4]

Una bola de cobre se calienta hasta una temperatura de 100 °C. Después, en el tiempo $t = 0$, se coloca en agua que se mantiene a una temperatura de 30 °C. Al término de 3 minutos la temperatura de la bola se reduce a 70 °C. Encontrar el tiempo en el que la temperatura de la bola se reduce a 31 °C.

Información física. Experimentos indican que la razón de cambio con respecto al tiempo dT/dt de la temperatura T de la bola es proporcional a la diferencia entre T y la temperatura T_0 del medio ambiente (**ley de enfriamiento de Newton**). Asimismo, en el cobre el calor fluye con tal rapidez que en cualquier tiempo la temperatura es prácticamente la misma en todos los puntos de la bola.

[4] Sir ISAAC NEWTON (1642-1727), gran físico y matemático inglés, fue profesor en Cambridge en 1669 y Director de la Casa de Moneda en 1699. Newton y el matemático y filósofo alemán GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716) inventaron (independientemente) el cálculo diferencial e integral. Newton descubrió varias leyes físicas fundamentales y creó el método para abordar los problemas físicos por medio del cálculo. Su *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Principios matemáticos de la filosofía natural*, 1687) contienen el desarrollo de la mecánica clásica. Su obra es de suma importancia tanto para las matemáticas como para la física.

Solución. Primer paso. Modelado. Lo único que tiene que hacerse es escribir la ley de Newton como una ecuación; al denotar la constante (desconocida) de proporcionalidad por k, se tiene

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 30). \tag{3}$$

Segundo paso. Solución general. Al separar las variables e integrar se llega a la solución general de (3),

$$\frac{dT}{T - 30} = k\,dt, \qquad \ln|T - 30| = kt + \tilde{c}, \qquad T(t) = ce^{kt} + 30.$$

Tercer paso. Solución particular. De la condición inicial dada $T(0) = 100$ se obtiene

$$T(0) = ce^{0} + 30 = 100, \qquad \text{por tanto} \qquad T(t) = 70e^{kt} + 30.$$

Cuarto paso. Determinación de k y de la respuesta. Del dato $T(3) = 70$ se obtiene

$$T(3) = 70e^{k \cdot 3} + 30 = 70, \qquad \text{por tanto} \qquad k = \frac{1}{3}\ln\frac{70 - 30}{70} = -0.1865.$$

Este valor negativo de k hace que dT/dt sea negativa [ver (3)], como debería ser el caso, ya que el valor de T debe disminuir. Entonces la respuesta se obtiene de

$$T(t) = 70e^{-0.1865t} + 30 = 31, \qquad -0.1865t = \ln(1/70), \qquad t = 22.78.$$

Por tanto, la respuesta es que la bola alcanza la temperatura de 31 °C después de aproximadamente 23 minutos.

Quinto paso. Comprobación. Comprobar que la respuesta satisface (3) y todas las condiciones dadas. ■

EJEMPLO 3 Flujo de agua por orificios (ley de Torricelli[5])

Un tanque cilíndrico de 1.50 metros de altura descansa sobre su base circular de 1.00 metro de diámetro e inicialmente se encuentra lleno de agua. En el fondo del tanque hay un orificio de 1.00 cm de diámetro, el cual se abre en cierto instante, de tal modo que el agua empieza a fugarse debido a la fuerza de gravedad (figura 7). Encontrar la altura $h(t)$ del agua del tanque en cualquier tiempo t. Encontrar los tiempos en que el tanque tiene agua hasta la mitad, hasta la cuarta parte y cuando queda vacío.

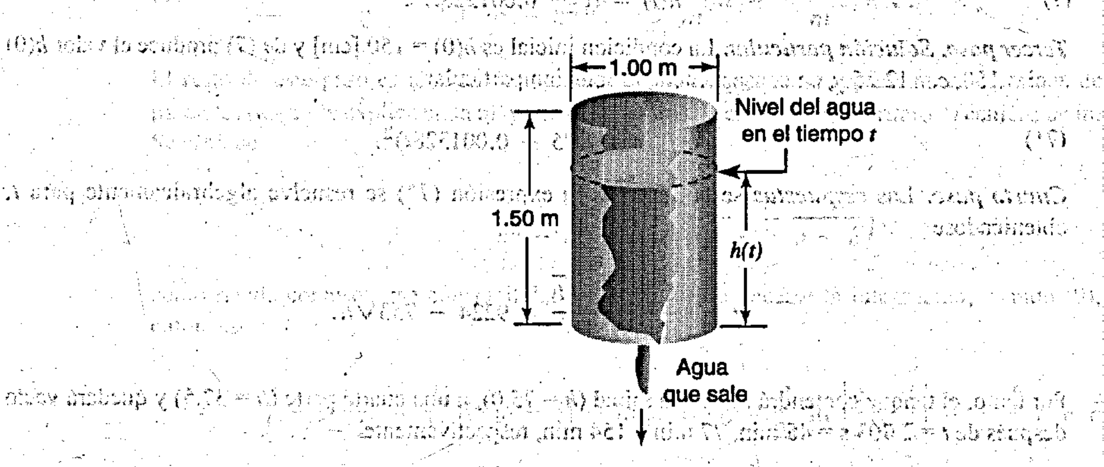


Figura 7. Tanque del ejemplo 3.

[5] EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647), físico y matemático italiano, discípulo y sucesor de GALILEO GALILEI (1564-1642) en Florencia.

Información física. Experimentos indican que el agua sale de un orificio con la velocidad

(4) $$v(t) = 0.600\sqrt{2gh(t)}$$ **(ley de Torricelli[5])**

donde t es el tiempo, $h(t)$ es la altura instantánea del agua arriba del orificio, $g = 980$ cm/s² = 32.17 ft/s² es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre y 0.600 es un factor de contracción[6] (debido a que el flujo tiene una sección transversal menor que el orificio). La ecuación (4) parece tener sentido pues $\sqrt{2gh}$ es la velocidad que adquiere un cuerpo si cae una distancia h (suponiendo que la resistencia del aire se puede ignorar).

Solución. Primer paso. Modelado Se verá que el modelo matemático de este problema físico es una ecuación diferencial. La idea es relacionar la disminución del nivel del agua $h(t)$ con el flujo de salida. Si A es el área del orificio, entonces el volumen ΔV del agua que sale con una velocidad v en un intervalo corto Δt es

$$\Delta V = Av\Delta t.$$

Esto produce un decremento Δh del nivel del agua h en el tanque, el cual debe ser tal que el volumen correspondiente $B\Delta h$ (B = área de la sección transversal del tanque) es igual a ΔV; por tanto

$$B\Delta h = -\Delta V = -Av\Delta t,$$

donde el signo menos aparece porque el nivel de agua disminuye. Se divide ahora entre $B\Delta t$, se sustituye v de (4) y se hace $\Delta t \to 0$. Entonces, usando $g = 980$ [cm/s²], se obtiene

(5) $$\frac{dh}{dt} = -\frac{A}{B}v = -26.56\frac{A}{B}\sqrt{h}.$$

A partir de los datos, $A/B = 0.500^2\pi/50.0^2\pi = 0.000\,1000$, de donde el modelO es la ecuación diferencial

(6) $$\frac{dh}{dt} = -0.002656h^{1/2}.$$

Segundo paso. Solución general. Por separación e integración se obtiene

$$\frac{dh}{h^{1/2}} = -0.002656\,dt, \qquad 2h^{1/2} = -0.002656t + \tilde{c}.$$

Al escribir $c = \tilde{c}/2$, se llega a la solución general

(7) $$h(t) = (c - 0.001328t)^2.$$

Tercer paso. Solución particular. La condición inicial es $h(0) = 150$ [cm] y de (7) produce el valor $h(0) = c^2 = 150$, $c = 12.25$ y, en consecuencia, la solución particular

(7*) $$h(t) = (12.25 - 0.001328t)^2.$$

Cuarto paso. Las ***respuestas*** se obtienen si la expresión (7*) se resuelve algebraicamente para t, obteniéndose

$$t = \frac{12.25 - \sqrt{h}}{0.001328} = 9224 - 753\sqrt{h}.$$

Por tanto, el tanque contendrá agua a la mitad ($h = 75.0$), a una cuarta parte ($h = 37.5$) y quedará vacío después de t = 2 703 s = 45 min, 77 min y 154 min, respectivamente.

Quinto paso. Comprobación. Comprobar el resultado. ■

[6] Sugerido por J.C. BORDA en 1766.

EJEMPLO 4 El paracaidista

Suponer que un paracaidista cae desde la posición de reposo hacia la Tierra y el paracaídas se abre en un instante, llámese $t = 0$, cuando la velocidad del paracaidista es $v(0) = v_0 = 10.0$ metros/s. Encontrar la velocidad $v(t)$ del paracaidista en cualquier tiempo t posterior. ¿Se incrementa $v(t)$ de manera indefinida?

Supuestos y leyes físicas. Suponer que el peso del hombre más el equipo es $W = 712$ N (léase "newtons"; casi 160 lb), que la resistencia del aire U es proporcional a v^2, por ejemplo, $U = bv^2$ N, donde la constante de proporcionalidad b depende ante todo del paracaídas, y se supone que $b = 30.0$ N · s²/metro² = 30.0 kg/metro.

Solución. Primer paso. Modelado. Se establece el modelo matemático (la ecuación diferencial) del problema. La segunda ley de Newton es

$$\text{Masa} \times \text{Aceleración} = \text{Fuerza}$$

donde "fuerza" significa la resultante de las fuerzas que actúan sobre el paracaidista en cualquier instante. Estas fuerzas son el peso W y la resistencia del aire U.

El peso es $W = mg$, donde $g = 9.80$ metros/s² (cerca de 32.2 ft/s²) es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre. En consecuencia, la masa del hombre más el equipo es $m = W/g = 72.7$ kg (unos 5.00 slugs). La resistencia del aire U actúa hacia arriba (en contra de la dirección del movimiento), por lo que la resultante es

$$W - U = mg - bv^2.$$

La aceleración a es la derivada de v con respecto al tiempo, es decir, $a = dv/dt$. Por la segunda ley de Newton,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv^2. \tag{8}$$

Esta es la ecuación diferencial del problema tratado.

Segundo paso. Solución general. Al dividir (8) entre m se obtiene

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}(v^2 - k^2), \qquad k^2 = \frac{mg}{b}. \tag{8*}$$

Por separación e integración,

$$\int \frac{dv}{v^2 - k^2} = -\int \frac{b}{m}\,dt = -\frac{b}{m}t + \tilde{c}. \tag{9}$$

El resto de este paso es técnica de integración. El integrando se representa en términos de fracciones parciales (como se explica en la mayoría de los libros de cálculo bajo el rubro "Técnicas de integración"). Se obtiene

$$\frac{1}{v^2 - k^2} = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{v - k} - \frac{1}{v + k}\right),$$

como puede comprobarse con facilidad, y ahora puede hacerse la integración; usando (9), se obtiene entonces

$$\int \frac{dv}{v^2 - k^2} = \frac{1}{2k}[\ln|v - k| - \ln|v + k|] = \frac{1}{2k}\ln\left|\frac{v - k}{v + k}\right| = -\frac{b}{m}t + \tilde{c}.$$

Al multiplicar por $2k$ y tomar exponentes, se obtiene

$$\frac{v - k}{v + k} = ce^{-pt}, \qquad p = \frac{2kb}{m}, \tag{10}$$

donde $c = +e^{2kc}$ o $-e^{2kc}$ cuando la fracción es positiva o negativa respectivamente, y $c = 0$ también produce una solución ($v = k =$ *constante*), como puede verse de (8*). Al resolver algebraicamente para v, se obtiene

$$v(t) = k\frac{1 + ce^{-pt}}{1 - ce^{-pt}} \tag{11}$$

Se observa que $v(t) \longrightarrow k$ cuando $t \longrightarrow \infty$; es decir, $v(t)$ no se incrementa de manera indefinida sino que tiende a un límite, k. Resulta interesante observar que este límite es independiente de la condición inicial $v(0) = v_0$.

Tercer paso. Solución particular. De la condición inicial $v(0) = v_0$ y (10) es inmediato que

$$c = \frac{v_0 - k}{v_0 + k}.$$

La ecuación (11) con esta c es la solución particular que se busca.

Cuarto paso. Cálculos. Obsérvese que todavía no se ha hecho uso de los valores numéricos dados. En muchas ocasiones es conveniente buscar primero fórmulas generales y sustituir después los datos numéricos. De esta manera con frecuencia se adquiere una mejor idea de lo que está ocurriendo y, además, se ahorra trabajo si quieren obtenerse varias soluciones correspondientes a diferentes conjuntos de datos. En el caso presente se calcula ahora la velocidad límite (ver arriba)

$$k = \sqrt{\frac{mg}{b}} = \sqrt{\frac{W}{b}} = \sqrt{\frac{712}{30.0}} = 4.87 \text{ [metros/s]}$$

que el paracaidista alcanzará después de cierto tiempo (en realidad muy pronto, ya que se trata de funciones exponenciales que tienden a cero muy rápido; ver la figura 8), el valor de c para $v_0 = 10.0$ metros/s, obteniéndose $c = (v_0 - k)/(v_0 + k) = 0.345$, y la constante en el exponente de (11),

$$p = \frac{2kb}{m} = \frac{2 \cdot 4.87 \cdot 30.0}{72.7} = 4.02 \text{ [s}^{-1}\text{]}.$$

Esto en conjunto produce el resultado (figura 8)

$$v(t) = 4.87\frac{1 + 0.345e^{-4.02t}}{1 - 0.345e^{-4.02t}}. \tag{12}$$

Quinto paso. Comprobación. Comprobar el resultado. ∎

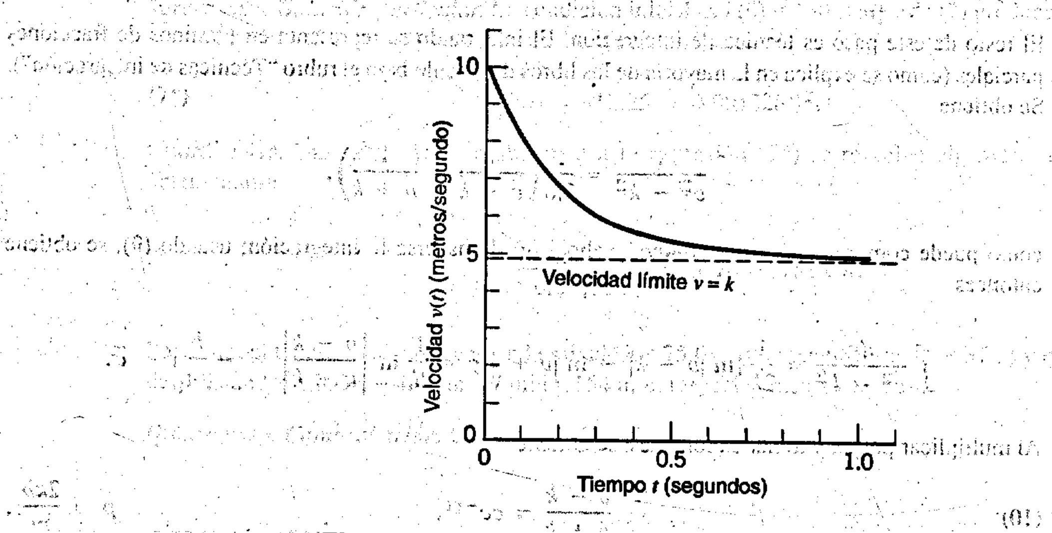


Figura 8. Velocidad $v(t)$ del paracaidista del ejemplo 4.

Problemas de la sección 1.3

1. Demostrar que a una pelota lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 requiere del doble del tiempo para regresar que para llegar al punto más alto. Encontrar la velocidad con que regresa. (Suponer que se puede ignorar la resistencia del aire.)
2. **(Acelerador lineal)** Los aceleradores lineales se usan en física para acelerar partículas cargadas. Suponer que una partícula alfa entra en un acelerador y experimenta una aceleración constante que aumenta la velocidad de la partícula de 10^3 metros/segundo a 10^4 metros/seg en 10^{-3} segundos. Encontrar la aceleración a y la distancia recorrida durante este periodo de 10^{-3} segundos.
3. **(Fechamiento con carbono radiactivo)** ¿Cuál sería el contenido de ${}_6C^{14}$ de un hueso del que se afirma tiene 2 000 años de antigüedad?
4. ¿Puede pensar el lector en un razonamiento muy corto para llegar a la respuesta del ejemplo 1 (prácticamente sin cálculos)? ¿Después de qué tiempo quedará 12.5% de ${}_6C^{14}$?
5. **Decaimiento exponencial, vida media)** ¿Qué porcentaje de una sustancia radiactiva seguirá estando presente en el tiempo $H/2$, donde H es la vida media de la sustancia? ¿En el tiempo $2H$?
6. **(Ley de enfriamiento de Newton)** Un termómetro, cuya lectura es de 10 °C, se lleva a una habitación cuya temperatura es de 18 °C. Un minuto después la lectura del termómetro es 14 °C. ¿Cuánto tiempo tomará para que la lectura sea prácticamente 18 °C, por ejemplo, 17.9 °C?
7. **(Evaporación)** Experimentos indican que una sustancia porosa húmeda a la intemperie pierde su humedad a una razón proporcional al contenido de humedad. Si una sábana tendida en el exterior pierde la mitad de su humedad durante la primera hora, ¿cuándo estará prácticamente seca, por ejemplo, cuando haya perdido 99.9% de su humedad, si las condiciones climáticas permanecen invariables?
8. **(Evaporación)** Suponer que una bola de naftalina pierde volumen por evaporación a una razón proporcional a su área instantánea. Si el diámetro de la bola disminuye de 2 a 1 cm en 3 meses, ¿en cuánto tiempo la bola será prácticamente inexistente, por ejemplo, cuando su diametro mida 1 mm?
9. **(Decaimiento exponencial) La ley de absorción de Lambert**[7] establece que la absorción de luz en una capa transparente muy delgada es proporcional al espesor de la capa y a la cantidad que incide sobre la misma. Formular la ley en términos de una ecuación diferencial y resolverla.
10. **(Ley de Torricelli)** En el ejemplo 3 se afirmó que la velocidad que adquiere un cuerpo en caída libre a partir del reposo al recorrer la altura h (sin resistencia del aire) es $\sqrt{2gh}$. Deducir este hecho.
11. Si el diámetro del orificio del ejemplo 3 se duplica y los datos restantes se mantienen sin cambios, ¿cuánto variará la respuesta?
12. **(Ley de Torricelli)** Suponer que el tanque del ejemplo 3 es semiesférico, de radio R, que inicialmente está lleno de agua y que en el fondo tiene una salida cuya sección transversal tiene un área de 5 cm². La salida se abre en cierto instante. Encontrar el tiempo que transcurre para vaciar el tanque (a) para cualquier R dado, (b) para $R = 1$ metro. *Sugerencia.* Puede usarse la fórmula (5) (¿por qué?), donde B es el área de la sección transversal del tanque en la altura $h(t)$, por lo que ahora B depende de h.

---

[7] JOHAN HEINRICH LAMBERT (1728-1777), físico y matemático alemán, conocido por sus aportaciones a la cartografía y la astronomía.

13. El tiempo requerido para vaciar el tanque del ejemplo 3 es mayor que el doble del tiempo transcurrido para que el tanque esté a la mitad. ¿Se entiende este hecho desde el punto de vista físico?

14. **(El paracaidista)** En el ejemplo 4, la velocidad del paracaidista disminuye. ¿Qué ocurre si la velocidad inicial es menor que k?

15. ¿A qué altura de la caída libre corresponde la velocidad límite (4.87 metros/segundo) en el ejemplo 4?

16. ¿De qué manera cambian la ecuación y la solución del ejemplo 4 si se supone que la resistencia del aire es proporcional a v (en lugar de a v^2), por ejemplo $U = \tilde{b}v$, donde se supone que $\tilde{b} = 7.3$ kg/s? ¿Continúa siendo verosímil este modelo?

17. **(Ley de Boyle-Mariotte para gases ideales[8])** Experimentos indican que para un gas a baja presión p (y temperatura constante), la razón de cambio del volumen $V(p)$ es igual a $-V/p$. Resolver la ecuación diferencial correspondiente.

18. **(Volante)** Un volante con momento de inercia I está girando con una velocidad angular constante ω_0 (radianes/segundo) relativamente pequeña. En algún instante, llámese $t = 0$, se interrumpe la energía y el movimiento empieza a desacelerarse debido a la fricción. Sea el momento de torsión de la fricción proporcional a $\sqrt{w}$, donde $\omega(t)$ es la velocidad angular. Aplicando la **segunda ley de Newton** (momento de inercia × aceleracción angular = momento de torsión), encontrar $\omega(t)$ y los tiempos t_1 en el que el volante gira con $\omega_0/2$ y t_2 cuando alcanza la posición de reposo.

19. **(Inversión del azúcar)** Experimentos indican que la razón de inversión del azúcar de caña en solución diluida es proporcional a la concentración $v(t)$ del azúcar no alterada. Sea la concentración 1/100 en $t = 0$ y 1/300 en $t = 4$ horas. Encontrar $v(t)$.

20. **(Cuerda)** Si se enrolla una cuerda alrededor de un cilindro corrugado que está fijo en el suelo, basta una fuerza pequeña en uno de los extremos para resistir una fuerza considerable en el otro extremo. Sea S la fuerza en la cuerda. Experimentos revelan que el cambio ΔS de S en un trozo pequeño de la cuerda es proporcional a S y al pequeño ángulo $\Delta\phi$ de la figura 9. Demostrar que la ecuación diferencial para S es $dS/d\phi = \mu S$. Si $\mu = 0.2$ radianes^{-1}, ¿cuántas vueltas de la cuerda deben enrollarse en el cilindro para que un hombre que sostenga uno de los extremos pueda resistir una fuerza mil veces mayor a la que él puede ejercer?

S
Pequeño trozo de cuerda
$\Delta\phi$
$S + \Delta S$

Figura 9. Problema 20.

* ROBERT BOYLE (1627-1691), físico y químico inglés, uno de los fundadores de la Royal Society: EDMÉ MARIOTTE (ca. 1620-1684), físico francés y prior de un monasterio próximo a Dijon.

1.4 REDUCCIÓN A LA FORMA SEPARABLE

OPCIONAL

Algunas ecuaciones diferenciales no son separables, aunque pueden pasarse a esta forma mediante un simple cambio de variables. Esto es válido para ecuaciones de la forma[9]

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

donde g es cualquier función dada de y/x, por ejemplo $(y/x)^3$, sen (y/x), etc. La forma de la ecuación sugiere que se haga

$$\frac{y}{x} = u.$$

Esta expresión se multiplica por x para obtener $y = xu$. La derivación de un producto da como resultado

$$y' = u + xu' \qquad \text{donde} \quad u' = \frac{du}{dx}. \tag{2}$$

Este es el primer miembro de (1) y el segundo es $g(y/x) = g(u)$. En conjunto,

$$u + xu' = g(u).$$

Ahora es posible separar las variables u y x, de donde

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Si se integran ambos miembros y en el resultado otra vez se sustituye u por y/x, se obtiene la solución general de (1), como se explica en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 Resolver

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0.$$

Solución. Al dividir entre x^2 se tiene

$$2\frac{y}{x}y' - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0.$$

Si se hace $u = y/x$ y se usa (2), la ecuación queda como

$$2u(u + u'x) - u^2 + 1 = 0, \qquad \text{por tanto} \qquad 2xuu' + u^2 + 1 = 0.$$

[9] Estas ecuaciones en ocasiones reciben el nombre de **ecuaciones homogéneas**. No usaremos esta terminología pues el término "homogéneo" se reserva para un objetivo de importancia mucho mayor (ver la sección 1.7).

Al separar las variables se encuentra

$$\frac{2u\,du}{1+u^2} = -\frac{dx}{x}.$$

Al integrar,

$$\ln(1+u^2) = -\ln|x| + c^*, \qquad \text{por tanto} \qquad 1+u^2 = \frac{c}{x}.$$

Al sustituir u por y/x, se obtiene finalmente la familia de circunferencias

$$x^2 + y^2 = cx, \qquad \text{por tanto} \qquad \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}.$$ ∎

EJEMPLO 2 Un problema con valor inicial

Resolver el problema con valor inicial

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3\cos(x^2)}{y}, \qquad y(\sqrt{\pi}) = 0.$$

Solución. Se establece $u = y/x$. Entonces $y = xu$, $y' = xu' + u$ y la ecuación queda como

$$xu' + u = u + \frac{2x^2\cos(x^2)}{u}.$$

Se hace la simplificación algebraica de la expresión y después se integra:

$$uu' = 2x\cos(x^2), \qquad \tfrac{1}{2}u^2 = \operatorname{sen}(x^2) + c.$$

Puesto que $u = y/x$, se obtiene

$$y = ux = x\sqrt{2\operatorname{sen}(x^2) + 2c}.$$

Puesto que sen $\pi = 0$, de la condición inicial se obtiene $c = 0$. Por tanto la respuesta es

$$y = x\sqrt{2\operatorname{sen}(x^2)}.$$ ∎

En ocasiones la forma de una ecuación diferencial dada sugiere otras sustituciones simples, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Resolver

(3) $$(2x - 4y + 5)y' + x - 2y + 3 = 0.$$

Solución. Se hace $x - 2y = v$. Entonces $y' = \frac{1}{2}(1 - v')$ y la ecuación adopta la forma

$$(2v + 5)v' = 4v + 11.$$

Al separar las variables e integrar se encuentra

$$\left(1 - \frac{1}{4v + 11}\right) dv = 2\,dx \qquad \text{y} \qquad v - \frac{1}{4}\ln|4v + 11| = 2x + c^*.$$

Puesto que $v = x - 2y$, esta expresión puede escribirse como

$$4x + 8y + \ln|4x - 8y + 11| = c. \qquad ∎$$

Otras sustituciones simples se ilustran en las ecuaciones de los problemas 17 al 27. Algunas de esas sustituciones pueden encontrarse de manera sistemática, como se demuestra en la referencia [A6], pp. 19–20, mencionada en el apéndice 1. En lugar de ocupar más tiempo en esta técnica de aplicabilidad limitada, en las secciones siguientes se abordarán métodos de solución mucho más fundamentales.

Problemas de la sección 1.4

Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones.

1. $xy' = x + y$

2. $xy' = 2x + 2y$

3. $xyy' = \frac{1}{2}(y^2 + x^2)$

4. $x^2y' = y^2 + 5xy + 4x^2$

5. $x^2y' = y^2 + xy + x^2$

6. $(xy' - y)\cos(2y/x) = -3x^4$

7. $x^2y' = y^2 + xy$

8. $xy' = x\sec(y/x) + y$

9. $y' = \dfrac{y + x}{y - x}$

10. $y' = \dfrac{y - x}{y + x}$

Resolver los siguientes problemas con valor inicial.

11. $xy' = x + y, \quad y(1) = -7.4$

12. $xyy' = 2y^2 + 4x^2, \quad y(2) = 4$

13. $xy' = y + x^5e^x/4y^3, \quad y(1) = 0$

14. $xy' = y^2 + y, \quad y(4) = 2$

15. $yy' = x^3 + y^2/x, \quad y(2) = 6$

16. $xy' = y + x^2\sec(y/x), \quad y(1) = \pi/2$

Utilizando la transformación indicada, encontrar la solución general.

17. $y' = (y + x)^2 \quad (y + x = v)$

18. $y' = \tan(x + y) - 1 \quad (x + y = v)$

19. $2x^2yy' = \tan(x^2y^2) - 2xy^2 \quad (x^2y^2 = z)$

20. $y' = (x + e^y - 1)e^{-y} \quad (x + e^y = w)$

21. $y' = \dfrac{y - x + 1}{y - x + 5} \quad (y - x = v)$

22. $y' = \dfrac{1 - 2y - 4x}{1 + y + 2x} \quad (y + 2x = v)$

23. Considerar $y' = f(ax + by + k)$, donde f es continua. Si $b = 0$, la solución es inmediata. (¿Por qué?) Si $b \neq 0$, demostrar que se obtiene una ecuación separable al usar $u(x) = ax + by + k$ como nueva variable dependiente.

Utilizando el problema 23, encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones.

24. $y' = (x + y - 7)^2$

25. $y' = 2y + 8x$

26. $y' = (6y - y^2 - 8)^{1/2}$ (*Sugerencia* $u = y - 3$)

27. $y' = (5y + 2)^4$

28. Encontrar la curva $y(x)$ que pasa por $(1, 1/2)$ y tal que en cada punto (x, y) la intersección de la tangente con el eje y es igual a $2xy^2$.

29. Demostrar que una recta que pasa por el origen interseca con el mismo ángulo a todas las curvas solución de una ecuación diferencial dada $y' = g(y/x)$.

30. Las posiciones de cuatro buques de guerra en el océano son tales que los barcos forman los vértices de un cuadrado de lado l. En algún instante todos los barcos disparan un misil que dirige su movimiento de manera constante hacia el misil que está a su derecha. Suponiendo que los cuatro misiles vuelan horizontalmente y con la misma velocidad, encontrar la trayectoria de cada uno de ellos.

1.5 ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Se recuerda del cálculo elemental que si una función $u(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas, su diferencial total o exacta es

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy.$$

A partir de lo anterior se sigue que si $u(x, y) = c = const$, entonces $du = 0$.

Por ejemplo, si $u = x + x^2y^3 = c$, entonces

$$du = (1 + 2xy^3)\, dx + 3x^2y^2\, dy = 0$$

o

$$y' = -\frac{1 + 2xy^3}{3x^2y^2},$$

ecuación diferencial que puede resolverse avanzando hacia atrás. Esta idea da lugar a un eficaz método para encontrar las soluciones, como sigue.

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

(1) $$\boxed{M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0}$$

se llama **exacta** si su primer miembro es la diferencial total o exacta

(2) $$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy$$

de alguna función $u(x, y)$. Entonces la ecuación diferencial (1) puede escribirse como

$$du = 0.$$

Al integrar se llega de inmediato a la solución general de (1) en la forma

(3) $$\boxed{u(x, y) = c.}$$

Al comparar (1) y (2), se observa que (1) es exacta si existe alguna función $u(x, y)$ tal que

$$(4) \qquad \text{(a)} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \qquad \text{(b)} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$$

Suponer que M y N están definidas y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región del plano xy cuya frontera es una curva cerrada que no se interseca a sí misma. Entonces por (4) (ver el apéndice 3.2 para la notación)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}.$$

Por el supuesto de continuidad, las dos derivadas de segundo orden son iguales. Por tanto,

$$\textbf{(5)} \qquad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.}$$

Esta condición no sólo es necesaria sino también suficiente[10] para que $M\,dx + N\,dy$ sea una diferencial exacta.

Si (1) es exacta, la función $u(x, y)$ puede encontrarse por conjeturación o de la siguiente manera sistemática. A partir de (4a) se tiene al integrar con respecto a x

$$\textbf{(6)} \qquad \boxed{u = \int M\, dx + k(y);}$$

en esta integración, y debe considerarse constante, y $k(y)$ desempeña el papel de una "constante" de integración. Para determinar $k(y)$, se encuentra la derivada parcial $\partial u/\partial y$ de (6), se usa (4b) para obtener dk/dy y se integra dk/dy para obtener k.

La fórmula (6) se obtuvo de (4a). En lugar de (4a) también puede usarse (4b). Entonces en vez de la fórmula (6) se obtiene primero

$$\textbf{(6*)} \qquad \boxed{u = \int N\, dy + l(x).}$$

Para determinar $l(x)$ se encuentra la derivada parcial $\partial u/\partial x$ de (6*), se usa (4a) para obtener dl/dx y se integra.

[10] Este hecho se demostrará más adelante (teorema 3 de la sección 9.2); la demostración también puede encontrarse en algunos libros de cálculo elemental; ver referencia [12] en el apéndice 1.

EJEMPLO 1 Una ecuación exacta

Resolver

$$(x^3 + 3xy^2)\,dx + (3x^2y + y^3)\,dy = 0. \tag{7}$$

Solución. Primer paso. Examinar si es exacta. La ecuación es de la forma (1) con

$$M = x^3 + 3xy^2, \qquad N = 3x^2y + y^3. \qquad \text{por tanto} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 6xy, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy.$$

Con base en estas expresiones y en (5), se observa que (7) es exacta.

Segundo paso. Solución implícita. De (6) se obtiene

$$u = \int M\,dx + k(y) = \int (x^3 + 3xy^2)\,dx + k(y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + k(y). \tag{8}$$

Para encontrar $k(y)$, se deriva esta fórmula con respecto a y y se usa la fórmula (4b), obteniéndose

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y + \frac{dk}{dy} = N = 3x^2y + y^3.$$

Por tanto, $dk/dy = y^3$, de donde $k = (y^4/4) + \tilde{c}$. Al sustituir este valor en (8) se obtiene la respuesta

$$u(x, y) = \tfrac{1}{4}(x^4 + 6x^2y^2 + y^4) = c. \tag{9}$$

Tercer paso. Comprobación. ***¡ATENCIÓN!*** Es necesario tener muy presente que este método da la solución en la forma implícita $u(x, y) = c =$ *constante*, no en la forma explícita, $y = f(x)$. Para ***hacer la comprobación***, puede derivarse $u(x, y) = c$ implícitamente y ver si esto lleva a $dy/dx = -M/N$ o a $M\,dx + N\,dy = 0$, la ecuación dada.

En el caso presente, al derivar (9) implícitamente con respecto a x, se obtiene

$$\tfrac{1}{4}(4x^3 + 12xy^2 + 12x^2yy' + 4y^3y') = 0.$$

Al agrupar los términos, se observa que esta expresión es igual a $M + Ny' = 0$, con M y N como en (7); por tanto $M\,dx + N\,dy = 0$. Se termina así la comprobación. ∎

EJEMPLO 2 Un problema con valor inicial

Resolver el problema con valor inicial

$$(\operatorname{sen} x \cosh y)\,dx - (\cos x \operatorname{senh} y)\,dy = 0, \quad y(0) = 0. \tag{10}$$

Solución. El estudiante puede comprobar que la ecuación es exacta. De (6) se obtiene

$$u = \int \operatorname{sen} x \cosh y\,dx + k(y) = -\cos x \cosh y + k(y).$$

A partir de esta expresión, $\partial u/\partial y = -\cos x \operatorname{senh} y + dk/dy$. Por tanto, $dk/dy = 0$, y $k = const.$ La solución general es $u = const$, es decir, $\cos x \cosh y = c$. La condición inicial da $\cos 0 \cosh 0 = 1 = c$. En consecuencia, la respuesta es $\cos x \cosh y = 1$.

Comprobación. $(\cos x \cosh y)' = -\operatorname{sen} x \cosh y + \cos x\,(\operatorname{senh} y)y' = 0$, de donde se obtiene (10). Asimismo, $\cos 0 \cosh 0 = 1$ indica que la respuesta satisface la condición inicial. ∎

EJEMPLO 3 ¡ATENCIÓN! El método no funciona cuando la ecuación no es exacta

Considérese la ecuación

$$y\,dx - x\,dy = 0.$$

Se observa que $M = y$, $N = -x$, de donde $\partial M/\partial y = 1$ pero $\partial N/\partial x = -1$. Por tanto, la ecuación no es exacta. En seguida se demostrará que en tal caso, el método no funciona. A partir de (6),

$$u = \int M\,dx + k(y) = xy + k(y).$$

De esta expresión,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + k'(y).$$

Esta expresión debería ser igual a $N = -x$. Pero es imposible, ya que $k(y)$ únicamente puede depender de y. Pruébese (6*): tampoco funcionará. Resolver la ecuación utilizando otro método que se haya discutido. ∎

Problemas de la sección 1.5

Dada $u(x, y)$, encontrar la ecuación diferencial exacta $du = 0$. ¿Qué clase de curvas son las soluciones $u(x, y) = const$?

1. $x^2 + y^2 = c$
2. $u = y/x^2$
3. $u = (x - a)(b - y)$
4. $u = \cos(x^2 - y^2)$
5. $u = \exp(xy^2)$
6. $u = \operatorname{sen} xy$
7. $u = \ln(x^2y^2)$
8. $u = \tan(x^2 + 4y^2)$
9. $u = (y - x + 1)^2$
10. $u = \cosh(x^3 - y^2)$

Demostrar que las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y resolverlas.

11. $y\,dx + x\,dy = 0$
12. $x\,dx + 9y\,dy = 0$
13. $y^3\,dx + 3xy^2\,dy = 0$
14. $ye^x\,dx + [e^x + (y + 1)e^y]\,dy = 0$
15. $e^{-\theta}\,dr - re^{-\theta}\,d\theta = 0$
16. $\frac{1}{4}e^{4\theta}\,dr + re^{4\theta}\,d\theta = 0$
17. $\cosh x \cos y\,dx = \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y\,dy$
18. $e^x(\cos y\,dx - \operatorname{sen} y\,dy) = 0$
19. $(2x + e^y)\,dx + xe^y\,dy = 0$
20. $(\cot y + x^2)\,dx = x \operatorname{cosec}^2 y\,dy$

¿Las siguientes ecuaciones son exactas? Resolver los problemas con valor inicial.

21. $x\,dy + y^2\,dx = 0, \quad y(1) = 0.2$
22. $4\,dx + x^{-1}\,dy = 0, \quad y(1) = -8$
23. $(y - 1)\,dx + (x - 3)\,dy = 0, \quad y(0) = 2/3$
24. $(x - 1)\,dx + (y + 1)\,dy = 0, \quad y(1) = 0$
25. $e^{y/x}(-y\,dx + x\,dy)/x^2 = 0, \quad y(-2) = -2$
26. $(2xy\,dx + dy)e^{x^2} = 0, \quad y(0) = 2$
27. $2xy\,dy = (x^2 + y^2)\,dx, \quad y(1) = 2$
28. $\cos \pi x \cos 2\pi y\,dx = 2 \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} 2\pi y\,dy, \quad y(3/2) = 1/2$
29. $\operatorname{senh} x\,dx + y^{-1} \cosh x\,dy = 0, \quad y(0) = \pi$
30. $2 \operatorname{sen} \omega y\,dx + \omega \cos \omega y\,dy = 0, \quad y(0) = \pi/2\omega$

31. Resolver la ecuación del ejemplo 3.

32. Si una ecuación es separable, demostrar que es exacta. ¿El recíproco es verdadero?

33. ¿Bajo qué condiciones $(ax + by)\,dx + (kx + ly)\,dy = 0$ es exacta? (Aquí, a, b, k, l son constantes.) Resolver la ecuación exacta.

34. ¿Bajo qué condiciones $[f(x) + g(y)]\,dx + [h(x) + p(y)]\,dy = 0$ es exacta?

35. ¿Bajo qué condiciones $f(x, y)\,dx + g(x)h(y)\,dy = 0$ es exacta?

Para ver que en ocasiones una ecuación diferencial puede resolverse por varios métodos, resolver (a) usando el método tratado, (b) por separación o inspección:

36. $xy' + y + 4 = 0$

37. $2x\,dx + x^{-2}(x\,dy - y\,dx) = 0$

38. $b^2x\,dx + a^2y\,dy = 0$

39. $3x^{-4}y\,dx = x^{-3}\,dy$

40. ¿Puede el lector decir cuál es la representación gráfica de las curvas solución del ejemplo 1? *Sugerencia.* Hacer $x = s + t$, $y = s - t$.

1.6 FACTORES INTEGRANTES

La idea del método tratado en esta sección es muy simple. En ocasiones se tiene una ecuación

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

que no es exacta, pero que si se multiplica por una función $F(x, y)$ adecuada, la nueva ecuación

$$FP\,dx + FQ\,dy = 0 \tag{2}$$

es exacta, de modo que puede resolverse por el método de la sección 1.5. La función $F(x, y)$ se llama entonces **factor integrante** de (1).

Se consideran primero algunos ejemplos sencillos y luego se verá cómo pueden obtenerse factores integrantes en una forma sistemática.

EJEMPLO 1 Factores integrantes

Demostrar que la ecuación diferencial

$$y\,dx - x\,dy = 0 \tag{3}$$

no es exacta, pero que tiene un factor integrante, a saber, $F = 1/x^2$, y resolver la nueva ecuación.

Solución. La ecuación es de la forma (1) con $P = y$ y $Q = -x$. Puesto que $\partial P/\partial y = 1$ pero $\partial Q/\partial x = -1$, no es exacta. Al multiplicarla por $F = 1/x^2$, se obtiene la ecuación exacta (¡comprobar la exactitud!)

$$FP\,dx + FQ\,dy = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} = -d\left(\frac{y}{x}\right) = 0. \qquad \text{Solución} \qquad \frac{y}{x} = c.$$

Se trata de las rectas $y = cx$ que pasan por el origen.

Otros factores integrantes de (3) son $1/y^2$, $1/xy$, $1/(x^2 + y^2)$, ya que

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right), \quad \frac{y\,dx - x\,dy}{xy} = d\left(\ln\frac{x}{y}\right), \quad \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = -d\left(\arctan\frac{y}{x}\right). \tag{4}$$

■

EJEMPLO 2 Factor integrantes

Comprobar que $F(x) = x^3$ es un factor integrante de

$$2 \operatorname{sen}(y^2)\, dx + xy \cos(y^2)\, dy = 0$$

y encontrar después la solución general.

Solución. Al multiplicar por $F = x^3$ se obtiene la nueva ecuación

$$2x^3 \operatorname{sen}(y^2)\, dx + x^4 y \cos(y^2)\, dy = 0.$$

Esta ecuación es exacta porque

$$\frac{\partial}{\partial y}[2x^3 \operatorname{sen}(y^2)] = 4x^3 y \cos(y^2) = \frac{\partial}{\partial x}[x^4 y \cos(y^2)].$$

Se resuelve por el método de la sección 1.5 (o por inspección) para obtener $x^4 \operatorname{sen}(y^2) = c = const.$

Comprobación. Comprobar la solución derivándola implícitamente con respecto a x. ∎

Cómo encontrar factores integrantes

En los casos más sencillos, los factores integrantes pueden encontrarse por inspección o quizás después de algunas pruebas [teniendo presente la expresión (4)]. En el caso general, la idea es esta: la ecuación (2) es $M\,dx + N\,dy = 0$, con $M = FP$, $N = FQ$, y es exacta por la definición de factor integrante. En consecuencia el criterio de exactitud $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ (ecuación (5) de la sección 1.5) es ahora

$$\frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ), \tag{5}$$

es decir, $F_y P + FP_y = F_x Q + FQ_x$ (los subíndices denotan derivadas parciales). En el caso general, esto resultaría complicado e inoperante. Se seguirá entonces la ***regla de oro:*** Si no puede resolverse un problema, intentar resolver uno más sencillo —el resultado puede ser de utilidad (y también puede ayudar más adelante). En consecuencia, se busca un factor integrante que dependa de ***una*** sola variable; por fortuna, en muchos casos prácticos existen estos factores, como se verá a continuación. Por tanto, sea $F = F(x)$. Entonces $F_y = 0$ y $F_x = F' = dF/dx$, de donde (5) queda como

$$FP_y = F'Q + FQ_x.$$

Al dividir entre FQ y reordenar los términos, se tiene

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right). \tag{6}$$

Con esto se demuestra el

Teorema 1 [Factor integrante $F(x)$]

Si (1) es tal que el segundo miembro de (6), llámese R, sólo depende de x, entonces (1) tiene un factor integrante $F = F(x)$, el cual se obtiene integrando (6) y tomando exponentes en ambos miembros,

$$F(x) = \exp \int R(x)\, dx. \tag{7}$$

De manera similar, si $F = F(y)$, entonces en lugar de (6) se obtiene

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{8}$$

que tiene el correspondiente

Teorema 2 [Factor integrante $F(y)$]

Si (1) es tal que el segundo miembro $\tilde{R}$ de (8) sólo depende de y, entonces (1) tiene un factor integrante $F = F(y)$, el cual se obtiene de (8) en la forma

$$F(y) = \exp \int \tilde{R}(y)\, dy. \tag{9}$$

EJEMPLO 3 Factor integrante $F(x)$

Resolver el ejemplo 2 aplicando el teorema 1

Solución. Se tiene $P = 2 \operatorname{sen}(y^2)$, $Q = xy \cos(y^2)$, por tanto, en el segundo miembro de (6)

$$R = \frac{1}{xy\cos(y^2)}[4y\cos(y^2) - y\cos(y^2)] = \frac{3}{x}$$

y por tanto $F(x) = \exp \int (3/x)\, dx = x^3$, como en el ejemplo 2, etcétera. ∎

EJEMPLO 4 Aplicación de los teoremas 1 y 2

Resolver el problema con valor inicial

$$2xy\, dx + (4y + 3x^2)\, dy = 0, \qquad y(0.2) = -1.5.$$

Solución. Aquí, $P = 2xy$, $Q = 4y + 3x^2$, la ecuación no es exacta, el segundo miembro de (6) depende *tanto* de x *como* de y (¡verificarlo!), pero el segundo miembro de (8) es

$$\tilde{R} = \frac{1}{2xy}(6x - 2x) = \frac{2}{y}. \qquad \text{Por tanto} \qquad F(y) = y^2$$

es un factor integrante por (9). Al multiplicar por y^2 se obtiene la ecuación exacta

$$2xy^3\, dx + (4y^3 + 3x^2y^2)\, dy = 0,$$

que puede escribirse como

$$4y^3\, dy + (2xy^3\, dx + 3x^2y^2\, dy) = 0$$

y se resuelve por inspección del método de la sección 1.5 para obtener $y^4 + x^2y^3 = c$; de esta expresión se obtiene $y^4 + x^2y^3 = 4.9275$ por la condición inicial. ∎

Problemas de la sección 1.6

1. Comprobar (4).
2. Comprobar la exactitud en el ejemplo 1 usando la prueba usual.
3. Comprobar la solución del ejemplo 2, según se indica.
4. Dar los detalles de la deducción de (8).
5. Comprobar que el teorema 1 no puede usarse para resolver el ejemplo 4.
6. Comprobar que y, xy^3 y x^2y^5 son factores integrantes de $y\,dx + 2x\,dy = 0$ y resolverla.

Verificar que la función F dada es un factor integrante y resolver el problema con valor inicial:

7. $2y\,dx + x\,dy = 0,\quad y(0.5) = 8,\quad F = x$
8. $3y\,dx + 2x\,dy = 0,\quad y(-1) = 1.4,\quad F = x^2y$
9. $(1 + xy)\,dx + x^2\,dy = 0,\quad y(1) = 0,\quad F = e^{xy}$
10. $dx + (x + y + 1)\,dy = 0,\quad y(2.5) = 0.5,\quad F = e^y$
11. $(2x^{-1}y - 3)\,dx + (3 - 2y^{-1}x)\,dy = 0,\quad y(1) = -1,\quad F = x^2y^2$
12. $y\,dx + [y + \tan(x + y)]\,dy = 0,\quad y(0) = \pi/2,\quad F = \cos(x + y)$
13. $y\,dx + [\coth(x - y) - y]\,dy = 0,\quad y(3) = 3,\quad F = \operatorname{senh}(x - y)$
14. $(2xe^x - y^2)\,dx + 2y\,dy = 0,\quad y(0) = \sqrt{2},\quad F = e^{-x}$

Encontrar un factor integrante F para las siguientes ecuaciones y resolverlas (por inspección o usando los teoremas 1 y 2):

15. $2\cos\pi y\,dx = \pi\operatorname{sen}\pi y\,dy$
16. $y\cos x\,dx + 3\operatorname{sen} x\,dy = 0$
17. $(2y + xy)\,dx + 2x\,dy = 0$
18. $2y\,dx + 3x\,dy = 0$
19. $(1 + 2x^2 + 4xy)\,dx + 2\,dy = 0$
20. $2x\,dx = [3y^2 + (x^2 - y^3)\tan y]\,dy$
21. $(y + 1)\,dx - (x + 1)\,dy = 0$
22. $5\,dx - e^{y-x}\,dy = 0$
23. $ay\,dx + bx\,dy = 0$
24. $(3xe^y + 2y)\,dx + (x^2e^y + x)\,dy = 0$

En cada caso, encontrar las condiciones para que F sea un factor integrante de (1). *Sugerencia.* Suponer que $F(P\,dx + Q\,dy) = 0$ es exacta y aplicar la ecuación (5) de la sección 1.5.

25. $F = x^a$
26. $F = y^b$
27. $F = x^ay^b$
28. $F = e^y$

29. Utilizando el problema 27, deducir el factor integrante del problema 11.
30. **(Comprobación)** Siempre es importante comprobar las soluciones. En relación con el método presente, resulta particularmente esencial ya que quizás sea necesario excluir la función $y(x)$ dada por $F(x, y) = 0$. Para ver este hecho, considérese $(xy)^{-1}\,dy - x^{-2}\,dx = 0$; demostrar que un factor integrante es $F = y$ y que lleva a $d(y/x) = 0$, por tanto $y = cx$, donde c es arbitraria, pero $F = y = 0$ no es una solución de la ecuación original.

1.7 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden es **lineal** si puede escribirse como

$$y' + p(x)y = r(x). \tag{1}$$

El rasgo característico de esta ecuación es que es lineal en y y y', en tanto que p y r pueden ser *cualesquiera* funciones de x dadas.

Si el segundo miembro $r(x)$ es cero para toda x en el intervalo en el que se considera la ecuación (se escribe $r(x) \equiv 0$), se dice que la ecuación es **homogénea;** de no ser así, se dice que es **no homogénea.**

Se encontrará ahora una fórmula para la solución general de (1) en algún intervalo I, suponiendo que p y r son continuas en I. Para la ecuación homogénea

$$y' = p(x)y = 0 \tag{2}$$

esto es muy sencillo. De hecho, al separar las variables se tiene

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx, \quad \text{por tanto} \quad \ln|y| = -\int p(x)\,dx + c^*$$

y al tomar exponentes en ambos miembros

$$\boxed{y(x) = ce^{-\int p(x)\,dx}} \qquad (c = \pm e^{c^*} \text{ cuando } y \gtrless 0); \tag{3}$$

en este caso también puede tomarse $c = 0$ y obtener la *solución trivial* $y \equiv 0$.

La ecuación no homogénea (1) se resolverá a continuación. Resulta que posee la grata propiedad de tener un factor integrante que sólo depende de x. De hecho (1) se escribe primero como

$$(py - r)\,dx + dy = 0.$$

Esta expresión es $P\,dx + Q\,dy = 0$, donde $P = py - r$ y $Q = 1$. Por tanto, la ecuación (6) de la sección 1.6 se reduce a

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = p(x).$$

Puesto que sólo depende de x, la ecuación (1) tiene un factor integrante $F(x)$, que se obtiene directamente por integración y tomando exponentes [como en (7), sección 1.6]:

$$F(x) = e^{\int p\,dx}.$$

Al multiplicar (1) por esta F y aplicando la regla para derivar un producto, se obtiene

$$e^{\int p\,dx}(y' + py) = (e^{\int p\,dx}y)' = e^{\int p\,dx}r.$$

Ahora se integra con respecto a x,

$$e^{\int p\,dx}y = \int e^{\int p\,dx}r\,dx + c$$

y se despeja y, abreviando $\int p\,dx$ por h,

$$(4) \qquad y(x) = e^{-h}\left[\int e^{h} r\,dx + c\right], \qquad h = \int p(x)\,dx.$$

Esto representa la solución general de (1) en la forma de una integral.[11] (No importa la elección del valor de la constante de integración en $\int p\,dx$; ver el problema 2.)

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación diferencial lineal

$$y' - y = e^{2x}.$$

Solución. En este caso,

$$p = -1, \qquad r = e^{2x}, \qquad h = \int p\,dx = -x$$

y de (4) se obtiene la solución general

$$y(x) = e^{x}\left[\int e^{-x}e^{2x}\,dx + c\right] = e^{x}[e^{x} + c] = ce^{x} + e^{2x}.$$

De manera alternativa, la ecuación dada puede multiplicarse por $e^{h} = e^{-x}$, encontrándose

$$(y' - y)e^{-x} = (ye^{-x})' = e^{2x}e^{-x} = e^{x}$$

y se integran ambos miembros, obteniéndose el mismo resultado que antes:

$$ye^{-x} = e^{x} + c, \qquad \text{Por tanto} \qquad y = e^{2x} + ce^{x}.$$

∎

EJEMPLO 2 Problema de mezcla

El tanque de la figura 10 contiene 200 galones de agua en los que están disueltas 40 lb de sal. Al tanque entran 5 galones de salmuera por minuto, cada uno de los cuales contiene 2 lb de sal disuelta, y la mezcla, cuya uniformidad se mantiene agitándola, sale a la misma razón. Encontrar la cantidad de sal $y(t)$ que hay en el tanque en cualquier tiempo t.

Solución. Primer paso. Modelado. La razón de cambio con el tiempo $y' = dy/dt$ de $y(t)$ es igual al flujo de entrada $5 \times 2 = 10$ [lb/min] de sal menos el flujo de salida. El flujo de salida [lb/min] es $(5/200) \times y(t) = 0.025y(t)$ ya que $y(t)$ es la cantidad total de sal que hay en el tanque y 5 gal/200 gal es la fracción del volumen que sale por minuto. De manera alternativa, $y(t)$ es la cantidad total de sal, en consecuencia $y(t)/200$ es la cantidad de sal por galón, y salen 5 gal/min. Por tanto, el modelo es $y' = 10 - 0.0025y$, es decir, el problema con valor inicial

$$y' + 0.025y = 10, \qquad y(0) = 40.$$

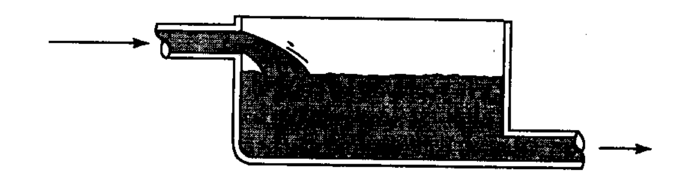


Figura 10. Tanque en el ejemplo 2.

[11] Si la integral no puede integrarse usando los métodos convencionales de cálculo (como ocurre con frecuencia en la práctica), quizás tenga que usarse un método numérico para integrales (sección 18.5) o para la propia ecuación diferencial (secciones 20.1, 20.2).

Segundo paso. Solución de la ecuación. En (4), con t en lugar de x, se tiene $p = 0.025$, $h = 0.025t$, $r = 10$ y se llega a la solución general

$$y(t) = e^{-0.025t}\left[\int e^{0.025t}\cdot 10\,dt + c\right]$$
$$= e^{-0.025t}\left[\frac{10}{0.025}e^{0.025t} + c\right]$$
$$= ce^{-0.025t} + 400.$$

De la condición inicial $y(0) = c + 400 = 40$ se obtiene $c = -360$ y como respuesta la solución particular

$$y(t) = 400 - 360e^{-0.025t}\ [\text{lb}].$$

Se observa que la cantidad de sal que hay en el tanque aumenta de manera monótona. ¿Puede el lector explicar esto físicamente? ∎

Desde luego, quizás la ecuación (4) no sea necesaria en casos simples como los ejemplos 1 y 2, pero resultará de utilidad en ecuaciones más complicadas.

EJEMPLO 3 Resolver

$$y' + 2y = e^x(3\ \text{sen}\,2x + 2\cos 2x).$$

Solución. Aquí $p = 2$, $h = 2x$, de donde por (4) se obtiene

$$y = e^{-2x}\left[\int e^{2x}e^x(3\ \text{sen}\,2x + 2\cos 2x)\,dx + c\right]$$
$$= e^{-2x}[e^{3x}\ \text{sen}\,2x + c]$$
$$= ce^{-2x} + e^x\ \text{sen}\,2x.$$ ∎

EJEMPLO 4 Problema con valor inicial

Resolver el problema con valor inicial

$$y' + y\tan x = \text{sen}\,2x, \qquad y(0) = 1.$$

Solución. Aquí $p = \tan x$, $r = \text{sen}\,2x = 2\ \text{sen}\,x\cos x$, y

$$\int p\,dx = \int \tan x\,dx = \ln|\sec x|.$$

De lo anterior se ve que en (4),

$$e^h = \sec x, \qquad e^{-h} = \cos x, \qquad e^h r = (\sec x)(2\ \text{sen}\,x\cos x) = 2\ \text{sen}\,x,$$

y la solución general de la ecuación en cuestión es

$$y(x) = \cos x\left[2\int \text{sen}\,x\,dx + c\right] = c\cos x - 2\cos^2 x.$$

A partir de esta expresión y de la condición inicial, $1 = c\cdot 1 - 2\cdot 1^2$, de donde $c = 3$ y la solución del problema con valor inicial es

$$y = 3\cos x - 2\cos^2 x.$$ ∎

Reducción a la forma lineal. Ecuación de Bernoulli

Algunas ecuaciones diferenciales no lineales pueden reducirse a la forma lineal, como se ilustrará en los problemas de la sección. La ecuación prácticamente más famosa de éstas es la ***ecuación de Bernoulli***[12] (ver también los problemas 37, 38, etc.)

(5) $$\boxed{y' + p(x)y = g(x)y^a}$$ (a cualquier número real).

Si $a = 0$ o $a = 1$, la ecuación es lineal. En caso contrario, es no lineal. Entonces se hace

$$u(x) = [y(x)]^{1-a}.$$

Se deriva esta expresión y se sustituye y' de (5), obteniéndose

$$u' = (1 - a)y^{-a}y' = (1 - a)y^{-a}(gy^a - py)$$
$$= (1 - a)(g - py^{1-a}),$$

donde $y^{1-a} = u$ en el segundo miembro, de donde se llega a la ecuación lineal

(6) $$u' + (1 - a)pu = (1 - a)g.$$

EJEMPLO 5 Ecuación de Bernoulli. Ecuación de Verhulst. Modelo logístico de población

Revolver la ecuación especial de Bernoulli, llamada **ecuación de Verhulst:**

(7) $$y' - Ay = -By^2$$ (A, B positive constants).

Solución. Aquí, $a = 2$, de donde $u = y^{-1}$, y al derivar y hacer la sustitución de y' en (7),

$$u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}(-By^2 + Ay) = B - Ay^{-1},$$

es decir,

$$u' + Au = B.$$

De (4) con $p = A$, de donde $h = Ax$, y $r = B$, se obtiene

$$u = e^{-Ax}\left[\int Be^{Ax}\,dx + c\right] = e^{-Ax}\left[\frac{B}{A}e^{Ax} + c\right] = ce^{-Ax} + \frac{B}{A}.$$

Se obtiene así la solución general de (7),

(8) $$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{(B/A) + ce^{-Ax}},$$

y de (7) puede verse directamente que $y \equiv 0$ también es una solución.

---

[12] JAKOB BERNOULLI (1654-1705), matemático suizo, profesor en Basilea, conocido también por sus contribuciones en la teoría de la elasticidad y la probabilidad matemática. Leibniz descubrió en 1696 el método para resolver la ecuación de Bernoulli. Entre los alumnos de Jakob Bernoulli se encontraba su sobrino NIKLAUS BERNOULLI (1687-1759), quien realizó aportaciones a la teoría de la probabilidad y las series infinitas, y su hermano menor JOHANN BERNOULLI (1667-1748), quien ejerció una profunda influencia en el desarrollo del cálculo, fue el sucesor de Jakob en Basilea y tuvo entre sus alumnos a GABRIEL CRAMER (ver la sección 7.9) y a LEONHARD EULER (ver la sección 2.6). Su hijo DANIEL BERNOULLI (1700-1782) es conocido por su trabajo básico en la dinámica de fluidos y en la teoría cinética de los gases.

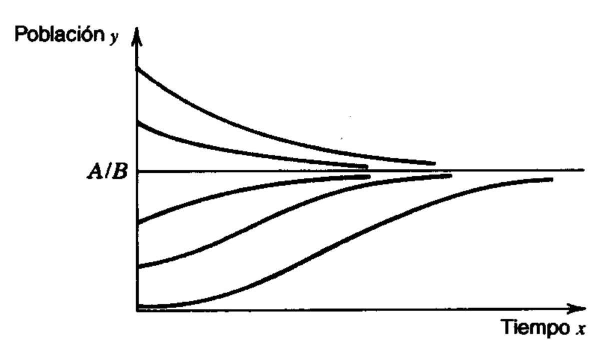


Figura 11. Modelo logístico de población. Curvas (8) del ejemplo 5.

A la ecuación (8) se le llama **ley logística** del crecimiento poblacional, donde x es el tiempo. Para $B = 0$ da el crecimiento exponencial $y = (1/c)e^{Ax}$ (**ley de Malthus**, problema 27, sección 1.1). En la expresión (7), $-By^2$ es un "término de freno", para impedir que la población crezca de manera indefinida. De hecho, (8) indica que las poblaciones inicialmente pequeñas $[0 < y(0) < A/B]$ aumentan monótonamente hasta A/B, en tanto que las poblaciones inicialmente grandes $[y(0) > A/B]$ disminuyen monótonamente al mismo límite A/B (figura 11).

La ley logística tiene aplicaciones útiles en las poblaciones humanas (ver el problema 54) y animales (ver C.W. Clark, *Mathematical Bioeconomics*, Nueva York, Wiley, 1976).

Entrada y salida

Las ecuaciones diferenciales (1) tienen múltiples aplicaciones, como se ilustrará en los problemas de la sección así como en la siguiente sección. La variable independiente x con frecuencia será el tiempo; la función $r(x)$ del segundo miembro de (1) puede representar una fuerza, y la solución $y(x)$ un desplazamiento, una corriente eléctrica u otra cantidad física variable. En las matemáticas para ingeniería, es común llamar a $r(x)$ la **entrada** y a $y(x)$ la **salida** o *respuesta a la entrada* (y a las condiciones iniciales). Por ejemplo, en ingeniería eléctrica la ecuación diferencial puede gobernar el comportamiento de un circuito eléctrico y la salida $y(x)$ se obtiene como la solución de la ecuación correspondiente a la entrada $r(x)$. Esta idea se discutirá en términos de ejemplos típicos en la siguiente sección (y para ecuaciones de segundo orden en las secciones 2.5, 2.11, 2.12).

Problemas de la sección 1.7

1. Demostrar que $e^{-\ln x} = 1/x$ (pero no $-x$) y que $e^{-\ln(\sec x)} = \cos x$.
2. Demostrar que no importa el valor que se elija para la constante de integración en $\int p\,dx$ [ver (4)] (por lo que puede tomarse como cero).
3. ¿Cuál es el límite de $y(t)$ cuando $t \to \infty$ en el ejemplo 2? ¿Es razonable físicamente?

Encontrar las soluciones generales de las siguientes ecuaciones diferenciales.

4. $y' + y = 5$ **5.** $y' - 4y = 0.8$ **6.** $y' + 2xy = 0$
7. $y' + 2y = 6e^x$ **8.** $y' - 2y = 2 - 4x$ **9.** $y' - 4y = 2x - 4x^2$
10. $y' = (y - 1)\cot x$ **11.** $xy' + 2y = 9x$ **12.** $y' \tan x = 2y$
13. $y' + 3y = e^{-3x}$ **14.** $y' + 2y = \cos x$ **15.** $xy' + 2y = 4e^{x^2}$
16. $(x^2 - 1)y' = xy$ **17.** $xy' - 2y = x^3e^x$ **18.** $x^2y' + 2xy = \operatorname{senh} 3x$

Resolver los siguientes problemas con valor inicial.

19. $y' + 3y = 12, \quad y(0) = 6$

20. $y' = y \cot x, \quad y(\frac{1}{2}\pi) = 2$

21. $y' + y = (x + 1)^2, \quad y(0) = 3$

22. $y' + x^3y = 4x^3, \quad y(0) = -1$

23. $y' + 2xy = 4x, \quad y(0) = 3$

24. $xy' = (1 + x)y, \quad y(1) = 3e$

25. $y' \coth 2x = 2y - 2, \quad y(0) = 0$

26. $y' = 2y/x + x^2e^x, \quad y(2) = 0$

27. $y' + ky = e^{-kx}, \quad y(0) = 0.7$

28. $y' + 3x^2y = xe^{-x^3}, \quad y(0) = -1$

Propiedades generales de las ecuaciones diferenciales lineales. Las ecuaciones diferenciales *lineales* (1) y (2) tienen ciertas propiedades importantes. En los dos capítulos siguientes se verá que puede decirse lo mismo de las ecuaciones diferenciales *lineales* de órdenes superiores. Este hecho es muy importante ya que puede usarse para obtener nuevas soluciones a partir de soluciones dadas. De hecho, demostrar e ilustrar con un ejemplo que la **ecuación homogénea** (2) posee las siguientes propiedades.

29. $y \equiv 0$ es una solución de (2), llamada la ***solución trivial***.

30. Si y_1 es una solución de (2), entonces $y = cy_1$ (con c una constante cualquiera) es una solución de (2).

31. Si y_1 y y_2 son soluciones de (2), entonces su suma $y = y_1 + y_2$ es una solución de (2).

Demostrar e ilustrar con un ejemplo que la **ecuación no homogénea** (1) posee las siguientes propiedades.

32. Si y_1 es una solución de (1) y y_2 es una solución de (2), entonces $y = y_1 + y_2$ es una solución de (1).

33. La diferencia $y = y_1 - y_2$ de dos soluciones y_1 y y_2 de (1) es una solución de (2).

34. Si y_1 es una solución de (1), entonces $y = cy_1$ es una solución de $y' + py = cr$.

35. Si y_1 es una solución de $y_1' + py_1 = r_1$ y y_2 es una solución de $y_2' + py_2 = r_2$ (con la misma p), entonces $y = y_1 + y_2$ es una solución de $y' + py = r_1 + r_2$.

36. Si $p(x)$ y $r(x)$ en (1) son constantes, por ejemplo, $p(x) = p_0$ y $r(x) = r_0$, entonces (1) puede resolverse por separación de variables y el resultado concordará con el obtenido por (4).

Reducción de ecuaciones diferenciales no lineales a la forma lineal. Aplicando transformaciones de variables adecuadas, hacer la reducción a la forma lineal y resolver las siguientes ecuaciones. *Sugerencia.* Algunas son ecuaciones de Bernoulli; algunas se hacen lineales si se toma y como variable independiente y x como la función desconocida.

37. $y' + y = y^2$

38. $y' + y = x/y$

39. $y' \cos y + x \operatorname{sen} y = 2x \quad (\operatorname{sen} y = z)$

40. $y' - 1 = e^{-y} \operatorname{sen} x$

41. $(e^y + x)y' = 1$

42. $y'(\operatorname{senh} 3y - 2xy) = y^2$

43. $3y' + y = (1 - 2x)y^4$

44. $2xy' = 10x^3y^5 + y$

45. $2xyy' + (x - 1)y^2 = x^2e^x$

46. $y' \cos y + 2x \operatorname{sen} y = 2x$

Algunas aplicaciones (más en la siguiente sección)

47. ¿En cuánto tiempo la función $y(t)$ del ejemplo 2 habrá llegado prácticamente al límite, por ejemplo, al valor 399.9 lb? Empezar con una conjetura.

48. Demostrar que si en el ejemplo 2 se duplica el flujo de entrada (pero sin hacer más cambios), el modelo es $y' = 20 - [5/(200 + 5t)]y$, $y(0) = 40$. Resolver este problema con valor inicial.

49. Si en el ejemplo 2 la salmuera que entra se sustituye después de 10 minutos por agua pura (fluyendo también a razón de 5 gal/min), ¿cuánto tiempo se necesitará para que el tanque

esté prácticamente libre de sal, por ejemplo, para disminuir $y(t)$ a 0.01 lb? Empezar con una conjetura.

50. **(Movimiento de un bote)** Dos personas viajan en un bote de motor, siendo el peso combinado de las personas y el bote de 4 900 N (unas 1 100 lb). Suponer que el motor ejerce una fuerza constante de 200 N (unas 45 lb) y que la resistencia R del agua es proporcional a la velocidad v, por ejemplo, $R = kv$ N, donde $k = 10$ N · segundo/metro. Plantear la ecuación diferencial para $v(t)$ utilizando la segunda ley de Newton,

$$\text{Masa} \times \text{Aceleración} = \text{Fuerza}.$$

Encontrar $v(t)$ que satisfaga $v(0) = 0$. Encontrar la velocidad máxima v_∞ a la que viajará el bote (prácticamente después de un tiempo suficientemente largo). Si el bote empieza a moverse a partir del reposo, ¿en cuánto tiempo alcanzará $0.9v_\infty$ y qué distancia habrá recorrido durante ese tiempo?

51. **(Ley de enfriamiento de Newton)** Resolver la ecuación diferencial del ejemplo 2 de la sección 1.3 aplicando el método tratado en esta sección, suponiendo que la temperatura inicial de la bola es $T(0) = T_0$.

52. **(Secreción hormonal)** Un modelo de este proceso puede ser

$$y' = a - b \cos \frac{2\pi t}{24} - ky.$$

Aquí, t es el tiempo [en horas, eligiéndose $t = 0$ en una hora adecuada, por ejemplo, 8:00 A.M.], $y(t)$ es la cantidad de cierta hormona presente en la sangre, a es la razón media de secreción, $b \cos(\pi t/12)$ es un modelo del ciclo de secreción diaria de 24 horas y ky representa el modelo de la razón de eliminación de la hormona de la sangre. Encontrar la solución cuando $a = b = k = 1$ y $y(0) = 2$.

53. **(Modelo logístico de población)** Demostrar que (8) con $0 < y(0) < A/B$ crece monótonamente y con $y(0) > A/B$ disminuye monótonamente.

54. **(Estados Unidos)** Para los Estados Unidos, Verhulst predijo en 1845 los valores $A = 0.03$ y $B = 1.6 \cdot 10^{-4}$, donde x se mide en años y $y(x)$ en millones. Encontrar la solución particular (8) que satisface $y(0) = 5.3$ (correspondiente al año 1800) y comparar los valores de esta solución con algunos de los valores reales (redondeados):

1800	1830	1860	1890	1920	1950	1980	1990
5.3	13	31	63	105	150	230	250

55. Demostrar que las curvas (8) tienen un punto de inflexión si $y(x) = A/2B$. [Usar (7).]

Ecuaciones de Riccati y Clairaut

56. Una **ecuación de Riccati**[13] es de la forma $y' + p(x)y = g(x)y^2 + h(x)$. Comprobar que la ecuación de Riccati $y' = x^3(y-x)^2 + x^{-1}y$ tiene la solución $y = x$ y reducirla a una ecuación de Bernoulli por la sustitución $w = y - x$ y resolverla.

57. Demostrar que la ecuación general de Riccati del problema 56 (que es una ecuación de Bernoulli cuando $h \equiv 0$) puede reducirse a una ecuación de Bernoulli si se conoce una solución $y = v$ haciendo $w = y - v$.

[13] JACOPO FRANCESCO RICCATI (1676-1754), matemático italiano, quien introdujo su ecuación en 1723.

58. Una **ecuación de Clairaut**[14] es de la forma $y = xy' + g(y')$. Resolver la ecuación de Clairaut $y = xy' + 1/y'$. *Sugerencia.* Derivar la ecuación con respecto a x.

59. Demostrar que la ecuación general de Clairaut del problema 58 con $g(s)$ arbitraria tiene como soluciones una familia de rectas $y = cx + g(c)$ y una solución singular determinada por $g'(s) = -x$, donde $s = y'$. (Esas rectas son tangente a las anteriores.) *Sugerencia.* Derivar la ecuación con respecto a x como en el problema 58.

60. Demostrar que las rectas, cuyos segmentos comprendidos entre los ejes x y y positivos tienen una longitud constante de 1, son soluciones de la ecuación de Clairaut $y = xy' - y'/\sqrt{1 + y'^2}$, cuya solución singular es el **astroide** $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. Hacer un dibujo.

1.8 MODELADO: CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Recuérdese de las secciones 1.1 y 1.3 que **modelado** significa establecer modelos matemáticos de sistemas físicos o de otros campos. En esta sección se harán modelos de circuitos eléctricos. Sus modelos serán ecuaciones diferenciales lineales. Aun cuando son de interés particular para los estudiantes de ingeniería eléctrica, ingeniería de computación, etc., la discusión resultará provechosa para ***todos*** los estudiantes, pues la habilidad para plantear modelos puede adquirirse de la manera más conveniente considerando problemas prácticos de *varios* campos. En beneficio de todos, se empieza explicando los conceptos básicos necesarios.

El circuito eléctrico más simple es un circuito en serie en el que se tiene una fuente de energía eléctrica (**fuerza electromotriz**) como un generador o una batería, y un resistor, que usa la energía, por ejemplo una bombilla eléctrica (figura 12). Si se cierra el interruptor, una corriente I fluirá por el resistor y esto producirá una **caída de voltaje**, es decir, el potencial eléctrico en los dos extremos del resistor serán diferentes; esta diferencia de potencial o caída de voltaje puede medirse con un voltímetro. Experimentos demuestran la válidez de la siguiente ley.

La **caída de voltaje E_R en un resistor** *es proporcional a la corriente instantánea* I, esto es,

(1) $$E_R = RI$$ **(Ley de Ohm's)**

donde a la constante de proporcionalidad R se le llama la **resistencia** del resistor. La corriente I se mide en *amperes*, la resistencia R en *ohms* y el voltaje E_R en *volts*.[15]

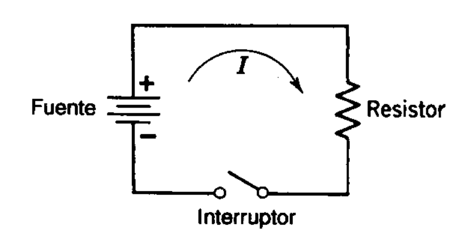


Figura 12. Circuito.

[14] ALEXIS CLAUDE CLAIRAUT (1713-1765), matemático francés, conocido también por su trabajo en geodesia y astronomía.

[15] Estas unidades y las subsecuentes reciben sus nombres en honor de ANDRÉ MARIE AMPÈRE (1775-1836), físico francés; GEORG SIMON OHM (1789-1854), físico alemán; ALESSANDRO VOLTA (1745-1827), físico italiano; JOSEPH HENRY (1797-1878), físico estadounidense; MICHAEL FARADAY (1791-1867), físico inglés, y CHARLES AUGUSTIN DE COULOMB (1736-1806), físico e ingeniero francés.

Los otros dos elementos importantes en circuitos más complicados son los *inductores* y los *capacitores*. Un inductor se opone a un cambio en la corriente y tiene un efecto de inercia en la electricidad similar al de la masa en la mecánica; más adelante se considerará esta analogía (sección 2.12). Experimentos dan lugar a la siguiente ley.

La **caída de voltaje E_L en un inductor** *es proporcional a la razón de cambio instantánea con respecto al tiempo de la corriente I*, esto es,

(2)
$$E_L = L\frac{dI}{dt}$$

donde a la constante de proporcionalidad L se le llama la **inductancia** del inductor y se mide en *henrys*; el tiempo t se mide en segundos.

Un capacitor es un elemento que almacena energía. Experimentos dan lugar a la siguiente ley.

La **caída de voltaje E_C en un capacitor** *es proporcional a la carga eléctrica instantánea Q en el capacitor*, esto es,

(3*)
$$E_C = \frac{1}{C}Q$$

donde a C se le llama la **capacitancia** y se mide en *faradios*; la carga Q se mide en *coulombs*. Puesto que

(3')
$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

esta expresión puede escribirse como

(3)
$$E_C = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(t^*)\, dt^*.$$

La corriente $I(t)$ en un circuito puede determinarse resolviendo la ecuación (o ecuaciones) que resulte(n) de la aplicación de la siguiente ley física.

Ley de las tensiones de Kirchhoff (LTK)[16]

La suma algebraica de todas las caídas de voltaje instantáneas alrededor de cualquier circuito cerrado es cero, o el voltaje aplicado a un circuito cerrado es igual a la suma de las caídas de voltaje en el resto del circuito.

---

[16] GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF (1824-1887), físico alemán. Más adelante se necesitará también la **ley de las corrientes de Kirchhoff (LCK):**

En cualquier punto de un circuito, la suma de las corrientes que llegan a él es igual a la suma de las corrientes que salen.

EJEMPLO 1 Circuito *RL*

Establecer el modelo del "circuito *RL*" de la figura 13 y resolver la ecuación resultante para (A) una fuerza electromotriz constante, (B) una fuerza electromotriz periódica.

Solución. Primer paso. Modelado. Por (1), la caída de voltaje en el resistor es RI. Por (2), la caída de voltaje en el inductor es $L\,dI/dt$. Por la LTK, la suma de las dos caídas de voltaje debe ser igual a la fuerza electromotriz $E(t)$; por tanto

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t). \tag{4}$$

Segundo paso. Solución de la ecuación. Se llega a la solución general por (4) de la sección 1.7, la cual se estableció para una ecuación $y' + py = r$, con un coeficiente 1 para y'; por tanto, primero (4) debe dividirse entre L,

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}.$$

Entonces por la ecuación (4) de la sección 1.7, con $x = t$, $y = I$, $p = R/L$ y $r = E/L$ se obtiene

$$I(t) = e^{-\alpha t}\left[\int e^{\alpha t}\frac{E}{L}\,dt + c\right], \qquad \alpha = \frac{R}{L}. \tag{5}$$

Tercer paso. Caso A. Fuerza electromotriz constante $E = E_0$. Puesto que $\int e^{\alpha t}\,dt = e^{\alpha t}/\alpha$, para $E = E_0$ constante, de la ecuación (5) se obtiene la solución

$$I(t) = e^{-\alpha t}\left[\frac{E_0}{L}\cdot\frac{L}{R}e^{\alpha t} + c\right] = \frac{E_0}{R} + ce^{-\alpha t}. \tag{5*}$$

El último término tiende a cero cuando $t \to \infty$; en la práctica, después de algún tiempo la corriente será constante, igual a E_0/R, el valor que tendría de inmediato (por la ley de Ohm) si no hubiera un inductor en el circuito, y se ve que este límite es independiente del valor inicial $I(0)$. En la figura 14 se muestra la solución particular para la que $I(0) = 0$, a saber, por (5*)

$$I(t) = \frac{E_0}{R}(1 - e^{-\alpha t}) = \frac{E_0}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) \tag{5**}$$

donde a $\tau_L = L/R$ $(= 1/\alpha)$ se le llama la **constante inductiva de tiempo** del circuito (ver el problema 3).

Cuarto paso. Caso B. Fuerza electromotriz periódica $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$. Para esta $E(t)$, la ecuación (5) es

$$I(t) = e^{-\alpha t}\left[\frac{E_0}{L}\int e^{\alpha t}\operatorname{sen}\omega t\,dt + c\right] \qquad (\alpha = R/L).$$

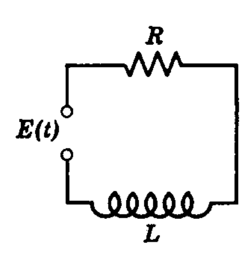


Figura 13. Circuito *RL*.

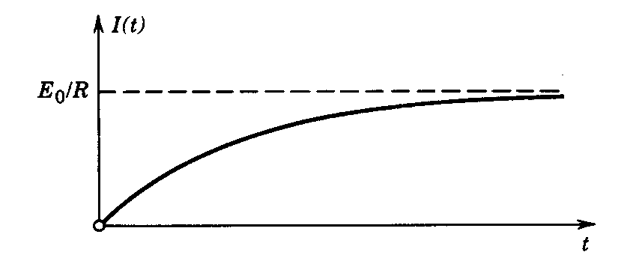


Figura 14. Corriente en un circuito *RL* debida a una fuerza electromotriz constante.

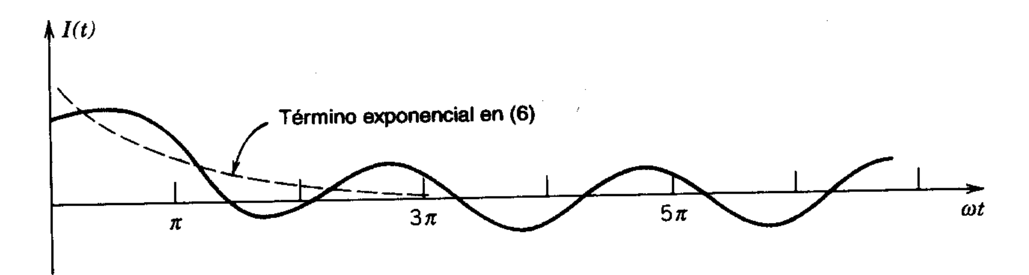


Figura 15. Corriente en un circuito *RL* debida a una fuerza electromotriz senoidal como la obtenida por (6) (con $\delta = \pi/4$).

Al integrar por partes se obtiene

$$I(t) = ce^{-(R/L)t} + \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2}(R \operatorname{sen} \omega t - \omega L \cos \omega t).$$

Esta expresión puede escribirse como [ver (14) en el apéndice 3]

$$(6) \qquad I(t) = ce^{-(R/L)t} + \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \delta), \qquad \delta = \arctan \frac{\omega L}{R}.$$

El término exponencial tenderá a cero cuando t tienda a infinito. Esto significa que después de cierto tiempo la corriente $I(t)$ realizará oscilaciones prácticamente armónicas. (Ver la figura 15.) La figura 16 muestra el ángulo de fase δ como una función de $\omega L/R$. Si $L = 0$, entonces $\delta = 0$, y las oscilaciones de $I(t)$ estarán en fase con las de $E(t)$. ∎

Se dice que un sistema eléctrico (o dinámico) se encuentra en **estado estacionario** cuando las variables que describen su comportamiento son funciones periódicas de tiempo o constantes, y se dice que se encuentra en un **estado transitorio** (o *no estacionario*) cuando no está en el estado estacionario. A las variables correspondientes se les llama *funciones de estado estacionario* y *transitorias*, respectivamente.

En el ejemplo 1, caso A, la función E_0/R es una función de estado estacionario o **solución de estado estacionario** de (4), y en el caso B la solución de estado estacionario está representada por el último término de (6). Antes de que el circuito alcance (prácticamente) el estado estacionario se encuentra en el estado transitorio. Es evidente que este ínterin o periodo intermedio ocurre porque los inductores y los capacitores almacenan energía, y no es posible cambiar de manera instantánea las corrientes de los inductores y los voltajes de los capacitores correspondientes. En la práctica, este estado transitorio tiene una duración muy breve.

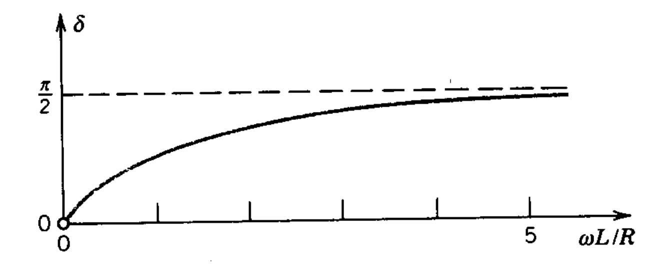


Figura 16. Ángulo de fase α en (6) como una función de $\omega L/R$.

EJEMPLO 2 Circuito *RL*

Establecer un modelo para el "circuito *RC*" de la figura 17 y encontrar la corriente en el circuito para los dos casos de la fuerza electromotriz $E(t)$ considerados en el ejemplo 1.

Solución. Primer paso. Modelado. Por (1), (3) y la LTK, se obtiene

$$RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = E(t). \tag{7}$$

Para eliminar la integral, las ecuaciones se derivan con respecto a t, encontrándose

$$\boxed{R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}.} \tag{8}$$

Segundo paso. Solución de la ecuación. Al dividir (8) entre R, por la ecuación (4) de la sección 1.7 se obtiene la solución general

$$I(t) = e^{-t/(RC)}\left(\frac{1}{R}\int e^{t/(RC)}\frac{dE}{dt}\,dt + c\right). \tag{9}$$

Tercer paso. Caso A. Fuerza electromotriz constante. Si $E = const$, entonces $dE/dt = 0$ y (9) se reduce a

$$I(t) = ce^{-t/(RC)} = ce^{-t/\tau_C} \qquad \text{(Fig. 18)} \tag{10}$$

donde a $\tau_C = RC$ se le llama la **constante capacitiva de tiempo** del circuito.

Cuarto paso. Caso B. Fuerza electromotriz periódica $E(t) = E_0$ sen ωt. Para esta $E(t)$ se tiene

$$\frac{dE}{dt} = \omega E_0 \cos \omega t.$$

Al insertar esta expresión en (9) e integrar por partes se encuentra

$$\begin{aligned} I(t) &= ce^{-t/(RC)} + \frac{\omega E_0 C}{1 + (\omega RC)^2}(\cos \omega t + \omega RC \operatorname{sen} \omega t) \\ &= ce^{-t/(RC)} + \frac{\omega E_0 C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \delta), \end{aligned} \tag{11}$$

donde $\tan \delta = -1/(\omega RC)$. El primer término se decrementa paulatinamente conforme t se incrementa, y el último término representa la corriente de estado estacionario, que es senoidal. La gráfica de $I(t)$ es similar a la de la figura 15. ∎

Los **"circuitos *RLC*"** que incluyen los tres tipos de componentes llevan a ecuaciones diferenciales de segundo orden y se considerarán en la sección 2.12; las redes eléctricas que llevan a sistemas de ecuaciones diferenciales se discutirán en el capítulo 4.

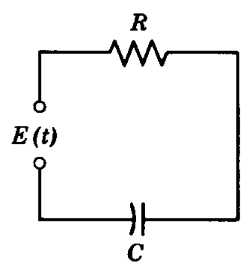


Figura 17. Circuito *RC*.

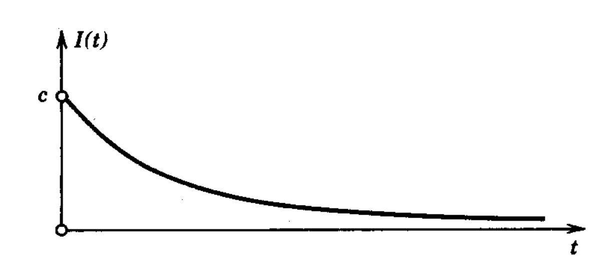


Figura 18. Corriente en un circuito *RC* debida a una fuerza electromotriz constante.

Problemas de la sección 1.8

Circuitos *RL*

1. Deducir (5*) a partir de (5).
2. Obtener a partir de (5*) las soluciones que satisfagan $I(0) = 0.5E_0/R$, E_0/R, $2E_0/R$. Trazar las curvas correspondientes.
3. Demostrar que la constante inductiva de tiempo $\tau_L = L/R$ es el tiempo t en el que la corriente (5**) alcanza aproximadamente el 63% de su valor final.
4. En el ejemplo 1, caso A, sea $R = 20$ ohms, $L = 0.03$ milihenrys ($3 \cdot 10^{-5}$ henrys) e $I(0) = 0$. Encontrar el tiempo en que la corriente alcanza el 99.9% de su valor final.
5. ¿El tiempo en el problema 4 disminuirá o aumentará si se cambia $I(0) = 0$ a algún valor positivo menor que E_0/R?
6. ¿Qué valor de L debería escogerse en un circuito LR con $R = 100$ omhs para que (5**) llegue al 99.9% de su valor final en $t = 0.01$ segundos?
7. ¿Qué valor de L debería elegirse en (4) con $E = E_0 = 100$ volts y $R = 1000$ ohms si se desea que la corriente aumente de 0 a 25% de su valor final en 10^{-4} segundos?
8. En el ejemplo 1, caso A, sean $R = 100$ ohms, $L = 2.5$ henrys, $E_0 = 110$ volts e $I(0) = 0$. Encontrar la constante de tiempo y el tiempo necesario para que la corriente aumente de 0 a 0.6 amperes.
9. Deducir (6) a partir de (4) y comprobar la ecuación por sustitución.
10. Deducir la solución de estado estacionario en (6) sustituyendo $I_p = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$ en (4) con $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$ y determinando A y B igualando los términos del coseno y el seno en la ecuación resultante. (Con esto se evita la integración por partes.)
11. ¿Para qué condición inicial (6) da como resultado la solución de estado estacionario?
12. ¿De qué manera depende de L el ángulo de fase δ en (6)? ¿Tiene sentido esto físicamente?
13. Resolver (4) con $E(t) = e^{-t}$ cuando (a) $R \neq L$, (b) $R = L$.
14. Resolver (4) con la fuerza electromotriz $E(t) = t$.
15. Encontrar la corriente en el circuito RL [ver (4)] con $R = 1$ ohm, $L = 1$ henry y $E(t) = 1$ si $0 \leq t \leq 3$ segundos, $E(t) = 0$ si $t > 3$ segundos e $I(0) = \frac{1}{2}$ ampere. *Sugerencia.* Usar el hecho de que $I(t)$ debe ser continua en $t = 3$.

Circuitos *RC*

16. **(Descarga de un capacitor)** Demostrar que (7) también puede escribirse

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{12}$$

Resolver esta ecuación con $E(t) = 0$, suponiendo que $Q(0) = Q_0$. Encontrar el tiempo en que el capacitor ha perdido 99.9% de su carga inicial.

17. Escribir la solución general de (12) en la forma de una integral y deducirla a partir de la fórmula (9) derivándola primero y luego integrándola por partes.
18. En (12), sean $R = 20$ ohms y $C = 0.01$ faradios y sea $E(t)$ que decae exponencialmente, por ejemplo, $E(t) = 60e^{-2t}$ volts. Suponiendo que $Q(0) = 0$, encontrar y trazar $Q(t)$. Determinar asimismo el tiempo en que $Q(t)$ alcanza un máximo y esa carga máxima.
19. Comprobar que (11) es una solución de (8) con $E = E_0 \operatorname{sen} \omega t$.
20. Obtener a partir de (11) la solución particular que satisface la condición inicial $I(0) = 0$.

21. Un capacitor ($C = 0.1$ faradios) conectado en serie con un resistor ($R = 200$ ohms) se carga con una fuente ($E_0 = 12$ volts); ver la figura 17 con $E(t) = E_0$. Encontrar el voltaje $V(t)$ en el capacitor, suponiendo que en $t = 0$ el capacitor está completamente descargado.

22. Encontrar la corriente $I(t)$ en el circuito RC ilustrado en la figura 17, suponiendo que $E = 100$ volts, $C = 0.25$ faradios, R es variable de acuerdo con $R = (100 - t)$ ohms cuando $0 \leq t \leq 100$ segundos, $R = 0$ cuando $t > 100$ segundos e $I(0) = 1$ ampere.

23. Resolver (12) cuando $R = 500$ ohms, $C = 10^{-3}$ faradios y $E(t) = 1 - e^{-t}$ volts.

Encontrar la solución de estado estacionario de (12) cuando $R = 50$ ohms, $C = 0.04$ faradios y $E(t)$ es igual a:

24. $110 \cos 314t$

25. $50e^{-t} + 1012 \operatorname{sen} \pi t$

26. Demostrar que si la carga inicial en el capacitor de la figura 17 es $Q(0)$, la corriente inicial en el circuito RC es $I(0) = E(0)/R - Q(0)/RC$.

27. Demostrar que si $E(t)$ en la figura 17 tiene un salto de magnitud J en $t = a$, entonces la corriente $I(t)$ en el circuito RC tiene un salto de magnitud J/R en $t = a$.

Usando el resultado del problema 27, encontrar la corriente $I(t)$ en el circuito RC de la figura 17, suponiendo $R = 1$ ohm, $C = 1$ faradio, una carga inicial cero en el capacitor y

28. $E =$ cuando $0 < t < 1$ y $E = 1$ cuando $t > 1$

29. $E = t + 1$ cuando $0 < t < a$ y $E = 0$ cuando $t > a$

30. $E = t + 1$ cuando $0 < t < a$ y $E = a + 1$ cuando $t > a$

1.9 TRAYECTORIAS ORTOGONALES DE CURVAS. *OPCIONAL*

Como otra aplicación interesante, se verá en esta sección cómo usar ecuaciones diferenciales para encontrar curvas que intersecan curvas dadas en ángulos rectos,[17] situación que se presenta con mucha frecuencia en la práctica. A las nuevas curvas se les llama entonces las **trayectorias ortogonales** de las curvas dadas (y recíprocamente). En este caso, "ortogonal" es sinónimo de "perpendicular". En la figura 19 se muestra un ejemplo.

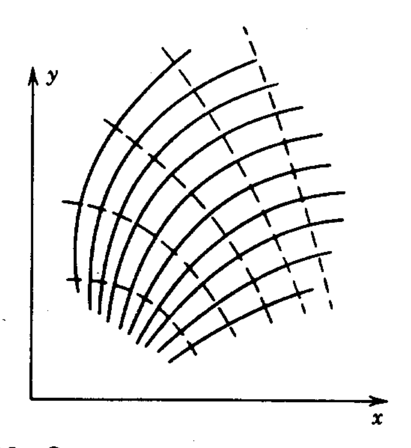


Figura 19. Curvas y sus trayectorias ortogonales.

[17] Recuérdese que el **ángulo de intersección** de dos curvas se define como el ángulo entre las tangentes de las curvas en el punto de intersección.

Por ejemplo, los meridianos y los paralelos del globo terráqueo son trayectorias ortogonales entre sí, como lo son también las curvas de pendiente más pronunciada y las líneas de contorno en un mapa. En un campo eléctrico, las curvas de fuerza eléctrica son las trayectorias ortogonales de las líneas de equipotencial (= curvas de voltaje constante) y recíprocamente (para un ejemplo, ver la figura 20). Otros ejemplos importantes ocurren en dinámica de fluidos, conducción de calor y otros campos de la física.

La idea de encontrar las trayectorias ortogonales de curvas dadas es representar estas curvas por la solución general de una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, después sustituir la pendiente y' por su recíproco negativo $-1/y'$ (la condición de perpendicularidad, como se recuerda de geometría analítica) y, por último, resolver la nueva ecuación diferencial $-1/y' = f(x, y)$. Los detalles se explican a continuación.

Familia de curvas. Si para cada valor fijo de c la ecuación

$$F(x, y, c) = 0 \tag{1}$$

representa una curva en el plano xy y si para c variable representa un número indefinido de curvas, entonces a la totalidad de estas curvas se le llama **familia de curvas con un parámetro**, y a c se le llama el *parámetro* de la familia.

EJEMPLO 1 Familias de curvas

La ecuación

$$F(x, y, c) = x + y + c = 0 \tag{2}$$

representa una familia de rectas paralelas; cada recta corresponde exactamente a un valor del parámetro c. La ecuación

$$F(x, y, c) = x^2 + y^2 - c^2 = 0 \tag{3}$$

representa una familia de circunferencias concéntricas de radio c con centro en el origen. ∎

Ahora bien, es posible obtener muchas familias con un parámetro a partir de la solución general de una ecuación diferencial, la cual contiene un parámetro arbitrario c, como ya se sabe. En consecuencia, dada una familia de curvas, el primer paso del

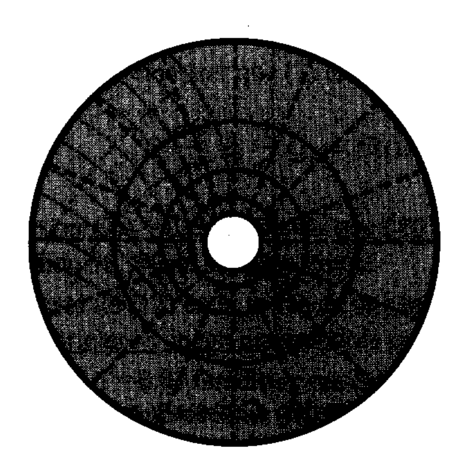


Figura 20. Líneas de equipotencial y líneas de fuerza eléctrica (trazo discontinuo) entre dos cilindros concéntricos.

método que se estudiará es encontrar una ecuación diferencial de ella, por lo general derivando (1). El ejemplo 2 muestra tres familias, en la tercera de las cuales se ilustra cómo eliminar c en caso de que no funcione.

EJEMPLO 2 Ecuaciones diferenciales de familias. Eliminación del parámetro

Al derivar (2) se obtiene como la ecuación diferencial de esas rectas

Al derivar (3) se obtiene $2x + 2yy' = 0$, por lo que la ecuación diferencial de esas circunferencias es

$$y' = -x/y.$$

Al derivar la familia de parábolas

$$y = cx^2 \qquad (4)$$

se obtiene primero $y' = 2cx$. Es necesario eliminar c. Ahora de (4) se obtiene $c = y/x^2$. Por sustitución, $y' = 2(y/x^2)x$, es decir,

$$y' = 2y/x. \qquad (5)$$

Más directo: en (4) se despeja c, es decir, $c = yx^{-2}$ y se deriva implícitamente con respecto a x; por tanto, $0 = y'x^{-2} - 2yx^{-3}$, de donde se obtiene (5). ∎

Determinación de trayectorias ortogonales

Primer paso. Dada una familia (1), se encuentra su ecuación diferencial en la forma

$$y' = f(x, y). \qquad (6)$$

Segundo paso. Se encuentran las trayectorias ortogonales resolviendo su ecuación diferencial

$$\boxed{y' = -\frac{1}{f(x, y)}}. \qquad (7)$$

Demostración del método. Por (6) se ve que una curva dada que pasa por un punto $P:(x_0, y_0)$ tiene en P la pendiente $f(x_0, y_0)$. La pendiente de la trayectoria ortogonal que pasa por P deberá ser en este punto el recíproco negativo de $f(x_0, y_0)$, es decir, $-1/f(x_0, y_0)$ pues esta es la condición para que las tangentes de dos curvas en P sean perpendiculares. Por lo anterior, (6) implica (7). ∎

EJEMPLO 3 Trayectorias ortogonales

Encontrar las trayectorias ortogonales de las parábolas del ejemplo 2.

Solución. Por (5) se ve que la ecuación diferencial (7) de las trayectorias ortogonales es

$$y' = -\frac{1}{2y/x} = -\frac{x}{2y}.$$

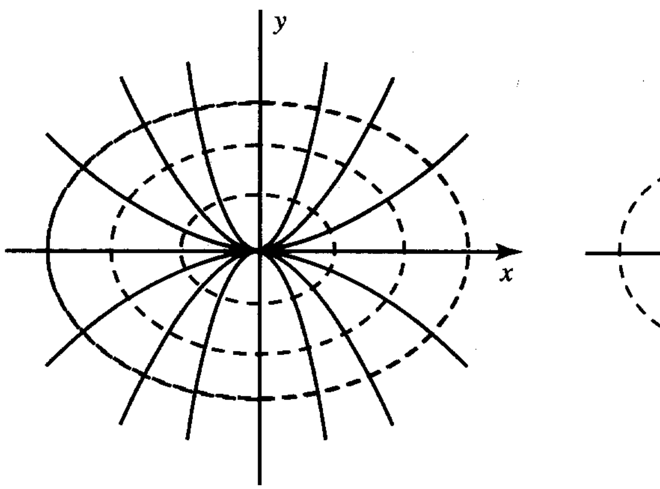


Figura 21. Parábolas y sus trayectorias ortogonales del ejemplo 3.

Figura 22. Circunferencias y sus trayectorias ortogonales (trazo discontinuo) del ejemplo 4.

Al separar las variables e integrar se encuentra que las trayectorias ortogonales son las elipses

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = c^* \qquad \text{(Fig. 21, p. 46).} \quad ■$$

EJEMPLO 4 Trayectorias ortogonales

Encontrar las trayectorias ortogonales de las circunferencias

$$x^2 + (y - c)^2 = c^2 \qquad \text{(Fig. 22).} \tag{8}$$

Solución. Primer paso. La ecuación diferencial de (8). Al derivar (8) se obtiene $2x + 2(y - c)y' = 0$, que todavía contiene a c. Entonces en (8), que es $x^2 + y^2 - 2cy = 2$, se despeja $2c$, obteniéndose

$$2c = y^{-1}(x^2 + y^2) = y^{-1}x^2 + y.$$

Al derivar implícitamente con respecto a x se obtiene

$$0 = -\frac{x^2}{y^2}y' + \frac{2x}{y} + y'.$$

Al resolver algebraicamente esta expresión para y' se obtiene la ecuación diferencial de (8),

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}. \tag{9}$$

Segundo paso. Trayectorias ortogonales. De (9) se tiene la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales de (8):

$$y' = -\frac{x^2 - y^2}{2xy}, \qquad \text{por tanto} \qquad 2xyy' - y^2 + x^2 = 0.$$

Su solución general (obtenida en el ejemplo 1 de la sección 1.4) da como las trayectorias de (8) las circunferencias (figura 22)

$$(x - \tilde{c})^2 + y^2 = \tilde{c}^2. \quad ■$$

Problemas de la sección 1.9

Encontrar la ecuación diferencial (6) de las siguientes familias:

1. $xy = c$
2. $e^{3x}y = c$
3. $y = c \operatorname{sen} 2x$
4. $y = cxe^x$
5. $y = e^{cx^2}$
6. $y = 1/(1 + ce^x)$
7. $y = cx^2 + x^2e^x$
8. $c^2x^2 + y^2 = c^2$
9. $y^2 = ce^{-2x} + x - \frac{1}{2}$

Usando ecuaciones diferenciales, encontrar las trayectorias ortogonales de las siguientes curvas. Graficar algunas de las curvas y las trayectorias.

10. $x^2 - y^2 = c^2$
11. $x^2 + y^2 = c^2$
12. $y = c/x^2$
13. $y = \ln|x| + c$
14. $xy = c$
15. $y = \sqrt{x + c}$
16. $y = cx^3$
17. $x = ce^{-y^2}$
18. $x^2 + 2y^2 = c$
19. $x^2 + 4y^2 = c$
20. $(x - c)^2 + y^2 = c^2$
21. $y = ce^{8x}$

Aplicaciones

22. **(Campo de temperatura)** Si las **isotermas** (= curvas de temperatura constante) en un cuerpo son $T(x, y) = 2x^2 + y^2 = const$, ¿cuáles son sus trayectorias ortogonales (las curvas a lo largo de las cuales fluirá el calor en regiones en las que no haya fuentes o sumideros térmicos y que estén llenas de un material homogéneo)?

23. **(Campo eléctrico)** En el campo eléctrico entre dos cilindros concéntricos (figura 20), las **líneas de equipotencial** (= curvas de potencial constante) son circunferencias definidas por $U(x, y) = x^2 + y^2 = const$ [volts]. Usar el método estudiado en esta sección para obtener sus trayectorias ortogonales (las curvas de fuerza eléctrica).

24. **(Campo eléctrico)** Experimentos indican que las líneas de fuerza eléctrica de dos cargas opuestas de la misma intensidad en (–1, 0) y (1, 0) son las circunferencias que pasan por (–1, 0) y (1, 0). Demostrar que estas circunferencias pueden representarse por la ecuación $x^2 + (y - c)^2 = 1 + c^2$. Demostrar que las líneas de equipotencial (trayectorias ortogonales) son las circunferencias $(x + c^*)^2 + y^2 = c^{*2} - 1$ (líneas discontinuas en la figura 23).

25. **(Dinámica de fluidos)** Si las **líneas de corriente** del flujo (= trayectorias de las partículas del fluido) en el canal de la figura 24 son $\Psi(x, y) = xy = const$, ¿cuáles son sus trayectorias ortogonales (llamadas **líneas de equipotencial**, por las razones explicadas en la sección 17.4)?

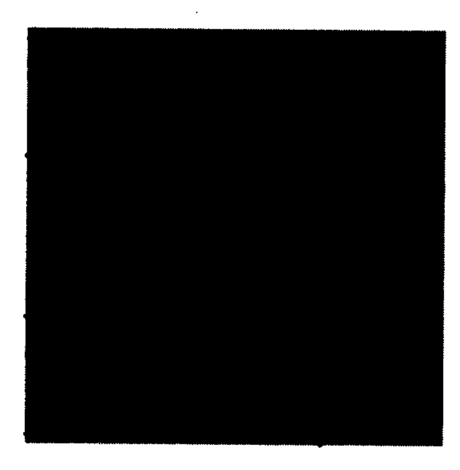


Figura 23. Campo eléctrico del problema 24.

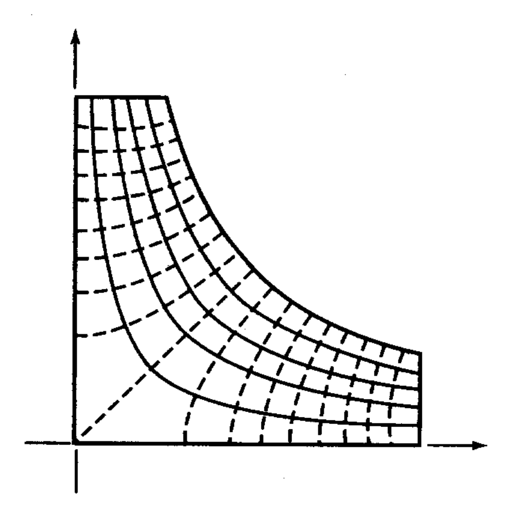


Figura 24. Flujo alrededor de una esquina en el problema 25.

Otras formas de las ecuaciones diferenciales. Trayectorias isogonales

26. Demostrar que (7) puede escribirse como $dx/dy = -f(x, y)$. Usar este hecho para obtener las trayectorias ortogonales de las curvas $y = x + ce^{-x}$.

27. Demostrar que las trayectorias ortogonales de una familia $g(x, y) = c$ pueden obtenerse a partir de la siguiente ecuación diferencial y usarla para resolver el problema 25:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial x}.$$

28. (Ecuaciones de Cauchy–Riemann) Demostrar que para una familia $u(x, y) = c = const$ las trayectorias ortogonales $v(x, y) = c^* = const$ pueden obtenerse de las llamadas *ecuaciones de Cauchy-Riemann* siguientes (las cuales son fundamentales en el análisis complejo, capítulo 12):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

29. Encontrar las trayectorias ortogonales de $e^x \cos y = c$ por las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

30. Las **trayectorias isogonales** de una familia de curvas dada son las curvas que intersecan las curvas dadas a un ángulo constante θ. Demostrar que en todo punto las pendientes m_1 y m_2 de las tangentes a las curvas correspondientes satisfacen la relación

$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \tan\theta = const.$$

Usando esta expresión, encontrar las curvas que cortan a las circunferencias $x^2 + y^2 = c$ formando un ángulo de 45°.

1.10 SOLUCIONES APROXIMADAS: CAMPOS DIRECCIONALES, ITERACIÓN

Las soluciones aproximadas de una ecuación diferencial son de interés práctico si la ecuación no tiene una fórmula para encontrar una solución explícita exacta[18] o si dicha fórmula resulta demasiado complicada para ser de valor práctico. Entonces puede usarse uno de los **métodos númericos** de las secciones 20.1 ó 20.2 (que son independientes de las demás secciones y pueden considerarse en este momento). O bien puede usarse el *método de los campos direccionales*, por medio del cual es posible trazar varias curvas solución al mismo tiempo (sin resolver realmente la ecuación).

Método de los campos direccionales

Este método se aplica a cualquier ecuación diferencial

(1) $$\boxed{y' = f(x, y).}$$

La idea se reduce a lo siguiente: y' es la pendiente de las curvas solución desconocidas. Si una de estas curvas pasa por un punto P: (x_0, y_0), su pendiente en P debe ser

[18] La referencia [A7] del apéndice 1 incluye más de 1 500 ecuaciones diferenciales importantes y sus soluciones, ordenadas de manera sistemática y con numerosas referencias a los textos originales.

$f(x_0, y_0)$, como puede verse directamente de (1). Por tanto, en varios puntos podrían trazarse **"elementos lineales"** es decir, pequeños segmentos que indicarían las direcciones de las tangentes de las curvas solución de conformidad con (1), para luego ajustar las curvas solución en este campo de direcciones de tangentes.

Es mejor y más económico si primero se trazan las curvas de pendiente constante $f(x, y) = const$ (¡pues éstas aún no son curvas solución!); estas curvas reciben el nombre de **isoclinas** (que significa curvas con inclinaciones iguales). Después, como segundo paso, a lo largo de cada isoclina $f(x, y) = k = const$ se trazan varios elementos lineales de pendiente k; esto se hace para una isoclina a la vez. Lo que se obtiene se conoce como el **campo direccional** de (1). En este campo, como tercer paso, pueden trazarse las curvas solución aproximadas de (1), guiándose por las direcciones de las tangentes de conformidad con esos elementos lineales.

Bastará ilustrar el método por una ecuación simple que puede resolverse de manera exacta, a fin de obtener una idea de la precisión del método.

EJEMPLO 1 Isoclinas, campo direccional

Graficar el campo direccional de la ecuación diferencial de primer orden

(2) $$y' = xy$$

y una aproximación de la curva solución que pasa por el punto (1, 2). Comparar el resultado con la solución exacta.

Solución. Las isoclinas son las hipérbolas equiláteras $xy = k$ y los dos ejes de coordenadas. Se grafican algunas isoclinas. Después se trazan elementos lineales deslizando una escuadra sobre una regla fija. El resultado se muestra en la figura 25, donde también se muestra una aproximación de la curva solución que pasa por el punto (1, 2). Al separar las variables, $y = ce^{x^2/2}$. La condición inicial es $y(1) = 2$. Por tanto, $2 = ce^{1/2}$ y la solución exacta es

$$y = 2e^{(x^2-1)/2}.$$ ∎

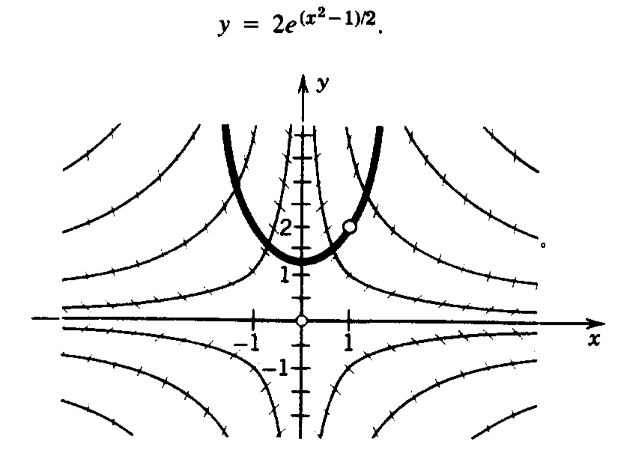


Figura 25. Campo direccional de la ecuación diferencial (2).

Método de iteración de Picard[19]

El método de Picard da las soluciones aproximadas de un problema con valor inicial

(3) $$\boxed{y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0}$$

[19] EMILE PICARD (1856-1941), matemático francés, profesor en París desde 1881, conocido también por sus importantes aportaciones al análisis complejo (ver la sección 14.8 para su famoso teorema).

la cual se supone tiene una solución única en algún intervalo abierto sobre el eje x que contiene a x_0. El método no es muy práctico debido a que requiere de integraciones. Sin embargo, se discute aquí por dos razones:

1. El método de Picard es la base de los teoremas de existencia y unicidad de Picard que se discutirán en la siguiente sección.
2. El método de Picard ilustra la idea de los **métodos de iteración**, en los que se hacen varios pasos de cálculos usando la misma regla pero con datos variables (generalmente con los datos obtenidos en el paso anterior, como se verá). Los métodos de iteración se usan con mucha frecuencia en las matemáticas aplicadas, en particular en el trabajo numérico (ver los capítulos 18-20).

La idea del método de Picard es simple. Por integración se ve que (3) puede escribirse en la forma

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt \tag{4}$$

donde t denota la variable de integración. De hecho, cuando $x = x_0$, la integral es cero y $y = y_0$, por lo que (4) satisface la condición inicial de (3); además, al derivar (4) se obtiene la ecuación diferencial de (3).

Para encontrar aproximaciones de la solución $y(x)$ de (4) se procede de la siguiente manera. Se sustituye la aproximación no refinada $y = y_0 = const$ en el segundo miembro; se obtiene así la aproximación supuestamente mejor.

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt.$$

En el siguiente paso se sustituye la función $y_1(x)$ de la misma manera para obtener

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_1(t)]\, dt,$$

y así sucesivamente. En el paso n de esta iteración se llega a una función de aproximación

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\, dt. \tag{5}$$

Se obtiene así una sucesión de aproximaciones

$$y_1(x), \quad y_2(x), \cdots, \quad y_n(x), \cdots,$$

y en la siguiente sección se verá que las condiciones bajo las cuales esta sucesión converge a la solución $y(x)$ de (3) son bastante generales.

El método de Picard se ilustrará con una ecuación que puede resolverse fácilmente de manera exacta, para que puedan compararse las aproximaciones con la solución exacta.

EJEMPLO 2 Iteración de Picard

Encontrar soluciones aproximadas del problema con valor inicial

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(0) = 0.$$

Solución. En este caso, $x_0 = 0, y_0 = 0, f(x, y) = 1 + y^2$ y (5) queda como

$$y_n(x) = \int_0^x [1 + y_{n-1}^2(t)]\, dt = x + \int_0^x y_{n-1}^2(t)\, dt.$$

Empezando a partir de $y_0 = 0$, se obtiene (ver la figura 26)

$$y_1(x) = x + \int_0^x 0\, dt = x$$

$$y_2(x) = x + \int_0^x t^2\, dt = x + \tfrac{1}{3}x^3$$

$$y_3(x) = x + \int_0^x \left(t + \frac{t^3}{3}\right)^2 dt = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \tfrac{1}{63}x^7$$

y así sucesivamente. Desde luego, la solución exacta de este problema puede obtenerse por separación de variables (ver el ejemplo 2 de la sección 1.2), encontrándose

$$(6) \qquad y(x) = \tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \tfrac{17}{315}x^7 + \cdots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Los tres primeros términos de $y_3(x)$ y la serie de (6) son iguales. La serie de (6) converge para $|x| < \pi/2$, y lo único que puede esperarse es que la sucesión $y_1, y_2, \ldots$ converja a una función que es la solución del problema en cuestión para $|x| < \pi/2$. Con esto se ilustra que el estudio de la convergencia es de importancia práctica. ▮

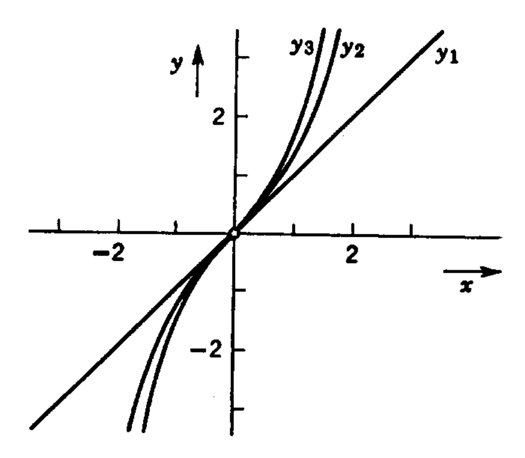


Figura 26. Soluciones aproximadas del ejemplo 2.

Problemas de la sección 1.10

Campos direccionales

En cada caso, dibujar un campo direccional adecuado. Trazar varias curvas solución aproximadas. Después resolver analíticamente la ecuación y comparar los resultados, a fin de obtener una idea de la precisión del método estudiado.

1. $y' = 2y/x$ **2.** $y' = -x/y$ **3.** $y' = -xy$

4. $y' = x + y$ **5.** $9yy' + x = 0$ **6.** $y' = y^2$

7. **(Paracaidista)** Trazar el campo direccional de la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = 10 - 0.4v^2$$

y a partir de ella obtener las siguientes conclusiones. Las isoclinas son rectas horizontales. La isoclina $v = 5$ es al mismo tiempo una curva solución. Todas las curvas solución del semiplano superior ($v > 0$) parecen tender a la recta $v = 5$ cuando $t \to \infty$; son monótonamente crecientes si $0 < v(0) < 5$ y monótonamente decrecientes si $v(0) > 5$. Trazar las curvas solución para las que $v(0) = 0$ y $v(0) = 7$ y compararlas con las soluciones exactas obtenidas a partir de la fórmula (11) de la sección 1.3.

8. **(Modelo de población de Verhulst)** Dibujar el campo direccional de la ecuación diferencial del ejemplo 5 de la sección 1.7, con $A = 0.03$ y $B = 1.6 \cdot 10^{-4}$ y usarla para discutir el comportamiento general de las soluciones correspondientes a las condiciones iniciales mayor y menor que 187.5.

9. **(Problema de persecución. Tráctrix)** En la figura 27, el destructor D (el *perseguidor*) *persigue* al barco S (el *blanco*), es decir, se mueve en dirección de S en todo tiempo. Suponer que S se mueve sobre el eje x y que la distancia a de D a S es constante. Demostrar que $y' = -y/\sqrt{a^2 - y^2}$. Trazar un campo direccional (para $a = 1$ [milla náutica]) y la solución que satisface $y(0) = 1$. (Esta curva se llama *tráctrix*, del latín *trahere*, que significa "jalar".) Usando la separación de variables, demostrar que

$$x = -\int y^{-1}\sqrt{a^2 - y^2}\, dy = -\sqrt{a^2 - y^2} + a \ln|y^{-1}(a + \sqrt{a^2 - y^2})| + c.$$

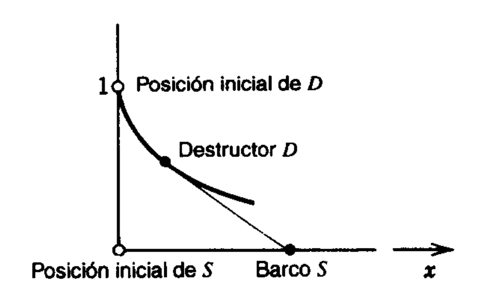


Figura 27. Tráctrix y notación del problema 9.

Iteración de Picard

10. Aplicar el método de Picard a $y' = y$, $y(0) = 1$, y demostrar que las aproximaciones sucesivas tienden a $y = e^x$, la solución exacta.

11. Demostrar que si f en (3) no depende de y, entonces las aproximaciones obtenidas por el método de Picard son idénticas a la solución exacta. ¿Por qué?

12. Aplicar el método de Picard a $y' = 2xy$, $y(0) = 1$. Trazar y_1, y_2, y_3 y la solución exacta para $0 \leq x \leq 2$.

13. En el problema 12, calcular los valores $y_1(1)$, $y_2(1)$, $y_3(1)$ y compararlos con el valor exacto $y(1) = e = 2.718 \cdots$.

Aplicar el método de Picard a los siguientes problemas con valor inicial. Determinar asimismo la solución exacta. Comparar los resultados.

14. $y' = xy, \quad y(0) = 1$

15. $y' = 2y, \quad y(0) = 1$

16. $y' = x + y, \quad y(0) = 0$

17. $y' = x + y, \quad y(0) = -1$

18. $y' = y^2, \quad y(0) = 1$

19. $y' = xy + 2x - x^3, \quad y(0) = 0$

20. $y' - xy = 1, \quad y(0) = 1$

1.11 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES

Hasta este punto, para las ecuaciones diferenciales consideradas existía una solución general, y para un **problema con valor inicial**, por ejemplo,

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

que consta de una ecuación diferencial y una condición inicial $y(x_0) = y_0$, se obtenía una solución particular única. Sin embargo, ésta era sólo una de las tres posibilidades ilustradas por los siguientes ejemplos:

El problema con valor inicial

$$|y'| + |y| = 0, \qquad y(0) = 1$$

no tiene solución porque $y \equiv 0$ es la única solución de la ecuación diferencial. (¿Por qué?) El problema con valor inicial

$$y' = x, \qquad y(0) = 1$$

tiene exactamente una solución, a saber, $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$. El problema con valor inicial

$$xy' = y - 1, \qquad y(0) = 1$$

tiene una infinidad de soluciones, a saber, $y = 1 + cx$, donde c es una constante arbitraria. De estos tres ejemplos puede verse que un problema con valor inicial puede no tener soluciones, tener exactamente una solución o tener más de una solución. Esto lleva a las dos preguntas fundamentales siguientes.

Problema de existencia. *¿Bajo qué condiciones un problema con valor inicial de la forma* (1) *tiene al menos una solución?*

Problema de unicidad. *¿Bajo qué condiciones dicho problema tiene a lo sumo una solución?*

A los teoremas que establecen dichas condiciones se les llama **teoremas de existencia** y **teoremas de unicidad**, respectivamente.

Desde luego, los tres ejemplos citados son tan sencillos que la respuesta a las dos preguntas puede encontrarse por inspección, sin usar ningún teorema. Sin embargo, es evidente que en casos más complicados —por ejemplo, cuando la ecuación no puede resolverse por métodos elementales— los teoremas de existencia y unicidad pueden ser de considerable importancia práctica. Aun cuando se tenga la seguridad de que un sistema físico o de otra índole se comporta de manera única, de vez en cuando el modelo establecido puede estar sobresimplificado y quizás no dé un cuadro fiel de la realidad. Por lo tanto, es necesario asegurarse de que el modelo empleado tiene una solución única antes de intentar calcular la solución. Los dos teoremas siguientes abarcan casi todos los casos prácticos concebibles.

El primer teorema establece que si $f(x, y)$ en (1) es continua en alguna región del plano xy que contiene al punto (x_0, y_0) (que corresponde a la condición inicial dada), entonces el problema (1) tiene al menos una solución. Si, además, la derivada parcial $\partial f/\partial y$ existe y es continua en esa región, entonces el problema (1) tiene exactamente una solución. Entonces esta solución puede obtenerse por el método de iteración de Picard. Ahora se formulan estos planteamientos de manera precisa.

Teorema 1 Teorema de existencia

Si $f(x, y)$ es continua en todos los puntos (x, y) en algún rectángulo (figura 28)

$$R: \qquad |x - x_0| < a, \qquad |y - y_0| < b$$

y está acotada[20] *en* ***R****, es decir,*

$$(2) \qquad |f(x, y)| \leqq K \qquad \textit{para toda}\,(x, y)\ \textit{en}\,R,$$

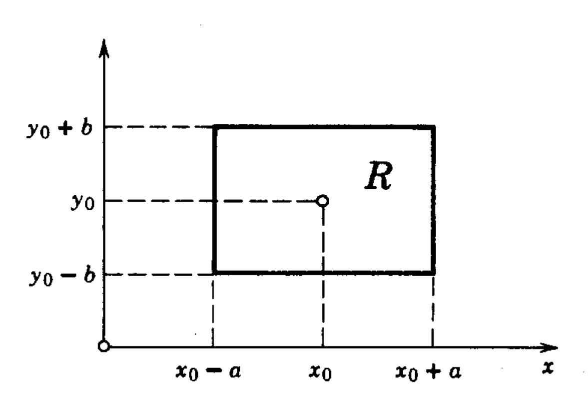


Figura 28. Rectángulo R en los teoremas de existencia y unicidad.

[20] Se dice que una función $f(x, y)$ está **acotada** cuando (x, y) varía en una región del plano xy, si existe un número K tal que $|f(x, y)| \leq K$ cuando (x, y) está en esa región. Por ejemplo, $f = x^2 + y^2$ está acotada, con $K = 2$ si $|x| < 1$ y $|y| < 1$. La función $f = \tan(x + y)$ no está acotada para $|x + y| < \pi/2$.

entonces el problema con valor inicial (1) *tiene al menos una solución y(x). Esta solución está definida al menos para toda x en el intervalo* $|x - x_0| < \alpha$, *donde* α *es el menor de los dos números a y b/K.*

Teorema 2 Teorema de unicidad

Si $f(x, y)$ *y* $\partial f/\partial y$ *son continuas para todo (x, y) en el rectángulo R y están acotadas, es decir,*

$$(3) \qquad (a)\ |f| \leqq K, \qquad (b)\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqq M \qquad \textit{para toda } (x, y) \textit{ en } R,$$

entonces el problema con valor inicial (1) *tiene a lo sumo una solución y(x). Por tanto, por el teorema* 1, *tiene exactamente una solución. Esta solución está definida al menos para toda x en ese intervalo* $|x - x_0| < \alpha$. *Puede obtenerse por el método de Picard, es decir, la sucesión* $y_0, y_1, \cdots, y_n, \cdots$, *donde*

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\, dt, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

converge a dicha solución y(x).

Puesto que las demostraciones de estos teoremas requiere estar familiarizado con las series uniformemente convergentes y otros conceptos que tratarán más adelante en este libro, no se presentarán aquí sino que se remitirá al estudiante a la referencia [A6] del apéndice 1. Sin embargo, se considera conveniente incluir algunas observaciones y ejemplos que pueden ayudar a la comprensión adecuada de los dos teoremas.

Puesto que $y' = f(x, y)$, la condición (2) implica que $|y'| \leq K$, es decir, la pendiente de cualquier curva solución $y(x)$ en R es al menos $-K$ y a lo sumo K. Por tanto, una curva solución que pasa por el punto (x_0, y_0) debe estar en la región coloreada de la figura 29 limitada por las rectas l_1 y l_2 cuyas pendientes son $-K$ y K, respectivamente.

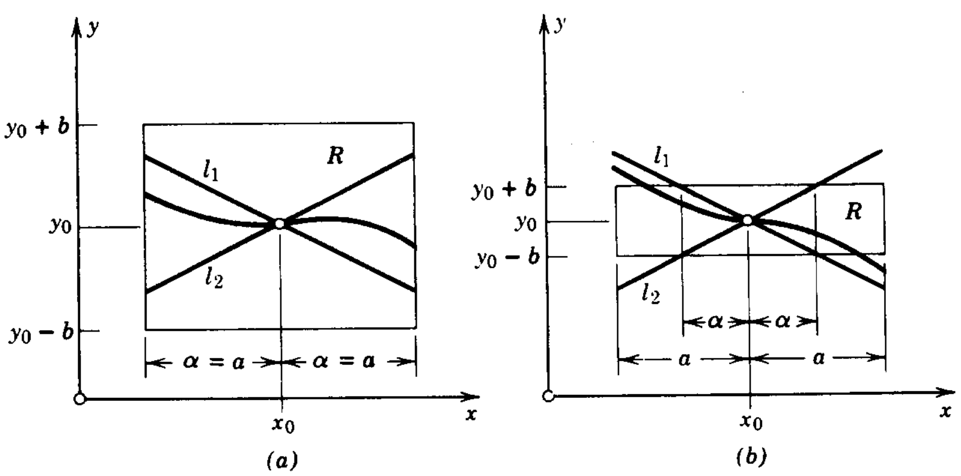


Figura 29. La condición (2) del teorema de existencia.
(*a*) Primer caso. (*b*) Segundo caso.

Dependiendo de la forma de R, pueden ocurrir dos casos. En el primero, ilustrado en la figura 29*a*, se tiene $b/K \geq a$ y por lo tanto $\alpha = a$ en el teorema de existencia, con lo cual se afirma entonces que la solución existe para toda x entre $x_0 - a$ y $x_0 + a$. En el segundo caso, ilustrado en la figura 29*b*, se tiene $b/K < a$. Por lo tanto, $\alpha = b/K$, y la única conclusión que puede sacarse de los teoremas es que la solución existe para toda x entre $x_0 - b/K$ y $x_0 + b/K$. Para valores mayores o menores de x, la curva solución puede salir del rectángulo R, y como no se hizo ninguna suposición acerca de f fuera de R, nada puede concluirse acerca de la solución para dichos valores; es decir, para esos valores de x puede existir o no —no se sabe.

Se ilustra la discusión con un ejemplo simple.

EJEMPLO 1 Considerar el problema

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(0) = 0$$

(ver el ejemplo 2 de la sección 1.10) y se toma R: $|x| < 5$, $|y| < 3$. Entonces $a = 5$, $b = 3$ y

$$|f| = |1 + y^2| \leqq K = 10, \qquad |\partial f/\partial y| = 2|y| \leqq M = 6, \qquad \alpha = b/K = 0.3 < a.$$

De hecho, la solución $y = \tan x$ del problema es discontinua en $x = \pm\pi/2$, y no existe solución continua que sea válida en el intervalo completo $|x| < 5$ del que se partió. ∎

Las condiciones de los dos teoremas son condiciones más bien suficientes que necesarias y es posible restarles rigor. Por ejemplo, por el teorema del valor medio de cálculo diferencial se tiene

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = (y_2 - y_1)\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\tilde{y}}$$

donde se supone que (x, y_1) y (x, y_2) están en R, y $\tilde{y}$ es un valor adecuado entre y_1 y y_2. A partir de lo anterior y de (3*b*) se sigue que

$$(4) \qquad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqq M|y_2 - y_1|,$$

y es posible demostrar que (3*b*) puede sustituirse por la condición menos rigurosa (4), la cual se conoce como **condición de Lipschitz.**[21] Sin embargo, la continuidad de $f(x, y)$ no basta para garantizar la *unicidad* de la solución. Esto puede ilustrarse con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 No unicidad

El problema con valor inicial

$$y' = \sqrt{|y|}, \qquad y(0) = 0$$

[21] RUDOLF LIPSCHITZ (1832-1903), matemático alemán, profesor en Bonn, quien también hizo aportaciones al álgebra, a la teoría de números, a la teoría del potencial y a la mecánica.

tiene las dos soluciones

$$y \equiv 0 \qquad \text{y} \qquad y^* = \begin{cases} x^2/4 & \text{if } x \geqq 0 \\ -x^2/4 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

aun cuando $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ es continua para toda y. La condición de Lipschitz (4) se infringe en toda región que incluya a la recta $y = 0$, porque para $y_1 = 0$ y y_2 positiva se tiene

$$(5) \qquad \frac{|f(x, y_2) - f(x, y_1)|}{|y_2 - y_1|} = \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{y_2}}, \qquad (\sqrt{y_2} > 0)$$

y ésta puede hacerse tan grande como se desee al escoger y_2 lo suficientemente pequeña, en tanto que (4) exige que el cociente del primer miembro de (5) no exceda una consta fija M. ∎

Aquí termina el capítulo 1 dedicado a las ecuaciones diferenciales de primer orden y sus aplicaciones. Las ecuaciones diferenciales de segundo orden, que se estudiarán en el capítulo 2, desempeñan un papel aún más importante en la ingeniería (y otros campos).

Los **MÉTODOS NUMÉRICOS para ecuaciones diferenciales de primer orden** se presentan en las secciones 20.1 y 20.2, las cuales son independientes de las demás secciones que tratan los métodos numéricos y pueden estudiarse de inmediato.

Problemas de la sección 1.11

1. Encontrar todas la soluciones del problema con valor inicial $xy' = 3y$, $y(0) = 0$. Trazar algunas de ellas. ¿La respuesta obtenida contradice los teoremas estudiados?
2. Demostrar que el problema con valor inicial $xy' = 2y$, $y(0) = 1$ no tiene solución. ¿Este hecho contradice el teorema de existencia?
3. Encontrar todas las soluciones del problema con valor inicial $y' = 2\sqrt{y}$, $y(1) = 0$. ¿Cuál de ellas se obtiene por el método de Picard si se empieza desde $y_0 = 0$?
4. Considerar la ecuación $(x^2 - x)y' = (2x - 1)y$ y encontrar todas las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ tales que el problema con valor inicial resultante (a) no tenga solución, (b) tenga más de una solución, (c) tenga exactamente una solución. ¿La respuesta contradice los teoremas estudiados?
5. Repetir las instrucciones del problema 4 para la ecuación $xy' = 2y$.
6. ¿Para qué condiciones iniciales el problema $(x^3 - x)y' = (3x^2 - 1)y$, $y(x_0) = y_0$, tiene una infinidad de soluciones? Trazar algunas de las curvas solución en el plano xy.
7. Determinar el mayor conjunto S en el plano xy tal que por cada punto de S pase una y sólo una curva solución de $x\,dy = y\,dx$.
8. Encontrar todas las soluciones de $y' = x|y|$.
9. Demostrar que si $y' = f(x, y)$ satisface los supuestos de los teoremas estudiados en un rectángulo R y y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuación cuyas curvas están en R, entonces estas curvas no pueden tener un punto en común (a menos que sean idénticas).
10. Si los supuestos de los teoremas estudiados no sólo se satisfacen en un rectángulo R sino también en una franja vertical dada por $|x - x_0| < a$, demostrar que entonces la solución de (1) existe para toda x en el intervalo $|x - x_0| < a$.
11. Cabe hacer notar que la solución de un problema con valor inicial puede existir en un intervalo mayor que el del teorema, siendo este último $|x - x_0| < \alpha$ con α definida en el teorema. Esto se ilustra con el ejemplo 1 del texto. Considérese ese ejemplo. Encontrar α en términos de a y b generales. ¿Cuál es el máximo posible que puede alcanzar α mediante una elección adecuada de a y b?
12. Encontrar la mayor α para la que los teoremas estudiados garantizan la existencia del problema $y' = y^2$, $y(1) = 1$. ¿Para qué valor de x la solución existe realmente?

13. Repetir las instrucciones del problema 12 para $y' - y^2 = 4$, $y(0) = 0$.

14. Demostrar que $f(x, y)$ del problema 13 satisface una condición de Lipschitz en R (ver la figura 28).

15. Encontrar todas las soluciones de $y' = 4\sqrt{y}$, $y(2) = 0$. ¿Satisface $4\sqrt{y}$ una condición de Lipschitz?

16. Demostrar que $f(x, y) = |\text{sen}\, y| + x$ satisface una condición de Lipschitz (4), con $M = 1$, en todo el plano xy, pero que $\partial f/\partial y$ no existe cuando $y = 0$.

17. ¿La función $f(x, y) = |x| + |y|$ satisface una condición de Lipschitz en el plano xy? ¿Existe $\partial f/\partial y$?

18. ¿La función $f(x, y) = x|y|$ del problema 8 satisface una condición de Lipshchitz en un rectángulo? ¿Existe $\partial f/\partial y$?

19. **(Ecuación diferencial lineal)** Escribir $y' + p(x)y = r(x)$ en la forma (1). Si p y r son continuas para toda x tal que $|x - x_0| \leq a$, demostrar que $f(x, y)$ de esta ecuación satisface las condiciones de los teoremas de existencia y unicidad estudiados, por lo que el problema con valor inicial correspondiente tiene una solución única. [Esto se sigue también directamente de la fórmula (4) de la sección 1.7, de donde no son necesarios estos teoremas para la ecuación diferencial *lineal*.]

20. Demostrar que en el problema 19 se cumple una condición de Lipschitz.

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 1

1. ¿Cuál es la diferencia entre una ecuación diferencial ordinaria y una parcial?

2. ¿Cuántas constantes arbitrarias contiene una solución general de una ecuación diferencial de primer orden? ¿Cuántas condiciones se requieren para determinar tales constantes?

3. ¿Qué se entiende por una solución particular de una ecuación diferencial de primer orden? ¿Por una solución singular?

4. ¿Qué hecho permite hablar de *la* solución general de una ecuación diferencial de primer orden?

5. ¿Todas las ecuaciones diferenciales de primer orden tienen solución? ¿Solución general? (Explicar las respuestas.)

6. ¿Qué se entiende por crecimiento y decaimiento exponencial? ¿Cuál es la ecuación diferencial correspondiente? ¿En qué aplicaciones se presenta?

7. ¿Por qué los circuitos eléctricos llevan a ecuaciones diferenciales?

8. Hacer una lista de algunos de los problemas de mecánica tratados en el texto y en los problemas de las secciones.

9. ¿Qué son las trayectorias ortogonales? ¿Por qué llevan a ecuaciones diferenciales? ¿En qué problemas prácticos se presentan?

10. ¿Qué es un campo direccional? ¿Para qué sirve?

Encontrar la solución general usando uno de los métodos discutidos en este capítulo.

11. $(2xe^{2xy} + \cos y)y' + 2ye^{2xy} = 0$

12. $xy' = (y - x)^3 + y$

13. $y' = 2x(y + x^2 - 1)$

14. $y' = x^3y^2 + xy$

15. $y' = (1 + x)(1 + y^2)$

16. $x^2y' + 2xy = \text{senh}\, 3x$

17. $y' + xy = xy^{-1}$

18. $y' + y \cos x = \cos x$

19. $2xyy' + 3y^2 + 4x = 0$

20. $(1 + xy)y' + y^2 = 0$

21. $2x \tan y\, dx + \sec^2 y\, dy = 0$

22. $(x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0$

23. $y' - x^{-1}y + x^{-1}(x - y)^3 = 0$

24. $(1 + x^2)\, dy = -2xy\, dx$

25. $y' = (y - x)/(y + x)$

Resolver los siguientes problemas con valor inicial.

26. $y' = (1 - x)/(1 + y), \quad y(1) = 0$
27. $4x\,dx + 9y\,dy = 0, \quad y(3) = 0$
28. $3x^{-1}y^2\,dx - 2y\,dy = 0, \quad y(4) = 8$
29. $x^2y' + 2xy - x + 1 = 0, \quad y(1) = 0$
30. $xy' - 3y = x^4(e^x + \cos x) - 2x^2, \quad y(\pi) = \pi^3e^\pi + 2\pi^2$
31. $y' - y \cot x = 2x - x^2 \cot x, \quad y(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{4}\pi^2 + 1$
32. $xy' + y = x^2y^2, \quad y(0.5) = 0.5$
33. $(2x + e^y)\,dx + xe^y\,dy = 0, \quad y(1) = 0$
34. $y' + \csc y = 0, \quad y(4.1) = -6.3$
35. $(2x + y^4)y' = y, \quad y(24) = 2$

36. Aplicar el método de Picard a $y' = xy$, $y(0) = 2$. Trazar y_1, y_2, y_3 y la solución exacta para $-2 \leq x \leq 2$. Calcular $y_1(1)$, $y_2(1)$, $y_3(1)$ y comparar los valores con el valor exacto $y(1) = 2\sqrt{e} \approx 3.297$.
37. Repetir las instrucciones del problema 36 para el problema $y' = 2xy$, $y(0) = 1$. [En este caso, $y(1) = e = 2.718 \cdots$.]

Encontrar las trayectorias ortogonales. Trazar algunas de las curvas y sus trayectorias.

41. El uranio $_{92}U^{232}$ es radiactivo, con vida media $H = 74$ años. ¿Qué porcentaje desaparecerá en un año? ¿En 10 años? ¿En 37 años?
42. Demostrar que la vida media H de una sustancia radiactiva puede determinarse a partir de dos mediciones $y_1 = y(t_1)$ y $y_2 = y(t_2)$ de las cantidades presentes en los tiempos t_1 y t_2 por medio de la fórmula $H = (t_2 - t_1)(\ln 2)/\ln(y_1/y_2)$.
43. Si la razón de crecimiento de un cultivo de bacterias es proporcional al número de bacterias presentes y después de 1 día es 1.1 veces el número original, ¿en qué intervalo de tiempo el número de bacterias se habrá (a) duplicado, (b) triplicado?
44. Una barra de metal cuya temperatura es 25 °C se coloca en agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo se requiere para calentar la barra a 99 °C, si la temperatura de la barra después de 1 min de calentamiento es 26 °C? Hacer primero una conjetura y después hacer los cálculos.
45. **(Evaporación)** Dos líquidos hierven en un recipiente. Se encuentra que la relación de las cantidades de cada líquido que evaporan en cualquier instante es proporcional a la relación de las cantidades x y y que permanecen en estado líquido. Demostrar que $y' = ky/x$ y resolver esta ecuación diferencial.
46. Si $R = 12$ ohms, $L = 0.02$ milihenrys, $E = E_0 = const$ e $I(0) = 0$ en un circuito RL, ¿en cuánto tiempo la corriente $I(t)$ alcanza prácticamente (en teoría el 99.9% de) su valor final? Empezar con una conjetura.
47. Si $L = 10$ en el problema 46, ¿qué valor de R debería escogerse para que $I(t)$ alcance prácticamente (en teoría el 99.9% de) su valor final después de 1 s? Empezar con una conjetura.
48. **(Marcapasos cardiaco)** En la figura 30 se muestra un marcapasos cardiaco que consta de un capacitor de capacitancia C, una batería de voltaje E_0 y un interruptor que se mueve periódicamente de A (periodo de carga $t_1 < t < t_2$ del capacitor) a B (periodo de descarga $t_2 < t < t_3$ durante el cual el capacitor envía un estímulo eléctrico al corazon, el cual actúa como un resistor de resistencia R). Encontrar la corriente durante el periodo de descarga,

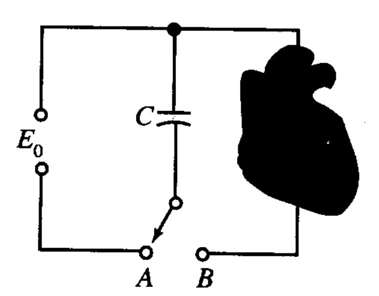


Figura 30. Marcapasos cardiaco.

suponiendo que el periodo de carga es tal que la carga en el capacitor es el 99% de su valor máximo posible.

49. **(Fricción)** Si un cuerpo se desliza sobre una superficie, experimenta una fricción F (una fuerza opuesta a la dirección del movimiento). Experimentos indican que $|F| = \mu|N|$ (*ley de Coulomb*[22] *de fricción cinética sin lubricación*), donde N es la fuerza normal (la fuerza que mantiene en contacto a ambas superficies; ver la figura 31) y la constante de proporcionalidad μ se llama el *coeficiente de fricción cinética.* En la figura 31, suponer que el cuerpo pesa 45 N (una 10 lb; ver la tabla de conversiones), $\mu = 0.20$ (que corresponde a acero sobre acero), Ó = 30°, el plano inclinado tiene 10 metros de largo, la velocidad inicial es cero y la resistencia del aire es omisible. Encontrar la velocidad del cuerpo al final del plano inclinado.

50. Si las isotermas en un cuerpo de material homogéneo son $T(x, y) = y - x^3 = const$, ¿cuáles son las curvas del flujo térmico?

51. La **ley de acción de la masa** establece que bajo una temperatura constante, la velocidad de una reacción química es proporcional al producto de las concentraciones de los reactivos. Una reacción bimolecular $A + B \rightarrow M$ combina a moles por litro de una sustancia A y b moles de una sustancia B. Si $y(t)$ es el número de moles por litro que ya han reaccionado después del tiempo t, la rapidez de reacción es $dy/dt = k(a - y)(b - y)$. Resolver esta ecuación, suponiendo que $a \neq b$.

52. En una habitación que contiene 10 000 pies cúbicos de aire, entran 200 pies cúbicos de aire puro y 200 pies cúbicos de aire contaminado por minuto y la mezcla (que es prácticamente uniforme por la acción de los ventiladores de la habitación) se extrae a razón de 400 pies cúbicos por minuto. Encontrar la cantidad de aire puro $y(t)$ [pies cúbicos] en cualquier tiempo, suponiendo que $y(0) = 0$.

53. La curva solución de dr/dÚ + (a^2/r) sen 2Ú, $r^2(0) = a^2$, $a \neq 0$, se conoce como **lemniscata**. Encontrarla y trazarla. (r y Ú son coordenadas polares.)

54. Encontrar todas las curvas tales que para cada tangente, el segmento entre los ejes de coordenadas sea bisecado por el punto de tangencia.

55. Encontrar todas las curvas tales que la tangente en cada punto (x, y) interseque al eje x en $(x - 1, 0)$.

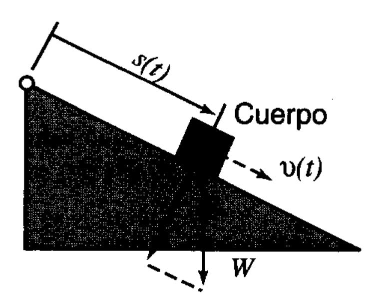


Figura 31. Problema 49.

[22] Ver la nota de pie de página 15 en la sección 1.8.

Resumen del capítulo 1
Ecuaciones diferenciales de primer orden

En este capítulo se tratan las **ecuaciones diferenciales de primer orden** y sus aplicaciones; éstas son ecuaciones

(1) $$F(x, y, y') = 0 \quad \text{o en la forma explícita} \quad y' = f(x, y)$$

en las que interviene la derivada y' de una función y desconocida, funciones dadas de x y, quizás, la propia función y. Se empezó con los conceptos básicos (sección 1.1), luego se consideraron los métodos para obtener las soluciones (secciones 1.2–1.9) y, por último, las ideas sobre la aproximación y la existencia de las soluciones (secciones 1.10, 1.11).

Por lo general una ecuación diferencial tiene una **solución general**, es decir, una solución en la que interviene una constante arbitraria, que se denota por c. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones es necesario encontrar una solución que satisface una condición dada, que surge del sistema físico o de otros campos del cual la ecuación es un modelo matemático. Esto lleva al concepto de **problema con valor inicial**

(2) $$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (x_0, y_0 \text{ números dados})$$

en el que la **condición inicial** $y(x_0) = y_0$ se usa para determinar una **solución particular**, es decir, una solución obtenida a partir de la solución general al tomar un valor específico de c. Geométricamente, una solución general representa una familia de curvas y cada solución particular corresponde a una curva de esta familia.

Probablemente las ecuaciones más simples sean las **ecuaciones separables**, aquéllas que pueden escribirse en la forma $g(y)\,dy = f(x)\,dx$, de tal modo que pueden resolverse integrando ambos miembros (secciones 1.2, 1.3). Este método puede aplicarse también a algunas otras ecuaciones al hacer primero las sustituciones adecuadas (sección 1.4).

Una **ecuación exacta**

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

es aquélla para la que $M\,dx + N\,dy$ es una diferencial exacta

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy,$$

de donde se obtiene la solución implícita $u(x, y) = c$ (sección 1.5). Este método se aplica también a las ecuaciones no exactas que pueden hacerse exactas al multiplicarlas por alguna función F, llamada **factor integrante** (sección 1.6).

Las **ecuaciones lineales** (sección 1.7)

(3) $$y' + p(x)y = r(x)$$

son de ese tipo. Para ellas un factor integrante es $F(x) = \exp(\int p(x)\, dx)$ y lleva a la fórmula de la solución (4), sección 1.7. Ciertas ecuaciones no lineales pueden reducirse a la forma lineal al hacer la sustitución de nuevas variables. Esto es válido para la **ecuación de Bernoulli** $y' + p(x)y = g(x)y^a$ (sección 1.7).

En varios sitios se incluyen **aplicaciones**. Las secciones que se ocupan por completo de aplicaciones son la 1.3 sobre ecuaciones separables, la 1.8 sobre ecuaciones lineales aplicadas a **circuitos eléctricos** y la 1.9 sobre **trayectorias ortogonales**, es decir, las curvas que intersecan a curvas dadas en ángulos rectos.

Los **campos direccionales** (sección 1.10) ayudan a trazar familias de curvas solución, por ejemplo, para adquirir una idea de su comportamiento general.

Con el **método de iteracción de Picard** (sección 1.10) se obtienen soluciones aproximadas de problemas con valor inicial por iteración. Es importante como fundamento teórico de los **teoremas de existencia y unicidad de Picard** (sección 1.11).

Capítulo

2

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Las ecuaciones diferenciales ordinarias pueden dividirse en dos grandes clases, a saber, las **ecuaciones lineales** y las **ecuaciones no lineales**. En tanto que las ecuaciones no lineales en general son difíciles, las ecuaciones lineales son mucho más sencillas debido a que las propiedades de sus soluciones pueden caracterizarse de una manera general y a que se cuenta con métodos estándares para resolver muchas de estas ecuaciones.

En este capítulo se consideran las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, las ecuaciones **homogéneas** en las secciones **2.1-2.7** y las **no homogéneas** en las secciones **2.8-2.13**. Hay dos razones principales para centrar la atención en las ecuaciones de *segundo* orden. Primera, tienen importantes aplicaciones en la mecánica (secciones 2.5, 2.11) y en la teoría de los circuitos eléctricos (sección 2.12), lo que hace que sean de mayor importancia que las ecuaciones lineales de órdenes superiores. Segunda, su teoría es típica de las ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden (pero con fórmulas más simples que las de casos de órdenes superiores), por lo que la transición a ecuaciones de órdenes superiores (en el siguiente capítulo) implica tan sólo un número reducido de ideas nuevas (si bien con un aumento de las dificultades técnicas).

Los **métodos numéricos** para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden se incluyen en la sección 20.3, la cual es independiente de las demás secciones del capítulo 20.

(En el capítulo 5 se considerarán las ecuaciones de Legendre, de Bessel y la hipergeométrica.)

Prerrequisitos para este capítulo: Capítulo 1, en particular la sección 1.7.
Secciones que pueden omitirse en un curso más corto: 2.4, 2.7, 2.10, 2.12, 2.13.
Bibliografía: Apéndice 1, parte A.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

2.1 ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS

El estudiante ha tratado ya las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden (secciones 1.7, 1.8) y a continuación se definirán y considerarán las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Ecuación diferencial lineal de segundo orden

Una ecuación diferencial de segundo orden se llama **lineal** si puede escribirse

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{1}$$

y **no lineal** si no puede escribirse en esta forma.

El rasgo característico de la ecuación (1) consiste en que es lineal en la función desconocida y y sus derivadas, en tanto que p y q así como r en el segundo miembro pueden ser cualesquiera funciones dadas de x. Si el primer término es, por ejemplo, $f(x)y''$, será necesario dividir entre $f(x)$ para obtener la "forma estándar" (1), con y'' como primer término, lo cual es práctico.

Si $r(x) \equiv 0$ (esto es, $r(x) = 0$ para todas las x consideradas), entonces (1) se reduce a

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

y se llama **homogénea**. Si $r(x) \not\equiv 0$, entonces (1) se llama **no homogénea**. Esto es similar a la sección 1.7.

Las funciones p y q en (1) y (2) se denominan los **coeficientes** de las ecuaciones.

Un ejemplo de una ecuación diferencial lineal no homogénea es

$$y'' + 4y = e^{-x} \operatorname{sen} x.$$

Un ejemplo de una ecuación lineal homogénea es

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0.$$

Ejemplos de ecuaciones diferenciales no lineales son

$$x(y''y + y'^2) + 2y'y = 0$$

y

$$y'' = \sqrt{y'^2 + 1}.$$

Se supondrá siempre que x varía en algún intervalo abierto I, y todos los supuestos y enunciados se referirán a este tipo de intervalo, el cual no es necesario definir en cada caso. (Recuérdese por la nota de pie de página 1 en la sección 1.1 que I puede ser el eje x completo.)

Una **solución** de una ecuación diferencial (lineal o no lineal) de segundo orden en algún intervalo abierto $a < x < b$ es una función $y = h(x)$ que tiene derivadas $y' = h'(x)$ y $y'' = h''(x)$ y satisface la ecuación diferencial para toda x de ese intervalo; es decir, la

ecuación se convierte en una identidad si la función desconocida y y sus derivadas se sustituyen por h y sus respectivas derivadas.

Las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden tienen muchas aplicaciones básicas, como se verá. Algunas de ellas son muy simples, siendo sus soluciones funciones comunes en cálculo. Otras son más complicadas, siendo sus soluciones funciones superiores (por ejemplo, funciones de Bessel) que se presentan en problemas de ingeniería.

Ecuaciones homogéneas: Principio de superposición o de linealidad

Se inicia ahora la discusión de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden (secciones 2.1-2.7). Las ecuaciones no homogéneas se tratan en las secciones 2.8-2.13.

EJEMPLO 1 Soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea

$y = e^x$ y $y = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' - y = 0$$

para toda x ya que para $y = e^x$ se obtiene $(e^x)'' - e^x = e^x - e^x = 0$ al igual que para $y = e^{-x}$, como el estudiante deberá comprobar.

Incluso es posible dar un importante paso hacia adelante. Pueden multiplicarse e^x y e^{-x} por constantes diferentes, por ejemplo, -3 y 8 (u otros dos números cualesquiera) y después tomar la suma

$$y = -3e^x + 8e^{-x}$$

y comprobar que se trata de otra solución para toda x de la ecuación homogénea considerada ya que

$$(-3e^x + 8e^{-x})'' - (-3e^x + 8e^{-x}) = -3e^x + 8e^{-x} - (-3e^x + 8e^{-x}) = 0.$$ ∎

Este ejemplo ilustra el hecho de suma importancia de que para una ecuación ***lineal homogénea*** (2), siempre es posible obtener nuevas soluciones a partir de soluciones conocidas mediante la multiplicación por constantes y la suma. Desde luego, esto es de gran utilidad ya que de esta manera pueden obtenerse soluciones adicionales a partir de soluciones dadas. Ahora de y_1 $(= e^x)$ y y_2 $(= e^{-x})$ se obtiene una función de la forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad (c_1,\ c_2 \text{ constantes arbitrarias}). \tag{3}$$

Esta expresión recibe el nombre de **combinación lineal** de y_1 y y_2. Usando este concepto puede formularse ahora el resultado sugerido por el ejemplo, llamado con frecuencia el **principio de superposición** o **principio de linealidad**.

Teorema 1 Teorema fundamental 1 para la ecuación homogénea (2)

Para una ecuación diferencial lineal homogénea (2), *cualquier combinación lineal de dos soluciones en un intervalo abierto I es también una solución de* (2) *en I. En particular, para una ecuación de este tipo, las sumas y los múltiplos constantes de las soluciones también son soluciones.*

Demostración. Sean y_1 y y_2 soluciones de (2) en I. Entonces al sustituir $y = c_1y_1 + c_2y_2$ y sus derivadas en (2), y aplicando la conocida regla $(c_1y_1 + c_2y_2)' = c_1y_1' + c_2y_2'$, etc., se obtiene

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = 0, \end{aligned}$$

puesto que en el último renglón $(\cdots) = 0$, ya que y_1 y y_2 son soluciones, por hipótesis. Con esto se demuestra que y es una solución de (2) en I. ∎

¡Cuidado! Recuérdese siempre este muy importante teorema, pero no se olvide que ***no es válido*** para *ecuaciones lineales no homogéneas* o *ecuaciones no lineales*, como se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 2 Una ecuación diferencial lineal no homogénea

Por sustitución se encuentra que las funciones $y = 1 + \cos x$ y $y = 1 + \operatorname{sen} x$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$y'' + y = 1,$$

pero las siguientes funciones *no* son soluciones de esta ecuación diferencial:

$$2(1 + \cos x) \qquad \text{y} \qquad (1 + \cos x) + (1 + \operatorname{sen} x).$$ ∎

EJEMPLO 3 Una ecuación diferencial no lineal

Por sustitución se encuentra que las funciones $y = x^2$ y $y = 1$ son soluciones de la ecuación diferencial no lineal

$$y''y - xy' = 0,$$

pero las siguientes funciones *no* son soluciones de esta ecuación diferencial:

$$-x^2 \qquad \text{y} \qquad x^2 + 1.$$ ∎

Problema con valor inicial. Solución general. Base

Para una ecuación diferencial de *primer orden*, una solución general incluía una constante arbitraria c, y en un problema con valor inicial se usó una condición inicial $y(x_0) = y_0$ para obtener una solución particular en la que c tenía un valor definido. La idea de una solución general era obtener todas las soluciones posibles, y se sabe que para ecuaciones *lineales* (sección 1.7) este es el caso (pues no tienen soluciones singulares). Se amplía ahora esta idea a las ecuaciones de segundo orden:

Para las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden (2), una solución general será de la forma

$$y = c_1y_1 + c_2y_2, \tag{4}$$

una combinación lineal de dos soluciones que incluyen dos constantes arbitrarias c_1, c_2. Un **problema con valor inicial** se compone ahora de la ecuación (2) y dos **condiciones iniciales**

$$y(x_0) = K_0, \qquad y'(x_0) = K_1, \tag{5}$$

que determinan los valores K_0 y K_1 de la solución y su derivada (la pendiente de la curva) en el mismo punto dado x_0 del intervalo abierto considerado. Se usará (5) para obtener a partir de (4) una solución particular de (2), en la que c_1 y c_2 tienen valores específicos.

Esto se ilustrará usando un ejemplo simple, el cual también ayudará a ver que es necesario imponer una condición sobre y_1 y y_2 en (4).

EJEMPLO 4 Problema con valor inicial

Resolver el problema con valor inicial

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = 5, \qquad y'(0) = 3.$$

Solución. Primer paso. e^x y e^{-x} son soluciones (por el ejemplo 1) y se toma

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x}.$$

(Esta resultará ser una solución general según se define más adelante.)

Segundo paso. A partir de las condiciones iniciales, dado que $y' = c_1e^x - c_2e^{-x}$, se obtiene

$$y(0) = c_1 + c_2 = 5$$

$$y'(0) = c_1 - c_2 = 3.$$

Por tanto, $c_1 = 4$, $c_2 = 1$. *Respuesta.* $y = 4e^x + e^{-x}$.

Observación. Si se hubieran tomado $y_1 = e^x$ y $y_2 = le^x$ para obtenerse

$$y = c_1e^x + c_2le^x = (c_1 + c_2l)e^x = y',$$

la solución no habría sido lo suficientemente general para satisfacer las dos condiciones iniciales y resolver el problema. ¿Por qué? Pues bien, las funciones y_1 y y_2 presentes son proporcionales, $y_1/y_2 = 1/l$, en tanto que antes no lo eran, $y_1/y_2 = e^x/e^{-x} = e^{2x}$. Este es el punto. Motiva la siguiente definición así como su importancia en relación con problemas con valor inicial. ▮

Definición (solución general, base, solución particular)

Una **solución general** de una ecuación (2) en un intervalo abierto[1] I es una solución (4) con y_1 y y_2 soluciones no proporcionales de (2) en I y c_1, c_2 constantes arbitrarias[2]. A estas y_1, y_2 se les llama entonces una **base** (o **sistema fundamental**) de (2) en I.

Una **solución particular** de (2) en I se obtiene si se asignan valores específicos a c_1 y c_2 en (4). ▮

[1] Ver la sección 1.1.

[2] Quizás sea necesario restringir el rango de las constantes en algunos casos a fin de evitar expresiones imaginarias y o casos degenerados.

Como siempre, y_1 y y_2 se llaman *proporcionales* en I si[3]

(6) $$\text{(a)} \quad y_1 = ky_2 \qquad \text{o} \qquad \text{(b)} \quad y_2 = ly_1$$

es válida para toda x en I, donde k y l son números, sean cero o no.

En realidad, la definición de base también puede formularse en términos de "independencia lineal". Se dice que dos funciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son **linealmente independientes** en un intervalo I en el que están definidas si

(7) $$k_1y_1(x) + k_2y_2(x) = 0 \quad \text{en } I \text{ implica} \quad k_1 = 0, \ k_2 = 0,$$

y se dice que son **linealmente dependientes** en I si esta ecuación también es válida para dos constantes k_1, k_2 que no sean ambas cero. Entonces, si $k_1 \neq 0$ o $k_2 \neq 0$, es posible dividir y resolver la expresión, obteniéndose

$$y_1 = -\frac{k_2}{k_1}y_2 \qquad \text{o} \qquad y_2 = -\frac{k_1}{k_2}y_1.$$

Por tanto, y_1 y y_2 son proporcionales, mientras que en caso de independencia lineal, no son proporcionales. Se llega así a la siguiente

Definición de una base (Reformulada)

Una **base de soluciones** de (2) en un intervalo I es un par y_1, y_2 de soluciones linealmente independientes de (2) en I. ∎

EJEMPLO 5 Base, solución general, solución particular

e^x y e^{-x} del ejemplo 4 forman una base de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$ para toda x. Por tanto una solución general es $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$. Esta respuesta del ejemplo 4 es una solución particular de la ecuación. ∎

EJEMPLO 6 Base, solución general

El estudiante puede comprobar que $y_1 = \cos x$ y $y_2 = \operatorname{sen} x$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + y = 0.$$

Ahora bien, $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ no son proporcionales, $y_1/y_2 = \cot x \neq$ *const*. Por tanto, forman una base de la ecuación tratada para toda x, y una solución general es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$ ∎

En la práctica, una solución general se usa principalmente para obtener soluciones particulares a partir de ella imponiendo dos condiciones iniciales (5), ya que es la *solución particular* la que describe el comportamiento único de un sistema físico o de otro campo dado. Siendo el objetivo que el estudiante adquiera experiencia en esta tarea práctica, se presentará más adelante la teoría que la respalda (en la sección 2.7); por el momento, basta saber lo siguiente. Si los coeficientes p y q de (1) y la función

[3] Si $k \neq 0$ en (a), implica (b) con $l = 1/k$, pero no cuando $k = 0$, es decir, $y_1 = 0$.

r son continuos en algún intervalo I, entonces (1) siempre tiene una solución general en I, a partir de la cual se obtiene la solución de cualquier problema con valor inicial (1), (5) en I, que es única. Asimismo, (1) no tiene **soluciones singulares** (es decir, soluciones que no pueden obtenerse a partir de la solución general).

Problemas de la sección 2.1

Propiedades generales importantes de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas. Demostrar los siguientes enunciados, los cuales se refieren a cualquier intervalo abierto fijo I, e ilustrarlos con ejemplos. Se supone aquí que $r(x) \not\equiv 0$ en (1).

1. $y \equiv 0$ es una solución de (2) (conocida como la "*solución trivial*") pero no de (1).
2. La suma de dos soluciones de (1) **no** es una solución de (1).
3. Un múltiplo $y = cy_1$ de una solución de (1) **no** es una solución de (1), a menos que $c = 1$.
4. La suma $y = y_1 + y_2$ de una solución y_1 de (1) y y_2 de (2) es una solución de (1).
5. La diferencia $y = y_1 - y_2$ de dos soluciones de (1) es una solución de (2).

Ecuaciones diferenciales de segundo orden reducibles al primer orden

Los problemas 6-19 ilustran que ciertas ecuaciones diferenciales de segundo orden pueden reducirse al primer orden.

6. Si en una ecuación de segundo orden la variable dependiente y no aparece explícitamente, la ecuación es de la forma $F(x, y', y'') = 0$. Demostrar que al hacer $y' = z$ se obtiene una ecuación diferencial de primer orden en z y que a partir de su solución se obtiene la solución de la ecuación original por integración.

Reducir al primer orden y resolver:

7. $xy'' = 2y'$
8. $y'' = y'$
9. $y'' = 2y' \coth 2x$
10. $y'' + 9y' = 0$
11. $xy'' + y' = y'^2$
12. $xy'' + y' = 0$

13. Otro tipo de ecuación reducible al primer orden es $F(y, y', y'') = 0$, en la cual la variable independiente x no aparece explícitamente. Usando la regla de la cadena, demostrar que $y'' = (dz/dy)z$, donde $z = y'$, por lo que se obtiene una ecuación de primer orden con y como variable *independiente*.

Reducir al primer orden y resolver:

14. $yy'' + y'^2 = 0$
15. $y'' + e^{2y}y'^3 = 0$
16. $y'' + y'^2 = 0$
17. $y'' + y'^3 \cos y = 0$
18. $yy'' - y'^2 = 0$
19. $y'' + (1 + y^{-1})y'^2 = 0$

20. Una partícula se mueve sobre una recta de tal modo que el producto de su velocidad y aceleración es constante, por ejemplo, 2 m²/s³. En el tiempo $t = 0$ su desplazamiento desde el origen es de 5 m y su velocidad es cero. Encontrar su posición y velocidad cuando $t =$ 9 s.
21. Encontrar la curva en el plano xy que pasa por el punto (1, 1), interseca a la recta $y = x$ en ángulo recto y satisface $xy'' + 2y' = 0$.
22. **(Cable colgante)** Puede demostrarse que la curva $y(x)$ de un cable homogéneo flexible e inextensible que cuelga entre dos puntos fijos se obtiene resolviendo $y'' = k\sqrt{1 + y'^2}$, donde la constante k depende del peso. Esta curva se conoce como *catenaria* (del latín *catena* =

cadena). Encontrar y graficar $y(x)$, suponiendo que $k = 1$ y que los puntos fijos son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ en un plano xy vertical.

Problemas con valor inicial

Comprobar que las funciones dadas forman una base de soluciones de la ecuación dada y resolver el problema con valor inicial dado.

23. $y'' - 9y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0; \quad e^{3x}, e^{-3x}$

24. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = -5, \quad y'(0) = 2; \quad \cos 2x, \text{sen } 2x$

25. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 3; \quad e^{x}, xe^{x}$

26. $y'' + \omega^2 y = 0 \quad (\omega \neq 0), \quad y(0) = -1.5, \quad y'(0) = 0; \quad \cos \omega x, \text{sen } \omega x$

27. $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -5; \quad e^{x}, e^{3x}$

28. $x^2y'' - 1.5xy' - 1.5y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -4; \quad x^{-1/2}, x^3$

29. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 5; \quad x^2, x^2 \ln x$

30. $y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 10; \quad e^{x} \cos 3x, e^{x} \sin 3x$

¿Las funciones siguientes son linealmente dependientes o independientes en el intervalo dado?

31. $x + 1, x - 1 \quad (0 < x < 1)$

32. $0, \cosh x$, cualquier intervalo

33. $\text{sen } 2x, \text{sen } x \cos x$, cualquier intervalo

34. $\ln x, \ln x^2 \quad (x > 1)$

35. $|x|x, x^2 \quad (0 < x < 1)$

36. $|x|x, x^2 \quad (-1 < x < 1)$

37. $|\cos x|, \cos x \quad (0 < x < \pi)$

38. $x^2 - 3, -3x^2 + 9 \quad (x < 0)$

39. $\cosh x, \cosh 2x$, cualquier intervalo

40. $1, e^{-2x} \quad (x > 0)$

2.2 ECUACIONES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

En esta sección y la siguiente se indica cómo resolver ecuaciones lineales homogéneas

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

cuyos coeficientes a y b son constantes. Estas ecuaciones tienen importantes aplicaciones, en especial en relación con las oscilaciones mecánicas y eléctricas, como se verá en las secciones 2.5, 2.11 y 2.12.

Para resolver (1), se recuerda de la sección 1.7 que una ecuación diferencial lineal de *primer orden* $y' + ky = 0$ con coeficiente constante k tiene como solución una función exponencial, $y = e^{-kx}$. Esto da lugar a la idea de probar como solución de (1) la función

$$y = e^{\lambda x}. \tag{2}$$

Al sustituir (2) y las derivadas

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \qquad \text{y} \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

en la ecuación (1), se obtiene

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0.$$

Por tanto, (2) es una solución de (1), si λ es una solución de la ecuación cuadrática

(3) $$\boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0.}$$

Esta ecuación se llama la **ecuación característica** (o *ecuación auxiliar*) de (1). Sus raíces son

(4) $$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b}), \qquad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b}).$$

El razonamiento seguido indica que las funciones

(5) $$y_1 = e^{\lambda_1 x} \qquad \text{y} \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

son soluciones de (1). El estudiante puede comprobarlo sustituyendo (5) en (1).

Directamente de (4) se ve que, dependiendo del signo del discriminante $a^2 - 4b$, se obtiene

(Caso I) *dos raíces reales si* $a^2 - 4b > 0$,
(Caso II) *una raíz real doble si* $a^2 - 4b = 0$
Caso III) *raíces complejas conjugadas si* $a^2 - 4b < 0$.

Los casos I y II se discuten aquí y el caso III en la siguiente sección.

Caso I. Dos raíces reales diferentes λ_1 y λ_2

En este caso,

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \qquad \text{y} \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

constituyen una base de soluciones de (1) en cualquier intervalo (porque el cociente y_1/y_2 no es constante; ver la sección 2.1). La solución general correspondiente es

(6) $$\boxed{y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.}$$

EJEMPLO 1 Solución general en el caso de raíces reales diferentes

Ahora puede resolverse $y'' - y = 0$ (del ejemplo 1 de la sección 2.1) de una manera sistemática. La ecuación característica es $\lambda^2 - 1 = 0$. Sus raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Por tanto, una base es e^x y e^{-x} que, como antes, da la solución general

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

■

EJEMPLO 2 Un problema con valor inicial en el caso de raíces reales diferentes

Resolver el problema con valor inicial

$$y'' + y' - 2y = 0, \qquad y(0) = 4, \qquad y'(0) = -5.$$

Solución. Primer paso. Solución general. La ecuación característica es $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Sus raíces son

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{9}) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{9}) = -2,$$

de donde se obtiene la solución general

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Segundo paso. Solución particular Puesto que $y'(x) = c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x}$, a partir de la solución general y de las condiciones iniciales se obtiene

$$y(0) = c_1 + c_2 = 4,$$
$$y'(0) = c_1 - 2c_2 = -5.$$

Por tanto, $c_1 = 1$ y $c_2 = 3$. *Respuesta.* $y = e^x + 3e^{-2x}$. ∎

Caso II. Raíz real doble $\lambda = -a/2$

Cuando el discriminante $a^2 - 4b = 0$, de la fórmula (4) se obtiene una sola raíz $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -a/2$ y en un principio se obtiene sólo una solución

$$y_1 = e^{-(a/2)x}$$

Para encontrar una segunda solución, necesaria para formar una base, se usa el "*método de reducción de orden*".[4] Es decir, se hace

$$y_2 = uy_1$$

y se intenta determinar la función u tal que y_2 se convierta en una solución de (1). Para ello, se sustituye $y_2 = uy_1$ y sus derivadas

$$y_2' = u'y_1 + uy_1'$$
$$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

en (1). Se obtiene así

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + a(u'y_1 + uy_1') + buy_1 = 0.$$

Agrupando términos se obtiene

$$u''y_1 + u'(2y_1' + ay_1) + u(y_1'' + ay_1' + by_1) = 0$$

[4] En realidad, se usa un caso especial del mismo. El método general se discute en la sección 2.7.

La expresión del último paréntesis es cero, ya que y_1 es una solución de (1). La expresión del primer paréntesis también es cero, ya que

$$2y_1' = -ae^{-ax/2} = -ay_1.$$

De este modo, sólo queda $u''y_1 = 0$. Por tanto, $u'' = 0$. Al integrar dos veces, $u = c_1x + c_2$. Para obtener una segunda solución independiente $y_2 = uy_1$, basta con tomar $u = x$. Entonces $y_2 = xy_1$. Puesto que estas soluciones no son proporcionales, forman una base. El resultado al que se llega es que en el caso de una raíz doble de (3) una base de soluciones de (1) en cualquier intervalo es

$$e^{-ax/2}, \qquad xe^{-ax/2}.$$

La solución general correspondiente es

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-ax/2}. \tag{7}$$

Advertencia. Si λ es una raíz *simple* de (4), entonces $(c_1 + c_2x)e^{\lambda x}$ ***no*** es una solución de (1).

EJEMPLO 3 Solución general en el caso de una raíz doble

Resolver

$$y'' + 8y' + 16y = 0.$$

Solución. La ecuación característica tiene la raíz doble $\lambda = -4$. Por tanto una base es

$$e^{-4x} \qquad \text{y} \qquad xe^{-4x}$$

y la solución general correspondiente es

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-4x}.$$

■

EJEMPLO 4 Un problema con valor inicial en el caso de una raíz doble

Resolver el problema con valor inicial

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = 1.$$

Solución. Una solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{2x}.$$

Al derivar se obtiene

$$y'(x) = c_2e^{2x} + 2(c_1 + c_2x)e^{2x}.$$

A partir de esta expresión y de las condiciones iniciales se sigue que

$$y(0) = c_1 = 3, \qquad y'(0) = c_2 + 2c_1 = 1.$$

Por tanto, $c_1 = 3$, $c_2 = -5$, y la respuesta es

$$y = (3 - 5x)e^{2x}.$$

■

El caso III de **raíces complejas conjugadas** de la ecuación característica (4) se discutirá en la sección siguiente.

Problemas de la sección 2.2

Encontrar una solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $y'' + 3y' + 2y = 0$ **2.** $y'' - 9y = 0$ **3.** $y'' + 10y' + 25y = 0$
4. $y'' + 4y' = 0$ **5.** $y'' - 6y' + 9y = 0$ **6.** $y'' - 2y' + 0.75y = 0$

Encontrar la ecuación diferencial (1) para la cual las funciones dadas forman una base de soluciones.

7. e^{2x}, e^{-3x} **8.** $e^{-\pi x}, xe^{-\pi x}$ **9.** $e^{-2x}, e^{-x/2}$
10. e^{kx}, e^{-kx} **11.** $\cosh x$, $\operatorname{senh} x$ **12.** $1, e^{-kx}$

13. Comprobar directamente que en el caso de una raíz doble, $xe^{\lambda x}$ con $\lambda = -a/2$ es una solución de (1).

14. Comprobar que $y = e^{-3x}$ es una solución de $y'' + 5y' + 6y = 0$, pero $y = xe^{-3x}$ no lo es. Explicar la respuesta.

15. Demostrar que a y b en (1) pueden expresarse en términos de λ_1 y λ_2 por las fórmulas $a = -\lambda_1 - \lambda_2$, $b = \lambda_1\lambda_2$.

16. Resolver $y'' + 3y' = 0$ (a) usando el método estudiado aquí, (b) por reducción al primer orden.

Resolver los siguientes problemas con valor inicial.

17. $y'' - 16y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 20$
18. $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$
19. $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 14$
20. $y'' + 3.7y' = 0, \quad y(-2) = 4, \quad y'(-2) = 0$
21. $y'' + 2.2y' + 0.4y = 0, \quad y(0) = 3.3, \quad y'(0) = -1.2$
22. $y'' - 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 10$
23. $4y'' - 4y' - 3y = 0, \quad y(-2) = e, \quad y'(-2) = -\frac{1}{2}e$
24. $5y'' + 16y' + 12.8y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2.3$
25. Las **bases diferentes** llevan a la misma solución. Para ilustrarlo, resolver $y'' - 9y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -6$, usando (a) e^{3x}, e^{-3x}, (b) $\cosh 3x$, $\operatorname{senh} 3x$.

2.3 CASO DE RAÍCES COMPLEJAS. FUNCIÓN EXPONENCIAL COMPLEJA

Para las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

se discute ahora el último caso en el que la ecuación característica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{2}$$

tiene raíces

$$\lambda_1 = -\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}, \qquad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \tag{3}$$

que son complejas. La ecuación (3) indica que esto ocurre cuando el discriminante $a^2 - 4b$ es negativo. Este es el caso III de la sección anterior. En este caso resulta conveniente sacar $\sqrt{-1} = i$ del radical, meter $1/2 = \sqrt{-1/4}$ en el radical y escribir

$$(4) \qquad \lambda_1 = -\tfrac{1}{2}a + i\omega, \qquad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2}a - i\omega,$$

donde $\omega = \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}$. Se observa que $e^{\lambda_1 x}$ y $e^{\lambda_2 x}$ son ahora soluciones *complejas* de (1). Pero se afirma que en este caso III, una base de soluciones *reales* de (1) en cualquier intervalo es

$$(5) \qquad y_1 = e^{-ax/2}\cos \omega x, \qquad y_2 = e^{-ax/2}\,\mathrm{sen}\,\omega x.$$

De hecho, que estas son soluciones se sigue por derivación y sustitución. Asimismo, $y_2/y_1 = \tan \omega x$ no es constante, ya que $\omega \neq 0$, de donde y_1 y y_2 no son proporcionales. La solución general correspondiente es

$$(6) \qquad \boxed{y = e^{-ax/2}(A \cos \omega x + B\,\mathrm{sen}\,\omega x).}$$

EJEMPLO 1 Raíces complejas. Solución general (6)

Encontrar una solución general de la ecuación

$$y'' - 2y' + 10y = 0.$$

Solución. La ecuación característica $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ tiene las raíces complejas conjugadas

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{1 - 10} = 1 + 3i, \qquad \lambda_2 = 1 - 3i.$$

(¡Comprobarlo!) Se obtiene así la base (5),

$$y_1 = e^x \cos 3x, \qquad y_2 = e^x\,\mathrm{sen}\,3x$$

y la solución general correspondiente (6),

$$y = e^x(A \cos 3x + B\,\mathrm{sen}\,3x).$$ ∎

Función exponencial compleja

El caso III (raíces complejas) se ha establecido y no resta nada por demostrar. Tan sólo quiere verse cómo es posible adquirir la *idea* de que y_1 y y_2 podrían ser soluciones en este caso. Se demostrará que esto se sigue de la función exponencial compleja.

La **función exponencial compleja** e^z de una variable compleja[5] $z = s + it$ se define por

$$(7) \qquad \boxed{e^z = e^{s+it} = e^s(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t).}$$

[5] Se escribe $z = s + it$ en lugar de $z = x + iy$ porque x y y se usan como variable y función desconocida, respectivamente, en las ecuaciones aquí tratadas.

Para z real igual a s, se trata de la conocida función exponencial real e^s de cálculo pues entonces $\cos t = \cos 0 = 1$ y $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} 0 = 0$. Asimismo, e^z posee propiedades muy similares a las de la función exponencial real; en particular, puede demostrarse que es derivable y que satisface $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. (Las demostraciones se encuentran en la sección 12.6). Esto puede bastar para motivar la definición (7).

Ahora en (7) se toma $z = \lambda_1 x$ con λ_1 como en (4), es decir,

$$z = s + it = \lambda_1 x = -\tfrac{1}{2}ax + i\omega x.$$

Entonces de (7) se obtiene

$$e^{-(a/2)x + i\omega x} = e^{-(a/2)x}(\cos \omega x + i \operatorname{sen} \omega x).$$

De manera similar, ya que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$, para $e^{\lambda_2 x}$ se obtiene [ver (4)]

$$e^{-(a/2)x - i\omega x} = e^{-(a/2)x}(\cos \omega x - i \operatorname{sen} \omega x).$$

Al sumar estas dos fórmulas y dividir la suma entre 2, en el segundo miembro se obtiene y_1 como se da en (5). De manera similar, al restar ambas fórmulas y dividir el resultado entre $2i$ en el segundo miembro se obtiene y_2 como se da en (5). Por el teorema fundamental 1 de la sección 2.1 se sigue que y_1 y y_2 son de nueva cuenta soluciones. Esto confirma que (6) es una solución general de (1) en el caso III (raíces complejas). ∎

Para uso posterior, se hace notar que (7) con $s = 0$ produce la llamada **fórmula de Euler**

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t. \tag{8}$$

Ejemplos adicionales. Resumen de los casos I-III

EJEMPLO 2 Problema con valor inicial (raíces complejas)

Resolver el problema con valor inicial

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 5.$$

Solución. Primer paso. Solución general. La ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ tiene las raíces complejas $-1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$. Por tanto (6) queda como

$$y(x) = e^{-x}(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x).$$

Segundo paso. Solución particular. De la primera condición inicial se obtiene $y(0) = A = 1$. La derivada de la solución general es

$$y'(x) = e^{-x}(-A \cos 2x - B \operatorname{sen} 2x - 2A \operatorname{sen} 2x + 2B \cos 2x),$$

y de la segunda condicion inicial se obtiene (ya que $\operatorname{sen} 0 = 0$)

$$y'(0) = -A + 2B = -1 + 2B = 5.$$

Por tanto, $B = 3$. *Respuesta.* $y = e^{-x}(\cos 2x + 3 \operatorname{sen} 2x)$. ∎

EJEMPLO 3 Una solución general de la ecuación

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (\omega \text{ constante, diferente de cero})$$

es

$$y = A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x.$$

Con $\omega = 1$ esto confirma el ejemplo 6 de la sección 2.1. ∎

Con esto se termina la discusión de los tres casos, la cual puede resumirse:

Caso	Raíces de (2)	Base de (1)	Solución general de (1)
I	Reales diferentes λ_1, λ_2	$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
II	Raíz real doble $\lambda = -\frac{1}{2}a$	$e^{-ax/2}, xe^{-ax/2}$	$y = (c_1 + c_2 x)e^{-ax/2}$
III	Complejas conjugadas $\lambda_1 = -\frac{1}{2}a + i\omega$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}a - i\omega$	$e^{-ax/2} \cos \omega x$ $e^{-ax/2} \operatorname{sen} \omega x$	$y = e^{-ax/2}(A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x)$

Resulta muy interesante observar que en aplicaciones de sistemas mecánicos o circuitos eléctricos, estos tres casos corresponden a tres formas diferentes de movimiento o flujo de la corriente, respectivamente. Esta relación fundamental entre teoría y práctica se discutirá en detalle en la sección 2.5 (y de nuevo en la sección 2.12).

Problemas con valores en la frontera

Las aplicaciones en ocasiones llevan a condiciones del tipo

$$\text{(9)} \qquad y(P_1) = k_1, \qquad y(P_2) = k_2.$$

Se conocen como **condiciones en la frontera**, ya que se refieren a los puntos extremos P_1, P_2 (*puntos frontera* P_1, P_2) de un intervalo I en el que se considera la ecuación (1). La ecuación (1) y las condiciones (9) juntas constituyen lo que se conoce como un **problema con valores en la frontera**. La discusión se limitará a un ejemplo típico.

EJEMPLO 4 Problema con valores en la frontera

Resolver el problema con valores en la frontera

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 3, \qquad y(\pi) = -3.$$

Solución. Primer paso. Una base es $y_1 = \cos x$, $y_2 = \operatorname{sen} x$. La solución general correspondiente es

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Segundo paso. De la condición en la frontera izquierda se obtiene $y(0) = c_1 = 3$. De la condición en la frontera derecha se obtiene $y(\pi) = c_1 \cos \pi + c_2 \cdot 0 = -3$. Ahora bien, $\cos \pi = -1$ y $c_1 = 3$, de donde esta

ecuación es válida y se observa que no produce ninguna condición para c_2. Por tanto, una solución del problema es

$$y = 3 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Aquí c_2 sigue siendo arbitraria. Esto es una sorpresa. Desde luego, la razón es que sen x es cero en 0 y π. El lector puede concluir y demostrar (problema 30) que la solución de un problema con valores en la frontera (1), (9) es única si y sólo si ninguna solución $y \neq 0$ de (1) satisface $y(P_1) = y(P_2) = 0$. ∎

Problemas de la sección 2.3

Comprobar que las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial dada y obtener a partir de ellas una solución general con valores reales de la forma (6).

1. $y = c_1 e^{3ix} + c_2 e^{-3ix}, \quad y'' + 9y = 0$

2. $y = c_1 e^{(-1+3i)x} + c_2 e^{(-1-3i)x}, \quad y'' + 2y' + 10y = 0$

3. $y = c_1 e^{-(\alpha+i)x} + c_2 e^{-(\alpha-i)x}, \quad y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + 1)y = 0$

4. $y = c_1 e^{(-5+2i)x} + c_2 e^{(-5-2i)x}, \quad y'' + 10y' + 29y = 0$

5. $y = c_1 e^{-(\alpha-i\omega)x} + c_2 e^{-(\alpha+i\omega)x}, \quad y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + \omega^2)y = 0$

Solución general. Establecer si la ecuación dada corresponde al caso I, al II o al III y encontrar una solución general que incluya funciones con valores reales.

6. $y'' + 25y = 0$

7. $y'' - 25y = 0$

8. $y'' - 8y' + 16y = 0$

9. $y'' + 6y' + 9y = 0$

10. $y'' + y' + 0.25y = 0$

11. $y'' + 2y' = 0$

12. $8y'' - 2y' - y = 0$

13. $10y'' + 6y' + 10.9y = 0$

14. $2y'' + 10y' + 25y = 0$

15. $y'' + 2y' + (\omega^2 + 1)y = 0$

Problemas con valor inicial. Resolver los siguientes problemas con valor inicial.

16. $y'' - 9y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 9$

17. $y'' + 9y = 0, \quad y(\pi) = -2, \quad y'(\pi) = 3$

18. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

19. $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 10$

20. $y'' - 6y' + 18y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$

21. $y'' + 20y' + 100y = 0, \quad y(0.1) = 3.2/e \approx 1.177, \quad y'(0.1) = -30/e \approx -11.04$

22. $10y'' + 2y' + 0.1y = 0, \quad y(10) = -40/e \approx -14.72, \quad y'(10) = 0$

23. $2y'' + y' - y = 0, \quad y(4) = e^2 - e^{-4} \approx 7.371, \quad y'(4) = \frac{1}{2}e^2 + e^{-4} \approx 3.713$

24. $y'' + 4y' + 4.25y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$

Problemas con valores en la frontera. Resolver los siguientes problemas con valores en la frontera.

25. $y'' - 16y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y(\frac{1}{4}) = 5e$

26. $y'' - 9y = 0, \quad y(-4) = y(4) = \cosh 12$

27. $y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = -1, \quad y(\frac{1}{2}) = e - 2$

28. $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(\frac{1}{2}\pi) = 14e^{-\pi} \approx 0.6050, \quad y(\frac{3}{2}\pi) = -14e^{-3\pi} \approx -0.0011$

29. $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y(\frac{1}{2}\pi) = 0$

30. Demostrar que la solución de un problema con valores en la frontera (1), (9) es única si y sólo si ninguna solución $y \neq 0$ de (1) satisface $y(P_1) = y(P_2) = 0$.

2.4 OPERADORES DIFERENCIALES. *OPCIONAL*

Esta sección ofrece una introducción a los operadores diferenciales. Se usará una sola vez y para un objetivo secundario (en la sección 3.2), de modo que puede omitirse sin interrumpir el flujo de las ideas.

Se entiende por **operador** una transformación de una función en otra función. Los operadores y las técnicas correspondientes, a las que se llama **métodos operacionales**, desempeñan un papel creciente en las matemáticas para ingeniería.

La diferenciación sugiere un operador de la siguiente manera. Sea que D denote la diferenciación con respecto a x, esto es, se escribe

$$\boxed{Dy = y'.}$$

D es un operador; transforma a y (la cual se supone diferenciable) en su derivada y'. Por ejemplo,

$$D(x^2) = 2x, \quad D(\operatorname{sen} x) = \cos x.$$

Al aplicar D dos veces, se obtiene la segunda derivada $D(Dy) = Dy' = y''$. Se escribe simplemente $D(Dy) = D^2y$, de modo que

$$Dy = y', \qquad D^2y = y'', \qquad D^3y = y''', \cdots .$$

En términos más generales,

$$L = P(D) = D^2 + aD + b \tag{1}$$

se llama **operador diferencial de segundo orden**. Aquí a y b son constantes. P sugiere "polinomio". L sugiere "lineal" (se explica en seguida). Cuando L se aplica a una función y (la cual se supone diferenciable dos veces), produce

$$\boxed{L[y] = (D^2 + aD + b)y = y'' + ay' + by.} \tag{2}$$

L es un operador ***lineal***. Por definición esto significa que se tiene

$$L[\alpha y + \beta w] = \alpha L[y] + \beta L[w]$$

para cualesquiera constantes α y β y para cuálesquiera funciones (diferenciables dos veces) y y w.

La ecuación diferencial lineal homogénea $y'' + ay' + by = 0$ puede escribirse ahora como

$$L[y] = P(D)[y] = 0. \tag{3}$$

Por ejemplo,

$$L[y] = (D^2 + D - 6)y = y'' + y' - 6y = 0. \tag{4}$$

Puesto que

$$D[e^{\lambda x}] = \lambda e^{\lambda x}, \qquad D^2[e^{\lambda x}] = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

por (2) y (3) se tiene

$$(5) \qquad P(D)[e^{\lambda x}] = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x} = 0.$$

Esto confirma el resultado de la sección 2.2 de que $e^{\lambda x}$ es una solución de (3) si y sólo si λ es una solución de la ecuación característica $P(\lambda) = 0$. Si $P(\lambda)$ tiene dos raíces diferentes, se obtiene una base. Si $P(\lambda)$ tiene una raíz doble, se necesita una segunda solución independiente. Para obtener esta solución, se derivan

$$P(D)[e^{\lambda x}] = P(\lambda)e^{\lambda x}$$

[ver (5)] ambos miembros con respecto a λ y se intercambia la derivación con respecto a λ y x, obteniéndose

$$P(D)[xe^{\lambda x}] = P'(\lambda)e^{\lambda x} + P(\lambda)xe^{\lambda x}$$

donde $P' = dP/d\lambda$. Para una raíz doble, $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$, por lo que se tiene $P(D)[xe^{\lambda x}] = 0$. Por tanto, $xe^{\lambda x}$ es la segunda solución buscada. Esto concuerda con la sección 2.2.

$P(\lambda)$ es un polinomio en λ, en el sentido usual del álgebra. Si λ se sustituye por D, se obtiene entonces el "operador polinómico" $P(D)$. El punto de este "**cálculo operacional**" es que $P(D)$ puede tratarse como una cantidad algebraica. En particular, puede factorizarse.

EJEMPLO 1 Factorización, solución de una ecuación diferencial

Factorizar $P(D) = D^2 + D - 6$ y resolver $P(D)[y] = 0$.

Solución. $D^2 + D - 6 = (D + 3)(D - 2)$. Ahora bien, $(D - 2)y = y' - 2y$ por definición. Por tanto

$$\begin{aligned}(D + 3)(D - 2)y &= (D + 3)[y' - 2y] = y'' - 2y' + 3y' - 6y \\ &= y'' + y' - 6y.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la factorización realizada es "permisible", es decir, produce el resultado correcto. Las soluciones de $(D + 3)y = 0$ y $(D - 2)y = 0$ son $y_1 = e^{-3x}$ y $y_2 = e^{2x}$. Esta es una base de $P(D)[y] = 0$ en cualquier intervalo. El estudiante deberá comprobar que el método de la sección 2.2 da el mismo resultado. No es éste un hecho inesperado, ya que $P(D)$ se factorizó del mismo modo que se factoriza el polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6$. ∎

Sin entrar en detalles en este momento, se quiere mencionar que los métodos operacionales también pueden usarse para operadores $M = D^2 + fD + g$ con coeficientes *variables* $f(x)$ y $g(x)$, pero son más difíciles y requieren mayor atención. Por ejemplo, $xD \neq Dx$ porque

$$xDy = xy' \qquad \text{but} \qquad Dxy = (xy)' = y + xy'.$$

Si el cálculo operacional se limitara a las situaciones simples ilustradas en esta sección, quizás ni siquiera valdría la pena mencionarlo. En realidad, las virtudes del

enfoque basado en el operador lineal se pone de manifiesto en problemas de ingeniería más complicados, como se verá en el capítulo 6.

Problemas de la sección 2.4

En cada caso, aplicar el operador dado a las funciones dadas.

1. $D + 3$; $x^2 + 6x - 2$, $9e^{-3x}$, $\operatorname{sen} \pi x + 2 \cos \pi x$

2. $D^2 - 2D$; xe^x, $\operatorname{senh} 2x$, $e^{2x} + 5$

3. $(D + 4)(D - 1)$; e^{-4x}, xe^{-4x}, e^x

4. $(D - 5)^2$; $5x + \cosh 5x$, e^{5x}, xe^{5x}

Encontrar una solución general de las siguientes ecuaciones.

5. $(D^2 + 2D + 2)y = 0$

6. $(4D^2 + 4D + 1)y = 0$

7. $(4D^2 - 12D + 9)y = 0$

8. $(D^2 + 6D + 12)y = 0$

9. $(\pi^2D^2 - 4\pi D + 4)y = 0$

10. $(4D^2 + 4D + 17)y = 0$

11. $(10D^2 + 12D + 3.6)y = 0$

12. $(D^2 + 2kD + k^2 + 3)y = 0$

Resolver los siguientes problemas con valor inicial.

13. $(D^2 + 4D + 5)y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$

14. $(D^2 + 5D + 6)y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$

15. $(D^2 - 2D + \pi^2 + 1)y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1 - \pi$

16. $(D^2 - 0.1D - 3.8)y = 0$, $y(0) = -3.9$, $y'(0) = 7.8$

17. $(9D^2 + 6D + 1)y = 0$, $y(-3) = 10e \approx 27.18$, $y'(-3) = -\frac{19}{3}\, e \approx -17.22$

18. $(D^2 - 0.2D + 100.01)y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 40$

19. $(D + 1)^2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$

20. Demostrar que el operador L de (2) es lineal.

2.5 MODELADO: OSCILACIONES LIBRES (SISTEMA MASA-RESORTE)

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes tienen aplicaciones básicas en la ingeniería. En esta sección se considera una importante aplicación de la mecánica (una masa que oscila en un resorte elástico). Se llega a un modelo del sistema (es decir, se establece su ecuación matemática), se resuelve y se discuten los tipos de movimientos que —hecho interesante— corresponderán con los casos I-III de las secciones 2.2 y 2.3. Entre paréntesis, el sistema mecánico que se tratará tiene un análogo exacto en los circuitos eléctricos, como se descubrirá más adelante (en la sección 2.12).

Establecimiento del modelo

Se toma un resorte ordinario, que resista tanto la compresión como la extensión, y se suspende verticalmente de un soporte fijo (figura 32). En el extremo inferior del resorte se sujeta un cuerpo de masa m. Se supone que m es tan grande que puede despre-

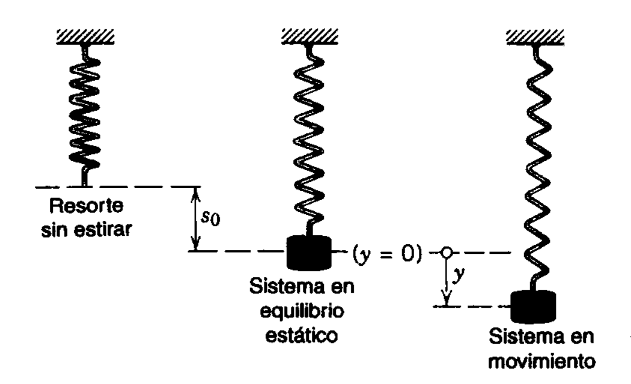


Figura 32. Sistema mecánico bajo consideración.

ciarse la masa del resorte. Si el cuerpo se tira hacia abajo cierta distancia y luego se suelta, experimenta un movimiento. Se supone que el cuerpo se mueve únicamente en sentido vertical.

Desea determinarse el movimiento de este sistema mecánico. Para ello se consideran las fuerzas[6] que actúan sobre el cuerpo durante el movimiento. Esto llevará a una ecuación diferencial, de cuya solución $y(t)$ se obtendrá el desplazamiento de la masa como una función del tiempo t.

Se elige la *dirección hacia abajo* como la positiva y, en consecuencia, las fuerzas dirigidas hacia abajo se consideran positivas y negativas las fuerzas en la dirección contraria.

La fuerza más evidente que actúa sobre el cuerpo es la *atracción de la gravedad.*

(1) $$F_1 = mg$$

donde m es la masa del cuerpo y g (= 980 cm/s^2) es la aceleración de la gravedad.

Se considera ahora la *fuerza del resorte* F_2 que actúa sobre el cuerpo. Experimentos indican que dentro de límites razonables, esta magnitud es proporcional al cambio en la longitud del resorte. Su dirección es hacia arriba si el resorte está estirado y hacia abajo si está comprimido. Por tanto,

(2) $$F_2 = -ks$$ **(ley de Hooke[7]),**

donde s es el desplazamiento vertical del cuerpo (recuérdese que el extremo superior del resorte está fijo), a la constante de proporcionalidad k se le llama *módulo del resorte* y el signo menos hace F_2 negativa (hacia arriba) para un valor positivo de s (estiramiento del resorte) y positiva (hacia abajo) para s negativa (compresión del resorte).

Si $s = 1$, entonces $F_2 = -k$. Entre más rígido sea el resorte, mayor será el valor de k.

Cuando el cuerpo está en reposo (sin movimiento), la fuerza gravitacional y la fuerza del resorte están en equilibrio, siendo su resultante la fuerza cero,

(3) $$F_1 + F_2 = mg - ks_0 = 0$$

[6] Para los **sistemas de unidades** y los factores de conversión, ver la tabla al principio del libro.

[7] Robert Hooke (1635-1703), físico inglés, precursor de Newton con respecto a la ley de la gravitación.

donde s_0 es el estiramiento del resorte que corresponde a esta posición, la cual recibe el nombre de la *posición de equilibrio estático*.

Se denota por $y = y(t)$[t tiempo] al desplazamiento del cuerpo a partir de la posición de equilibrio estático ($y = 0$), con la dirección positiva hacia abajo (figura 32). Este desplazamiento produce una fuerza adicional $-ky$ sobre el cuerpo, por la ley de Hooke. Por tanto, la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en la posición $y(t)$ es [ver (3)]

$$F_1 + F_2 - ky = -ky. \tag{4}$$

Sistema no amortiguado: ecuación y solución

Si el amortiguamiento del sistema es tan pequeño que puede despreciarse, entonces (4) es la resultante de *todas* las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. La ecuación diferencial se obtendrá entonces mediante la aplicación de la **segunda ley de Newton**

$$\text{Masa} \times \text{Aceleración} = \text{Fuerza}$$

donde *fuerza* significa la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en cualquier instante. En el caso presente, la aceleración es $y'' = d^2y/dt^2$ y la resultante la da (4). Así,

$$my'' = -ky.$$

Por tanto, el movimiento de este sistema está gobernado por la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$\boxed{my'' + ky = 0.} \tag{5}$$

Por el método de la sección 2.3 (ver el ejemplo 3) se llega a la solución general

$$\boxed{y(t) = A\cos\omega_0 t + B\,\text{sen}\,\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m}. \tag{6}$$

Al movimiento correspondiente se le llama **oscilación armónica**. En la figura 33 se muestran las formas típicas de (6) que corresponden a un desplazamiento inicial posi-

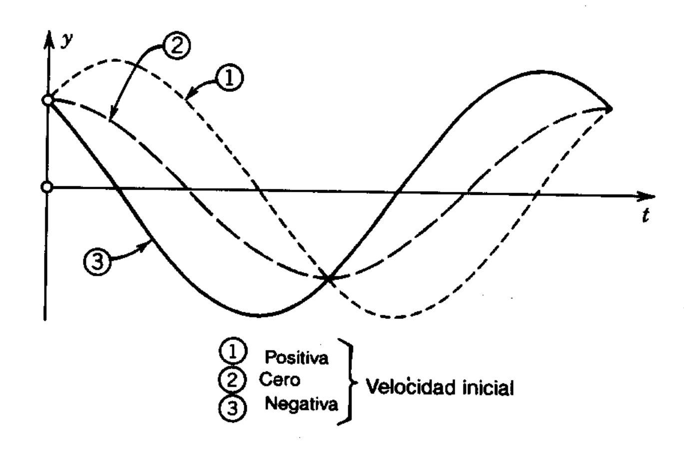


Figura 33. Oscilaciones armónicas.

tivo $y(0)$ [el cual determina $A = y(0)$ en (6)] y diferentes velocidades iniciales $y'(0)$ [cada una de las cuales determina un valor de B en (6), ya que $y'(0) = \omega_0 B$].

Al aplicar la fórmula de la suma para el coseno, el estudiante puede comprobar que (6) puede escribirse como [ver también (13) en el apéndice 3]

$$(6^*) \qquad y(t) = C \cos(\omega_0 t - \delta) \qquad \left(C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \delta = \frac{B}{A}\right).$$

Puesto que el periodo de las funciones trigonométricas de (6) es $2\pi/\omega_0$, el cuerpo ejecuta $\omega_0/2\pi$ ciclos por segundo. La cantidad $\omega_0/2\pi$ recibe el nombre de **frecuencia** de la oscilación y se mide en ciclos por segundo. Otra manera de aludir a los ciclos/segundo es hertz (Hz).[8]

EJEMPLO 1 Sistema no amortiguado. Oscilaciones armónicas

Si una bola de hierro de peso $W = 89.00$ N (unas 20 lb) estira 10.00 cm (unas 4 pulgadas) un resorte, ¿cuántos ciclos por minuto ejecutará este sistema masa-resorte)? ¿Cuál será su movimiento si el peso se jala hacia abajo otros 15.00 cm (unas 6 pulgadas)?

Solución. Por (2) se obtiene el valor $k = 89.00/0.1000 = 890.0$ [N/metro]. La masa es $m = W/g = 89.00/9.8000 = 9.082$ [kg]. Se obtiene así la frecuencia

$$\omega_0/2\pi = \sqrt{890.0/9.082}/2\pi = 9.899/2\pi = 1.576 \text{ Hz}$$

o 94.5 ciclos por minuto. Por (6) y las condiciones iniciales, $y(0) = A = 0.1500$ [metros] y $y'(0) = \omega_0 B = 0$. Por tanto el movimiento es

$$y(t) = 0.1500 \cos 9.899t \text{ [metros]} \qquad \text{o} \qquad 0.492 \cos 9.899t \text{ [ft]}.$$

Si el lector tiene oportunidad de experimentar con un sistema masa-resorte, no la desaproveche. Se sorprenderá de la coincidencia entre teoría y experimentación, por lo general con un margen de error del uno por ciento si las mediciones se hacen con cuidado. ∎

Sistema amortiguado: ecuación y soluciones

Si la masa se conecta a un amortiguador (figura 34), entonces es necesario tomar en consideración el medio viscoso de amortiguamiento correspondiente. La fuerza de

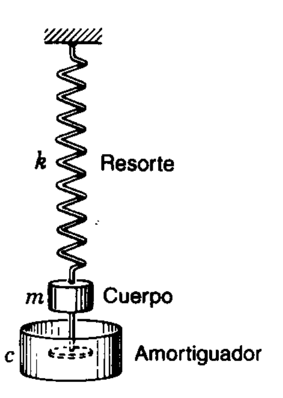


Figura 34. Sistema amortiguado.

[8] HEINRICH HERTZ (1857-1894), físico alemán, quien descubrió las ondas electromagnéticas y realizó importantes aportaciones a la electrodinámica.

amortiguamiento correspondiente tiene dirección opuesta al movimiento instantáneo y se supone que es proporcional a la velocidad $y' = dy/dt$ del cuerpo. Esta es generalmente una buena aproximación, al menos para velocidades pequeñas. Por tanto, la fuerza de amortiguamiento es de la forma

$$F_3 = -cy'.$$

Se demuestra que la *constante de amortiguamiento* c es positiva. Si y' es positiva, el cuerpo se mueve hacia abajo (en la dirección y positiva) y $-cy'$ debe ser una fuerza dirigida hacia arriba, es decir, por convención, $-cy' < 0$, lo cual implica $c > 0$. Para y' negativa el cuerpo se mueve hacia arriba y $-cy'$ debe representar una fuerza dirigida hacia abajo, es decir, $-cy' > 0$, lo cual implica $c > 0$.

La resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es ahora [ver (4)]

$$F_1 + F_2 + F_3 = -ky - cy'.$$

Por tanto, por la segunda ley de Newton,

$$my'' = -ky - cy',$$

y se ve que el movimiento del sistema mecánico amortiguado está gobernado por la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$my'' + cy' + ky = 0. \tag{7}$$

La ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0.$$

Las raíces son

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}.$$

Usando las notaciones abreviadas

$$\alpha = \frac{c}{2m} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}, \tag{8}$$

puede escribirse

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta.$$

La forma de la solución de (7) dependerá del amortiguamiento y, como en las secciones 2.2 y 2.3, se tienen los tres casos siguientes:

Caso I.	$c^2 > 4mk$. *Raíces reales diferentes* λ_1, λ_2.	**(Sobreamortiguamiento)**
Caso II.	$c^2 = 4mk$. *Una raíz real doble.*	**(Amortiguamiento crítico)**
Caso III.	$c^2 < 4mk$. *Raíces complejas conjugadas.*	**(Subamortiguamiento)**

Los tres casos se discutirán por separado.

Caso I. Sobreamortiguamiento

Si la constante de amortiguamiento c es tan grande que $c^2 > 4mk$, entonces λ_1 y λ_2 son raíces reales diferentes y la solución general de (7) es

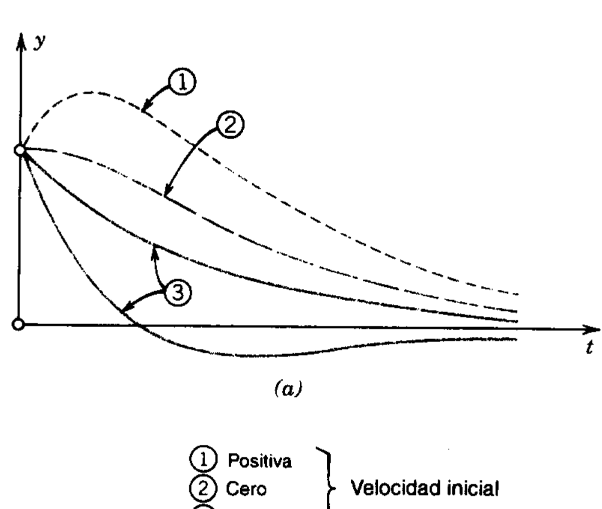
$$y(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}. \tag{9}$$

Se ve que en este caso el cuerpo no oscila. Para $t > 0$ ambos exponentes de (9) son negativos porque $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\beta^2 = \alpha^2 - k/m < \alpha^2$. Por tanto, ambos términos de (9) tienden a cero cuando t tiende a infinito. Hablando en términos prácticos, después de un tiempo lo suficientemente largo la masa estará en reposo en la posición de equilibrio estático ($y = 0$). Esto tiene sentido ya que el amortiguamiento toma energía del sistema y no hay ninguna fuerza externa que mantenga el movimiento. En la figura 35 se muestra (9) para algunas condiciones iniciales típicas.

Caso II. Amortiguamiento crítico

Si $c^2 = 4mk$, entonces $\beta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ y la solución general es

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}. \tag{10}$$



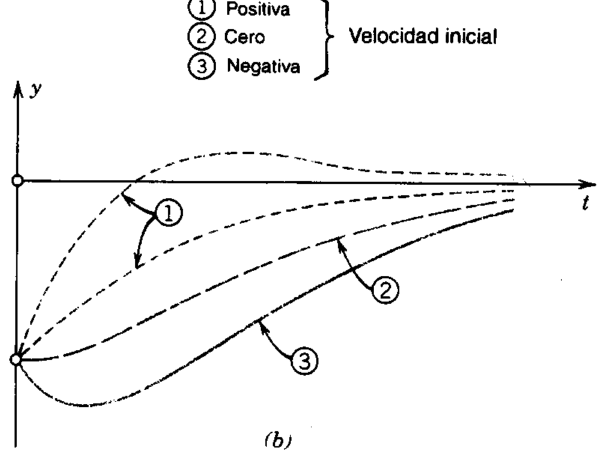


Figura 35. Movimientos típicos en el caso de sobreamortiguamiento.
(*a*) Desplazamiento inicial positivo
(*b*) Desplazamiento inicial negativo

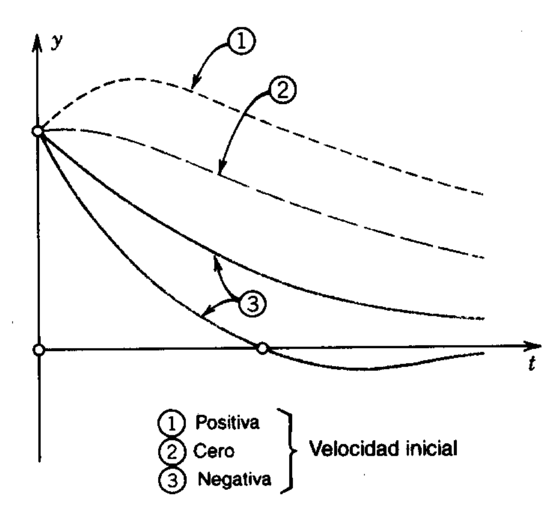


Figura 36. Amortiguamiento crítico.

Puesto que la función exponencial nunca es cero y $c_1 + c_2 t$ puede tener a lo sumo un cero positivo, se sigue que el movimiento puede pasar a lo sumo una vez por la posición de equilibrio ($y = 0$). Si las condiciones iniciales son tales que c_1 y c_2 tienen el mismo signo, este paso no ocurre en absoluto. Esto es similar al caso I. En la figura 36 se muestran las formas típicas de (10).

Caso III. Subamortiguamiento

Este es el caso más interesante. Si la constante de amortiguamiento c es tan pequeña que $c^2 < 4mk$, entonces β en (8) es un número imaginario puro, esto es,

$$(11) \quad \beta = i\omega^* \quad \text{donde} \quad \omega^* = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \quad (> 0).$$

(Se escribe ω^* a fin de reservar ω para la sección 2.11.) Las raíces de la ecuación característica son números complejos conjugados,

$$\lambda_1 = -\alpha + i\omega^*, \qquad \lambda_2 = -\alpha - i\omega^*$$

[con α dada en (8)], y la solución general es

$$\textbf{(12)} \quad \boxed{y(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega^* t + B \operatorname{sen} \omega^* t) = Ce^{-\alpha t} \cos (\omega^* t - \delta)}$$

donde $C^2 = A^2 + B^2$ y $\tan \delta = B/A$ [como en (6*)].

Esta solución representa oscilaciones amortiguadas. Puesto que $\cos (\omega^* t - \delta)$ varía entre -1 y 1, la curva de la solución está entre las curvas $y = Ce^{\alpha t}$ y $y = -Ce^{\alpha t}$ en la figura 37, tocando estas curvas cuando $\omega^* t - \delta$ es un múltiplo entero de π.

La frecuencia es $\omega^*/2\pi$ ciclos por segundo. Por (11) se ve que entre menor sea c (> 0), más grande será ω^* y se harán más rápidas las oscilaciones. Cuando c tiende a cero, ω^* tiende al valor $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ correspondiente a la oscilación armónica (6).

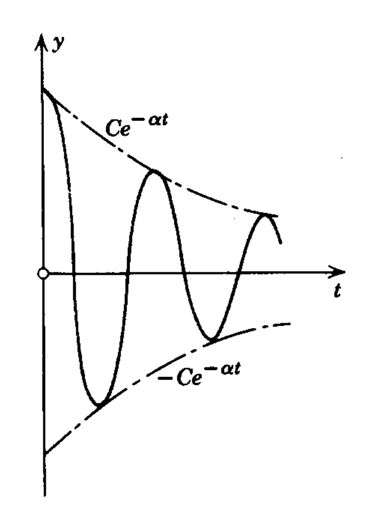


Figura 37. Oscilación amortiguada en el caso III.

EJEMPLO 2 Los tres casos de movimiento amortiguado

¿Cómo cambia el movimiento del ejemplo 1 si el sistema tiene un amortiguamiento dado por

(I) $c = 200.0$ kg/s,

(II) $c = 179.8$ kg/s,

(III) $c = 100.0$ kg/s?

Solución. Resulta instructivo estudiar y comparar estos casos con el comportamiento del sistema del ejemplo 1.

(I) El problema es

$$9.082y'' + 200.0y' + 890.0y = 0, \qquad y(0) = 0.1500 \text{ [metros]}, \qquad y'(0) = 0.$$

La ecuación característica tiene las raíces $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \beta = -11.01 \pm 4.822$, de donde $\lambda_1 = -6.190$, $\lambda_2 = -15.83$. Por (9) y las condiciones iniciales, $c_1 + c_2 = 0.1500$, $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 0$. La solución es

$$y(t) = 0.2463e^{-6.190t} - 0.0963e^{-15.83t}.$$

Tiende a cero cuando $t \to \infty$. La manera en que lo hace es muy rápida. Después de unos cuantos segundos es prácticamente cero; esto es, el cuerpo está en reposo.

(II) El problema es como antes, con $c = 179.8$ en lugar de 200. Puesto que $c^2 = 4mk$, se obtiene la raíz doble $\lambda = -9.899$. Por (10) y las condiciones iniciales, $c_1 = 0.1500$, $c_2 + \lambda c_1 = 0$, $c_2 = 1.485$. La solución es

$$y(t) = (0.150 + 1.485t)e^{-9.899t}.$$

Disminuye rápidamente hasta cero.

(III) El problema es como antes, con $c = 100$. Las raíces son números complejos conjugados, $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\omega^* = -5.506 \pm 8.227i$. Por (12) y las condiciones iniciales, $A = 0.1500$, $-\alpha A + \omega^* \beta = 0$ o $B = 0.1004$. Se obtiene así la solución

$$y(t) = e^{-5.506t}(0.1500 \cos 8.227t + 0.1004 \operatorname{sen} 8.227t).$$

Estas oscilaciones amortiguadas son aproximadamente 17% más lentas que las oscilaciones armónicas del ejemplo 1. ∎

En toda esta sección se trataron **movimientos libres** de sistemas masa–resorte. Éstos se encuentran gobernados por ecuaciones diferenciales homogéneas, como se ha visto. Los **movimientos forzados** bajo la influencia de una "fuerza impulsora"

llevan a ecuaciones no homogéneas y se estudiarán en la sección 2.11, después de haber aprendido cómo se resuelven estas ecuaciones.

Problemas de la sección 2.5

Oscilaciones armónicas (movimiento no amortiguado)

1. Demostrar que la oscilación armónica (6) a partir del desplazamiento inicial y_0 con velocidad inicial v_0 es $y(t) = y_0 \cos \omega_0 t + (v_0/\omega_0) \operatorname{sen} \omega_0 t$ y representarla en la forma (6*).
2. Para encontrar el módulo k de un resorte S, se toma un cuerpo B, se determina su peso W, se sujeta B en S (cuyo extremo superior está fijo), se deja que B llegue a la posición de reposo y se mide el estiramiento s_0 de S. Si $W = 69.77$ N [= 15.68 lb] y $s_0 = 0.441$ metros, ¿cuál es el valor de k y cuántos ciclos por minuto ejecutará B cuando se le deje oscilar?
3. ¿Cómo cambia la frecuencia de la oscilación armónica si (i) se duplica la masa, (ii) se usa un resorte más rígido, (iii) se modifican las condiciones iniciales?
4. Si un resorte es tal que un peso de 40 N (unas 9 lb) lo estiraría 4 cm, ¿cuál sería la frecuencia de la oscilación armónica correspondiente? ¿El periodo?
5. Demostrar que la frecuencia de la oscilación armónica de un cuerpo sujeto a un resorte es $(\sqrt{g/s_0})/2\pi$, por lo que el periodo es $2\pi\sqrt{s_0/g}$, donde s_0 es la elongación indicada en la figura 32.
6. Un peso de 20.0 N (unas 4.5 lb) estira 9.8 cm un resorte, y el peso sujeto al resorte se jala hacia abajo 5 cm desde la posición de reposo y se le imprime una velocidad hacia arriba de 30.0 cm/s. Encontrar el movimiento resultante $y(t)$, suponiendo que no hay amortiguamiento.
7. Si un cuerpo está suspendido de un resorte de módulo $k_1 = 3$, el cual cuelga a su vez de un resorte de módulo $k_2 = 7$, ¿cuál es el módulo k de esta combinación de resortes?
8. ¿Cuáles son las frecuencias de oscilación de una masa $m = 5$ kg (i) en un resorte con módulo $k_1 = 10$ N/m, (ii) en un resorte con $k_2 = 20$ N/m, (iii) en los dos resortes en paralelo? Ver la figura 38.
9. **(Péndulo)** Determinar la frecuencia de oscilación del péndulo de longitud L de la figura 39. Omitir la resistencia del aire y el peso de la varilla. Suponer que θ es tan pequeño que sen $\theta \approx \theta$.
10. Un reloj tiene un péndulo de 1 metro y produce su tictac cada vez que completa una oscilación, al volver a su posición original. ¿Cuántos tictacs produce en un minuto?
11. Suponer que el sistema de la figura 40 se compone de un péndulo como el del problema 9 y dos resortes con constantes k_1 y k_2 sujetos al cuerpo que oscila y a dos muros verticales tales que $\theta = 0$ sigue siendo la posición de equilibrio estático y $\theta(t)$ conserva un valor reducido durante el movimiento. Encontrar el periodo T.
12. **(Resorte plano)** La ecuación estudiada $my'' + k_0 y = 0$ también gobierna las oscilaciones (no amortiguadas) de un cuerpo sujeto a un resorte plano (de masa despreciable) cuyo

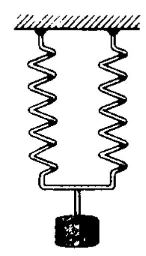



Figura 38. Problema 8.

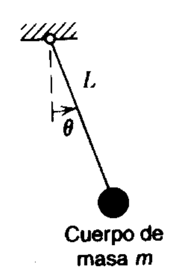


Figura 39. Péndulo.

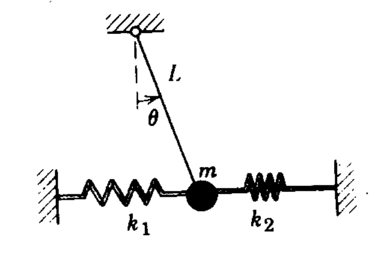


Figura 40. Problema 11.

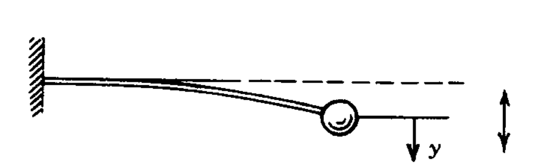


Figura 41. Problema 12 (resorte plano).

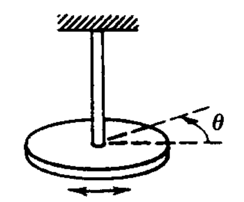


Figura 42. Problema 13 (oscilaciones de torsión).

otro extremo está fijo horizontalmente (figura 41); aquí k_0 es la constante del resorte en la ley de Hooke $F = -k_0 s$. ¿Cuál es el movimiento si el cuerpo pesa 4 N (unas 0.9 lb), el sistema alcanza el equilibrio 1 cm abajo de la recta horizontal y se inicia a partir de esta posición con una velocidad inicial hacia abajo de 20 cm/s? ¿Cuándo llegará por primera vez el cuerpo a su posición más alta?

13. **(Oscilaciones de torsión)** Las oscilaciones de torsión no amortiguadas (rotaciones hacia atrás y hacia adelante) de un volante sujeto a una varilla o a un alambre delgados elásticos (figura 42) están gobernadas por la ecuación

$$I_0\theta'' + K\theta = 0,$$

donde θ es el ángulo medido desde el estado de equilibrio, I_0 es el momento de inercia polar del volante alrededor de su centro y K es la rigidez de torsión de la varilla. Resolver la ecuación para $K/I_0 = 13.69\ \mathrm{s}^{-2}$, ángulo inicial 15° (= 0.2618 rad) y velocidad angular inicial $10°\ \mathrm{s}^{-1}$ (= $0.1745\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$).

14. **(Amortiguamiento)** Determinar el movimiento $y(t)$ del sistema mecánico descrito por (7) correspondiente al desplazamiento inicial 1, la velocidad inicial cero, la masa 1, el módulo del resorte 1 y varios valores de la constante de amortiguamiento, por ejemplo, $c = 0, 1, 2, 10$.

Caso I. Movimiento sobreamortiguado

15. Demostrar que para que (9) satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = y_0$ y $v(0) = v_0$ debe tenerse $c_1 = [(1 + \alpha/\beta)y_0 + v_0/\beta]/2$ y $c_2 = [(1 - \alpha/\beta)y_0 - v_0/\beta]/2$.
16. Demostrar que en el caso de sobreamortiguamiento, el cuerpo puede pasar por $y = 0$ a lo sumo una vez (figura 35).
17. En el problema 16, encontrar las condiciones para c_1 y c_2 tales que el cuerpo no pase por $y = 0$.
18. Demostrar que un movimiento sobreamortiguado con desplazamiento inicial cero no puede pasar por $y = 0$.

Caso II. Amortiguamiento crítico

19. Encontrar el movimiento crítico (10) que empieza desde y_0 con velocidad inicial v_0.
20. ¿Bajo qué condiciones (10) tiene un máximo o un mínimo en algún instante $t > 0$?
21. En el problema 20, representar la amplitud máxima o mínima en términos de los valores iniciales y_0 y v_0.

Caso III. Movimiento subamortiguado (oscilación amortiguada)

22. Encontrar y graficar las tres oscilaciones amortiguadas de la forma

$$y = e^{-t}(A \cos t + B \operatorname{sen} t) = Ce^{-t} \cos (t - \delta)$$

empezando desde $y = 1$ con velocidad inicial $-1, 0, 1$, respectivamente.

23. Demostrar que la oscilación amortiguada que satisface las condiciones iniciales $y(0) = y_0$, $v(0) = v_0$ es

$$y = e^{-\alpha t}[y_0 \cos \omega^* t + \omega^{*-1}(v_0 + \alpha y_0) \operatorname{sen} \omega^* t].$$

24. Demostrar que la frecuencia $\omega^*/2\pi$ del movimiento subamortiguado disminuye a medida que aumenta el amortiguamiento.
25. Demostrar que para un amortiguamiento pequeño, $\omega^* \approx \omega_0[1 - (c^2/8mk)]$.
26. ¿Para qué valor de c (en términos de m y k) es $\omega^*/\omega_0 = 99\%$? ¿95%? Calcular (a) exactamente, (b) por la fórmula del problema 25.
27. Determinar los valores de t que corresponden a los máximos y mínimos de la oscilación $y(t) = e^{-t} \operatorname{sen} t$. Comprobar el resultado graficando $y(t)$.
28. Demostrar que los máximos y mínimos de un movimiento subamortiguado ocurren en valores equidistantes de t, siendo la distancia entre dos máximos consecutivos $2\pi/\omega^*$.
29. Considerar el movimiento subamortiguado de un cuerpo de masa $m = 2$ kg. Si el tiempo entre dos máximos consecutivos es 3 segundos y la amplitud máxima disminuye a $\frac{1}{2}$ de su valor inicial después de 20 ciclos, ¿cuál es la constante de amortiguamiento del sistema?
30. **(Decremento logarítmico)** Demostrar que la razón entre dos amplitudes máximas consecutivas de una oscilación amortiguada (12) es constante, siendo el logaritmo natural de esta razón $\Delta = 2\pi\alpha/\omega^*$. ($\Delta$ se conoce como el *decremento logarítmico* de la oscilación.) Encontrar Δ en el caso de $y = e^{-t} \cos t$ y determinar los valores de t correspondientes a los máximos y a los mínimos.

2.6 ECUACIÓN DE EULER-CAUCHY

Las ecuaciones con coeficientes constantes pueden resolverse sin integración, como se ha visto. De manera similar, la llamada **ecuación de Euler-Cauchy**[9]

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \qquad (a, b \text{ constantes}) \tag{1}$$

[9] LEONHARD EULER (1707-1783) fue un matemático suizo de enorme creatividad. Estudió en Basilea con JOHANN BERNOULLI y en 1727 fue nombrado profesor de física (y más tarde de matemáticas) en San Petersburgo, Rusia. En 1741 se transladó a Alemania como miembro de la Academia de Berlín. En 1766 regresó a San Petersburgo. Hizo aportaciones en prácticamente todas las ramas de las matemáticas y sus aplicaciones en problemas físicos, incluso después de que quedara completamente ciego en 1771; se hace mención de su obra fundamental sobre ecuaciones diferenciales y en diferencias, sobre series de Fourier y otras series infinitas, funciones especiales, análisis complejo, cálculo de variaciones, mecánica e hidrodinámica. Es el exponente de un desarrollo muy acelerado del análisis. (Hasta la fecha, se han publicado setenta (¡!) volúmenes de sus Obras Escogidas.)

Este desarrollo de las matemáticas fue seguido por un periodo caracterizado por un mayor rigor, dominado por el gran matemático francés AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857), el padre del análisis moderno. Cauchy estudió y enseñó principalmente en París. Es el creador del análisis complejo y ejerció una gran influencia en la teoría de las series infinitas y de la ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales (ver en el índice de este libro algunas de estas aportaciones). También se le conoce por sus trabajos sobre elasticidad y óptica. Cauchy publicó cerca de 800 trabajos de investigación matemática, muchos de ellos de importancia fundamental.

también puede resolverse mediante manipulaciones puramente algebraicas. De hecho, al sustituir

$$y = x^m \tag{2}$$

y sus derivadas en la ecuación diferencial (1) se encuentra

$$x^2m(m - 1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0.$$

Al omitir x^m, que es diferente de cero si $x \neq 0$, se obtiene la ecuación auxiliar

$$\boxed{m^2 + (a - 1)m + b = 0.} \tag{3}$$

Caso I. Raíces reales diferentes. Si las raíces m_1, m_2 de (3) son reales y diferentes, entonces

$$y_1(x) = x^{m_1} \quad \text{and} \quad y_2(x) = x^{m_2}$$

constituyen una base de soluciones de la ecuación diferencial (1) para toda x para la que estas funciones están definidas. La solución general correspondiente es

$$\boxed{y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}} \qquad (c_1, c_2 \text{ arbitrarias}). \tag{4}$$

EJEMPLO 1 Solución general en el caso de raíces reales diferentes

Resolver la ecuación de Euler-Cauchy

$$x^2y'' - 2.5xy' - 2.0y = 0.$$

Solución. La ecuación auxiliar es

$$m^2 - 3.5m - 2.0 = 0.$$

Las raíces son $m_1 = -0.5$ y $m_2 = 4$. Por tanto, una base de soluciones reales para toda x positiva es

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad y_2 = x^4$$

y la solución general correspondiente a todas estas x es

$$y = \frac{c_1}{\sqrt{x}} + c_2x^4$$ ∎

Caso II. Raíz doble. Si (3) tiene una raíz doble $m = \frac{1}{2}(1 - a)$, se obtienen una primera solución

$$y_1 = x^{(1-a)/2} \tag{5}$$

y una segunda solución y_2 por el método de reducción de orden (como en la sección 2.2). Por tanto, al sustituir $y_2 = uy_1$ y sus derivadas en (1), se obtiene

$$x^2(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + ax(u'y_1 + uy_1') + buy_1 = 0.$$

Al reagrupar los términos se obtiene

$$(6) \qquad u''x^2y_1 + u'x(2xy_1' + ay_1) + u(x^2y_1'' + axy_1' + by_1) = 0.$$

La última expresión $(\cdots)$ es cero porque y_1 es una solución de (1). Por (5) en (6) se obtiene

$$2xy_1' + ay_1 = (1 - a)x^{(1-a)/2} + ax^{(1-a)/2} = x^{(1-a)/2} = y_1.$$

Esto reduce (6) a $(u''x^2 + u'x)y_1 = 0$. Se divide esta expresión entre y_1 ($\neq 0$), se separan variables y se integra. Entonces para $x > 0$ se obtiene

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{1}{x}, \qquad \ln|u'| = -\ln x, \qquad u' = \frac{1}{x}, \qquad u = \ln x.$$

Por tanto, $y_2 = y_1 \ln x$, que no es proporcional a y_1. Así, en el caso de una raíz doble de (3), una base de (1) para toda x positiva es

$$(7^*) \qquad y_1 = x^m, \qquad y_2 = x^m \ln x \qquad\qquad m = \tfrac{1}{2}(1 - a)$$

a partir de la cual de obtiene la solución general

$$(7) \qquad \boxed{y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{(1-a)/2}} \qquad\qquad (c_1, c_2 \text{ arbitrarias}).$$

EJEMPLO 2 Solución general en el caso de una raíz doble

Resolver

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0.$$

Solución. La ecuación auxiliar tiene la raíz doble $m = 2$. Por tanto, una base de soluciones reales para toda x positiva es x^2, $x^2 \ln x$ y la solución general correspondiente es

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^2.$$ ∎

Caso III. Raíces complejas conjugadas. Si las raíces m_1 y m_2 de (3) son complejas, son conjugadas, esto es $m_1 = \mu + i\nu$, $m_2 = \mu - i\nu$. Se afirma que en este caso, una base de soluciones de (1) para toda x positiva es

$$(8) \qquad y_1 = x^\mu \cos(\nu \ln x), \qquad y_2 = x^\mu \operatorname{sen}(\nu \ln x).$$

De hecho, estas funciones no son proporcionales y son soluciones de (1), como se sigue por derivación y sustitución. La solución general correspondiente es

$$(9) \qquad y = x^\mu [A \cos(\nu \ln x) + B \operatorname{sen}(\nu \ln x)].$$

Con esto se demuestran todos los puntos y se establece el caso.

Otra pregunta es cómo adquirir la *idea* de que (8) podrían ser soluciones. Para responderla, se afirma que la fórmula $x^k = (e^{\ln x})^k = e^{k \ln x}$ se extiende de los valores

reales al número complejo $k = i\nu$ y, en conjunción con la fórmula (7) de la sección 2.3 (con $s = 0$) da como resultado

$$x^{i\nu} = e^{i\nu \ln x} = \cos(\nu \ln x) + i \operatorname{sen}(\nu \ln x),$$

$$x^{-i\nu} = e^{-i\nu \ln x} = \cos(\nu \ln x) - i \operatorname{sen}(\nu \ln x).$$

Ahora se multiplica por x^{μ} y se suma y se resta. Se obtienen así $2y_1$ y $2iy_2$, respectivamente. A partir de este resultado, dividiendo entre 2 y $2i$, se llega a (8).

EJEMPLO 3 Solución general en el caso de raíces complejas conjugadas

Resolver

$$x^2y'' + 7xy' + 13y = 0.$$

Solución. La ecuación auxiliar (3) es $m^2 + 6m + 13 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $m_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 13} = 3 \pm 2i$. Por (9) la respuesta es

$$y = x^{-3}[A \cos(2 \ln x) + B \operatorname{sen}(2 \ln x)].$$ ∎

Las ecuaciones de Euler-Cauchy se presentan en ciertas aplicaciones y este hecho se ilustra mediante un ejemplo simple de electrostática.

EJEMPLO 4 Campo de potencial eléctrico entre dos esferas concéntricas

Encontrar el potencial electrostático $v = v(r)$ entre dos esferas concéntricas de radios $r_1 = 4$ cm y $r_2 = 8$ cm mantenidas en los potenciales $v_1 = 110$ volts y $v_2 = 0$, respectivamente.

Información física. $v(r)$ es una solución de $rv'' + 2v' = 0$, donde $kv, = dv/dr$.

Solución. La ecuación auxiliar $m^2 + m = 0$ tiene las raíces 0 y -1. Se obtiene así la solución general $v(r) = c_1 + c_2/r$. A partir de las "condiciones en la frontera" (los potenciales de las esferas),

$$v(8) = c_1 + c_2/8 = 0, \qquad v(4) = c_1 + c_2/4 = 110.$$

Por sustracción, $c_2/8 = 110$, $c_2 = 880$, por tanto $c_1 = -110$. *Respuesta.* $v(r) = -100 + 880/r$ volts. ∎

Problemas de la sección 2.6

1. Comprobar directamente por sustitución que y_2 de (7*) es una solución de (1) si (3) tiene una raíz doble, pero que $x^{m_1} \ln x$ y $x^{m_2} \ln x$ **no** son soluciones de (1) si las raíces m_1 y m_2 de (3) son diferentes.

Encontrar una solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

2. $x^2y'' - 6y = 0$

3. $xy'' + 4y' = 0$

4. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

5. $(x^2D^2 + 9xD + 16)y = 0$

6. $x^2y'' + xy' - y = 0$

7. $(x^2D^2 + 3xD + 1)y = 0$

8. $(x^2D^2 - 1.5xD + 1)y = 0$

9. $x^2y'' + 6.2xy' + 6.76y = 0$

10. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$

11. $(x^2D^2 + xD + 1)y = 0$

12. $(x^2D^2 - 3xD + 20)y = 0$

13. $(4x^2D^2 + 8xD - 15)y = 0$

Resolver los siguientes problemas con valor inicial.

14. $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 13$

15. $(4x^2D^2 + 4xD - 1)y = 0, \quad y(4) = 2, \quad y'(4) = -0.25$

16. $(x^2D^2 - 5xD + 8)y = 0, \quad y(1) = 5, \quad y'(1) = 18$

17. $(x^2D^2 - xD + 2)y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = -1$

18. $10x^2y'' + 46xy' + 32.4y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2$

19. $(x^2D^2 + xD - 0.01)y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.1$

20. **(Potencial entre dos esferas)** Encontrar el potencial del ejemplo 4 si $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 20$ cm y los potenciales de las esferas son $v_1 = 220$ volts y $v_2 = 130$ volts.

21. **(Ecuaciones con coeficientes constantes)** Haciendo $x = e^t$ $(x > 0)$, transformar la ecuación de Euler-Cauchy (1) en la ecuación $\ddot{y} + (a - 1)\dot{y} + by = 0$, cuyos coeficientes son constantes. Aquí, los puntos denotan derivadas con respecto a t.

22. Transformar la ecuación del problema 21 de nuevo en (1).

23. Demostrar que si se aplica la transformación del problema 21, entonces (2) da lugar a una expresión de la forma (2), sección 2.2, y (7) da lugar a una expresión de la forma (7), sección 2.2, excepto por la notación.

Reducir a la forma (1) y resolver:

24. $2(3z + 1)^2y'' + 21(3z + 1)y' + 18y = 0$

25. $(z - 2)^2y'' + 5(z - 2)y' + 3y = 0$

2.7 TEORÍA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD. WRONSKIANO

En esta sección se ofrece una teoría general para las ecuaciones lineales homogéneas

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

con coeficientes p y q variables continuas pero arbitrarias. Esto guardará relación con la existencia de una solución general.

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \tag{2}$$

de (1) así como con los problemas con valor inicial que consten de (1) y dos condiciones iniciales

$$y(x_0) = K_0, \qquad y'(x_0) = K_1 \tag{3}$$

con x_0, K_0 y K_1 dadas.

(Evidentemente, no era necesaria una teoría de esta índole para ecuaciones con coeficientes constantes o de Euler-Cauchy porque todo resultaba explícitamente de los cálculos realizados.)

Fundamental para la presente discusión es el siguiente teorema.

Teorema 1 Teorema de existencia y unicidad para problemas con valor inicial

Si $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I y x_0 está en I, entonces el problema con valor inicial (1), (3) *tiene una solución única $y(x)$ en el intervalo I.*

En la demostración de la existencia se usan los mismos prerrequisitos que los del teorema de existencia de la sección 1.11 y no se presentarán aquí; puede encontrarse en la referencia [A6] del apéndice 1. Las demostraciones de la unicidad suelen ser más sencillas que las de existencia. Pero en el caso presente, incluso la demostración de la unicidad es larga y se ofrece como demostración adicional en el apéndice 4.

Independencia lineal de las soluciones. Wronskiano

Del teorema se derivarán importantes propiedades de las soluciones generales (2) de (1). Como se sabe, éstas se componen de una **base** y_1, y_2, es decir, de un par de soluciones linealmente independientes. Recuérdese de la sección 2.1 que y_1 y y_2 son **linealmente independientes** en un intervalo I si

$$k_1y_1(x) + k_2y_2(x) = 0 \quad \text{en } I \qquad \text{implica} \qquad k_1 = 0,\ k_2 = 0;$$

y que y_1 y y_2 son **linealmente dependientes** en I si esta ecuación también es válida para k_1, k_2 que no son ambas cero. En este caso, y únicamente en este caso, y_1 y y_2 son proporcionales en I, esto es (ver la sección 2.1),

$$\text{(4)} \qquad \text{(a)}\quad y_1 = ky_2 \qquad \text{o} \qquad \text{(b)}\quad y_2 = ly_1.$$

Para la discusión presente, resultará de utilidad el siguiente criterio de independencia y dependencia lineal de las soluciones. Este criterio usa el llamado *determinante wronskiano*[10] o, abreviando, el **wronskiano** de dos soluciones y_1 y y_2 de (1), definido por

$$\text{(5)} \qquad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'.$$

Teorema 2 (Dependencia e independencia lineal de las soluciones)

Suponer que (1) *tiene coeficientes continuos $p(x)$ y $q(x)$ en un intervalo abierto I. Entonces dos soluciones y_1 y y_2 de* (1) *en I son linealmente dependientes en I si y sólo si su wronskiano W es cero en algún x_0 de I. Además, si $W = 0$ para $x = x_0$, entonces $W \equiv 0$ en I; por tanto, si existe un x_1 en I en el que $W \neq 0$, entonces y_1, y_2 son linealmente independientes en I.*

[10] Introducido por I.M. HÖNE (1778-1853), matemático polaco, quien se cambio el nombre a Wrónski. Por lo estudiado en cálculo elemental, el estudiante debe estar familiarizado con los determinantes de segundo orden; de no ser así, consultar el principio de la sección 7.8, que es independiente de las otras secciones del capítulo 7.

Demostración. **(a)** Si y_1 y y_2 son linealmente dependientes en I, entonces (4a) o (4b) son válidas en I y para (4a) se obtiene

$$W(y_1, y_2) = W(ky_2, y_2) = \begin{vmatrix} ky_2 & y_2 \\ ky_2' & y_2' \end{vmatrix} = ky_2y_2' - y_2ky_2' \equiv 0;$$

ocurre lo mismo cuando (4b) es válida.

(b) Recíprocamente, se supone que $W(y_1, y_2) = 0$ para algún $x = x_0$ en I y se demuestra entonces que y_1, y_2 son linealmente dependientes. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} k_1y_1(x_0) + k_2y_2(x_0) &= 0 \\ k_1y_1'(x_0) + k_2y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

en las incógnitas k_1, k_2. Ahora este sistema es homogéneo y su determinante es precisamente el wronskiano $W[y_1(x_0), y_2(x_0)]$, que es cero por hipótesis. Por tanto, el sistema tiene una solución k_1, k_2 donde k_1 y k_2 no son ambas cero (ver el teorema 2, sección 7.9). Usando estos números k_1, k_2, se introduce la función

$$y(x) = k_1y_1(x) + k_2y_2(x).$$

Por el teorema fundamental 1 de la sección 2.1, la función $y(x)$ es una solución de (1) en I. Por (6) se ve que satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$. Ahora otra solución de (1) que satisface las mismas condiciones iniciales es $y^* \equiv 0$. Puesto que p y q son continuos, el teorema 1 es válido y garantiza la unicidad, es decir, $y \equiv y^*$, expresión que desarrollada es

$$k_1y_1 + k_2y_2 \equiv 0$$

en I. Entonces como k_1 y k_2 no son ambas cero, esto implica la dependencia lineal de y_1, y_2 en I.

(c) Se demuestra ahora el último enunciado del teorema. Si $W = 0$ en un x_0 de I, se tiene la dependencia lineal de y_1, y_2 en I por el inciso (b), por tanto $W \equiv 0$, por el inciso (a) de esta demostración. Por lo tanto, $W \neq 0$ en un x_1 de I no puede ocurrir en el caso de la dependencia lineal, de donde $W \neq 0$ en x_1 implica la independencia lineal. ∎

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema 2

Demostrar que $y_1 = \cos \omega x$, $y_2 = \text{sen}\ \omega x$ forman una base de soluciones de $y'' + \omega^2 y = 0$, $\omega \neq 0$, en cualquier intervalo.

Solución. Por sustitución se demuestra que son soluciones y la independencia lineal se sigue del teorema 2, ya que

$$W(\cos \omega x, \text{sen}\ \omega x) = \begin{vmatrix} \cos \omega x & \text{sen}\ \omega x \\ -\omega\ \text{sen}\ \omega x & \omega \cos \omega x \end{vmatrix} = \omega(\cos^2 \omega x + \text{sen}^2 \omega x) = \omega.$$ ∎

EJEMPLO 2 Aplicación del teorema 2

Demostrar que $y = (c_1 + c_2x)e^x$ es una solución general de $y'' - 2y' + y = 0$ en cualquier intervalo.

Solución. Por sustitución se demuestra que $y_1 = e^x$ y $y_2 = xe^x$ son soluciones y el teorema 2 implica la independencia lineal, ya que

$$W(e^x, xe^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = (x+1)e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x} \neq 0.$$ ∎

Una solución general de (1) incluye todas las soluciones

Esto se demuestra en dos pasos, probando primero que las soluciones generales existen siempre:

Teorema 3 (Existencia de una solución general)

Si los coeficientes p(x) y q(x) de (1) *son continuos en algún intervalo abierto I, entonces* (1) *tiene una solución general en I.*

Demostración. Por el teorema 1, la ecuación (1) tiene una solución $y_1(x)$ en I que satisface las condiciones iniciales

$$y_1(x_0) = 1, \qquad y_1'(x_0) = 0$$

y una solución $y_2(x)$ en I que satisface las condiciones iniciales

$$y_2(x_0) = 0, \qquad y_2'(x_0) = 1.$$

A partir de esto se ve que el wronskiano $W(y_1, y_2)$ tiene el valor 1 en x_0. Por tanto, y_1, y_2 son linealmente independientes en I, por el teorema 2; forman una base de soluciones de (1) y $y = c_1y_1 + c_2y_2$ con c_1, c_2 arbitrarias es una solución general de (1) en I. ∎

Se llega ahora a la meta final de esta sección demostrando que una solución general de (1) es tan general como puede serlo, a saber, incluye *todas* las soluciones de (1):

Teorema 4 (Solución general)

Suponer que (1) *tiene coeficientes continuos p(x) y q(x) en algún intervalo abierto I. Entonces toda solución y = Y(x) de* (1) *en I es de la forma*

$$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{7}$$

donde y_1, y_2 forman una base de soluciones de (1) *en I y C_1, C_2 son constantes adecuadas.*

Por tanto (1) *no tiene* **soluciones singulares** (*es decir, soluciones que no pueden obtenerse a partir de una solución general).*

Demostración. Por el teorema 3, la ecuación considerada tiene una solución general

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{8}$$

en I. Es necesario encontrar valores adecuados de c_1, c_2 tales que $y(x) = Y(x)$ en I. Se escoge cualquier x_0 fijo en I y se demuestra que es posible encontrar c_1, c_2 tales que

$$y(x_0) = Y(x_0), \qquad y'(x_0) = Y'(x_0)$$

que al desarrollarse se escribe

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) &= Y(x_0), \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) &= Y'(x_0). \end{aligned}$$

De hecho, este es un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas c_1, c_2. Su determinante es el wronskiano de y_1 y y_2 en $x = x_0$. Puesto que (8) es una solución general, y_1 y y_2 son linealmente independientes en I y por el teorema 2 se sigue que su wronskiano es diferente de cero. Por tanto, el sistema tiene una solución única $c_1 = C_1$, $c_2 = C_2$ que puede obtenerse por la regla de Cramer (sección, 7.8). Usando estas constantes por (8) se obtiene la solución particular

$$y^*(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Puesto que C_1, C_2 son soluciones de (9), a partir de (9) se ve que

$$y^*(x_0) = Y(x_0), \qquad y^{*\prime}(x_0) = Y'(x_0).$$

Por esta expresión y el teorema de unicidad (teorema 1) se concluye que y^* y Y deben ser iguales en I, y se termina así la demostración. ∎

Reducción del orden: cómo obtener una segunda solución

Al intentar encontrar una base de soluciones, con frecuencia puede obtenerse una solución por conjetura o por algún método. Los casos típicos se consideraron en la sección 2.2 para la ecuación con coeficientes constantes y en la sección anterior para la ecuación de Euler-Cauchy, y se muestra que esos sólo eran casos particulares de un método general, el **método de reducción del orden**[11] aplicable a cualquier ecuación (1) de la siguiente manera. Sea y_1 una solución de (1) en algún intervalo I. Se sustituyen $y_2 = uy_1$ y sus derivadas $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ y $y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$ en (1) y se agrupan términos, obteniéndose

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) + u(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0.$$

[11] Atribuido al gran matemático JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736-1813), quien nació en Turín, de ascendencia francesa, obtuvo su primera cátedra cuando tenía 19 años (en la Academia Militar de Turín), fue director de la sección de matemáticas de la Academia de Berlín en 1766 y se mudó a París en 1787. Su importante obra principal fue en cálculo de variaciones, mecánica celeste, mecánica general (*Mécanique analytique*, París, 1788), ecuaciones diferenciales, teoría de aproximaciones, álgebra y teoría de números.

Puesto que y_1 es una solución de (1), la expresión del último paréntesis es cero. Los términos que quedan de la fórmula se dividen entre y_1 y se escribe $u' = U$. Entonces $u'' = U'$ y se tiene

$$U' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right)U = 0.$$

Ahora se separan las variables y se integra, escogiéndose el valor cero para la constante de integración (dado que no se necesita una constante arbitraria). Se obtiene así

$$\ln |U| = -2 \ln |y_1| - \int p\, dx$$

y al tomar exponentes

$$U = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\, dx}. \tag{10}$$

Aquí $U = u'$. Por tanto, la segunda solución buscada es $y_2 = uy_1 = y_1 \int U\, dx$. Puesto que $y_2/y_1 = u = \int U\, dx$ no puede ser una constante (¿por qué?), se ve que y_1 y y_2 forman una base. ∎

Este método se ha aplicado ya en las secciones 2.2 y 2.6, pero se agrega otro ejemplo típico.

EJEMPLO 3 Reducción del orden

Por inspección se encuentra que

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

tiene a $y_1 = x$ como una primera solución. Encontrar otra solución independiente.

Solución. Se hace $y_2 = uy_1$ y se usa (10). ***¡Atención!*** Es crucial que la ecuación se escriba primero en la forma estándar,

$$y'' - \frac{2x}{x^2 - 1} y' + \frac{2}{x^2 - 1} y = 0,$$

porque (10) se estableció bajo este supuesto. Entonces en (10),

$$-\int p\, dx = \int \frac{2x}{x^2 - 1}\, dx = \ln |x^2 - 1|.$$

Por tanto,

$$U = x^{-2}(x^2 - 1) = 1 - x^{-2} \qquad \text{y} \qquad u = \int U\, dx = x + x^{-1}.$$

Respuesta. $y_2 = uy_1 = (x + x^{-1})x = x^2 + 1$. Comprobarla por sustitución. ∎

Problemas de la sección 2.7

Encontrar el wronskiano de las siguientes bases (que ya se han usado antes), verificando así el teorema 2 para cualquier intervalo. (En los problemas 4-6, suponer que $x > 0$.)

1. $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$
2. $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$
3. $e^{-\alpha x/2} \cos \omega x$, $e^{-\alpha x/2} \operatorname{sen} \omega x$
4. x^{m_1}, x^{m_2}, $m_1 \neq m_2$
5. $x^{\mu} \cos (\nu \ln x)$, $x^{\mu} \operatorname{sen} (\nu \ln x)$
6. x^m, $x^m \ln x$

Encontrar una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden para la cual las funciones dadas son soluciones. Encontrar el wronskiano y usarlo para comprobar el teorema 2.

7. e^x, xe^x
8. x, $x \ln x$
9. $e^x \cos x$, $e^x \operatorname{sen} x$
10. $\cosh kx$, $\operatorname{senh} kx$
11. $\cos \pi x$, $\operatorname{sen} \pi x$
12. $\sqrt{x}$, $1/\sqrt{x}$
13. 1, x^3
14. 1, e^{-2x}
15. $x^{1/2}$, $x^{3/2}$

16. Suponer que (1) tiene coeficientes continuos en I. Demostrar que dos soluciones de (1) que son cero en el mismo punto de I no pueden formar una base de soluciones de (1) en I.

17. Suponer que (1) tiene coeficientes continuos en I. Demostrar que dos soluciones de (1) en I que tienen máximos o mínimos en el mismo punto de I no pueden formar una base de soluciones de (1) en I.

18. Suponer que y_1, y_2 constituyen una base de soluciones de una ecuación diferencial que satisface los supuestos del teorema 2. Demostrar que $z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$, $z_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$ es una base de esa ecuación en el intervalo I si y sólo si el determinante de los coeficientes a_{jk} es diferente de cero.

19. Ilustrar el problema 18 con $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $z_1 = \cosh x$, $z_2 = \operatorname{senh} x$.

20. **(Ecuación de Euler-Cauchy)** Demostrar que $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ (sección 2.6) tiene a $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$ como base de soluciones para toda x. Demostrar que $W(x^2, x^3) = 0$ en $x = 0$. ¿Contradice este hecho el teorema 2?

Reducción de orden. Demostrar que la función y_1 dada es una solución de la ecuación dada. Usando el método de reducción del orden, encontrar y_2 tal que y_1, y_2 formen una base. ***¡Atención!*** Escribir primero la ecuación en la forma estándar.

21. $(x + 1)^2y'' - 2(x + 1)y' + 2y = 0$, $\quad y_1 = x + 1$
22. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$, $\quad y_1 = e^x$
23. $(1 - x)^2y'' - 4(1 - x)y' + 2y = 0$, $\quad y_1 = (1 - x)^{-1}$, $\quad x \neq 1$
24. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$, $\quad y_1 = x^{-1/2} \cos x$, $\quad x > 0$
25. $xy'' + 2y' + xy = 0$, $\quad y_1 = x^{-1} \operatorname{sen} x$, $\quad x \neq 0$

2.8 ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS

***Empezando en esta sección, se hace el cambio de ecuaciones lineales* homogéneas *a las* no homogéneas**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad (1)$$

donde $r(x) \not\equiv 0$. ¿Cómo se resuelve una ecuación de este tipo? Antes de considerar algún método, primero se analizará lo que realmente se necesita para proceder de la ecuación homogénea correspondiente

$$(2) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

a la ecuación no homogénea (1). La clave que relaciona (1) y (2) y ofrece un plan para resolver (1) es el siguiente teorema.

Teorema 1 [Relaciones entre las soluciones de (1) y (2)]

(a) *La diferencia de dos soluciones de* (1) *en algún intervalo abierto I es una solución de* (2) *en I.*

(b) *La suma de una solución de* (1) *en I y una solución de* (2) *en I es una solución de* (1) *en I.*

Demostración. **(a)** Denótese el primer miembro de (1) por $L[y]$. Sean y y $\tilde{y}$ soluciones cualesquiera de (1) en I. Entonces $L[y] = r(x)$, $L[\tilde{y}] = r(x)$ y como se tiene $(y - \tilde{y})' = y' - \tilde{y}'$, etc., se obtiene la primera afirmación,

$$L[y - \tilde{y}] = L[y] - L[\tilde{y}] = r(x) - r(x) \equiv 0.$$

(b) De manera similar, para y como antes y cualquier solución y^* de (2) en I,

$$L[y + y^*] = L[y] + L[y^*] = r(x) + 0 = r(x).$$ ∎

Esta situación sugiere los siguientes conceptos.

Definición (solución general, solución particular)

Una **solución general** de la ecuación no homogénea (1) en algún intervalo abierto I es una solución de la forma

$$(3) \qquad \boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x),}$$

donde $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ es una solución general de la solución homogénea (2) en I y $y_p(x)$ es cualquier solución de (1) en I que no incluye constantes arbitrarias.

Una **solución particular** de (1) en I es una solución obtenida a partir de (3) asignando valores específicos a las constantes arbitrarias c_1 y c_2 en $y_h(x)$. ∎

Si los coeficientes de (1) y $r(x)$ son funciones continuas en I, entonces (1) tiene una solución general en I porque $y_h(x)$ existe en I por el teorema 3, sección 2.7, y la existencia de $y_p(x)$ se demostrará en la sección 2.10. Asimismo, un problema con valor inicial para (1) tiene una solución única en I. Esto se sigue del teorema 1, sec-

ción 2.7, una vez que se haya establecido la existencia de $y_p(x)$. De hecho, si se dan las condiciones iniciales

$$y(x_0) = K_0, \qquad y'(x_0) = K_1$$

y se ha determinado una y_p, por ese teorema existe una solución única $\tilde{y}$ de la ecuación homogénea (2) en I que satisface

$$\tilde{y}(x_0) = K_0 - y_p(x_0), \qquad \tilde{y}'(x_0) = K_1 - y_p'(x_0),$$

y $y = \tilde{y} + y_p$ es la única solución de (1) en I que satisface las condiciones iniciales dadas.

Además, para justificar la terminología, se demuestra ahora que una solución general de (1) incluye a *todas* las soluciones de (1); por tanto la situación es la misma que para la ecuación homogénea:

Teorema 2 (Solución general)

Suponer que los coeficientes y $r(x)$ en (1) *son continuos en algún intervalo abierto I. Entonces cualquier solución de* (1) *en I se obtiene asignando valores adecuados a las constantes arbitrarias en una solución general* (3) *de* (1) *en I.*

Demostración. Sea $\tilde{y}(x)$ cualquier solución de (1) en I. Sea (3) cualquier solución general de (1) en I; esta solución existe debido al supuesto de continuidad. El teorema 1(a) implica que la diferencia $Y(x) = \tilde{y}(x) - y_p(x)$ es una solución de la ecuación *homogénea* (2). Por el teorema 4 de la sección 2.7, esta solución $Y(x)$ se obtiene a partir de $y_h(x)$ asignando valores adecuados a las constantes arbitrarias c_1, c_2. A partir de esto y de $\tilde{y}(x) = Y(x) + y_p(x)$ se sigue el enunciado. ∎

Conclusión práctica

Para resolver la ecuación no homogénea (1) o un problema con valor inicial para (1), es necesario resolver la ecuación homogénea (2) y encontrar cualquier solución particular y_p de (1). Los métodos para hacerlo y aplicaciones serán el tema de las secciones restantes del capítulo 2, las cuales incluyen varios ejemplos, de modo que por el momento, sin disponer aún de los métodos, simplemente se ilustrarán la técnica básica y la notación por medio de un ejemplo simple.

EJEMPLO 1 Problema con valor inicial para una ecuación no homogénea

Resolver el problema con valor inicial

$$y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -3.$$

Solución. Primer paso. Solución general de la ecuación homogénea. La ecuación característica $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ tiene las raíces 1 y 3. Se obtiene así como solución general de la ecuación homogénea

$$y_h = c_1e^x + c_2e^{3x}.$$

Segundo paso. Solución particular de la ecuación no homogénea. Puesto que e^{-2x} tiene derivadas e^{-2x} multiplicadas por algunas constantes, se prueba

$$y_p = Ce^{-2x}.$$

Entonces $y_p' = -2Ce^{-2x}$, $y_p'' = 4Ce^{-2x}$. Por sustitución se obtiene

$$4Ce^{-2x} - 4(-2Ce^{-2x}) + 3Ce^{-2x} = 10e^{-2x}.$$

Por tanto, $4C + 8C + 3C = 10$, $C = \frac{2}{3}$, y una solución general de la ecuación no homogénea es

(4) $$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \tfrac{2}{3}e^{-2x}.$$

Tercer paso. Solución particular que satisface las condiciones iniciales. Al derivar,

(5) $$y'(x) = c_1 e^x + 3c_2 e^{3x} - \tfrac{4}{3}e^{-2x}.$$

A partir de (4) y (5) y las condiciones iniciales,

$$y(0) = c_1 + c_2 + \tfrac{2}{3} = 1$$

$$y'(0) = c_1 + 3c_2 - \tfrac{4}{3} = -3.$$

Se obtiene así $c_1 = 4/3$, $c_2 = -1$. *Respuesta.* $y = \frac{4}{3}e^x - e^{3x} + \frac{2}{3}e^{-2x}$. ∎

Los **métodos para encontrar las soluciones** se tratan en las secciones siguientes.

Problemas de la sección 2.8

En cada caso, comprobar que $y_p(x)$ es una solución de la ecuación diferencial dada y encontrar una solución general.

1. $y'' - y = 3e^{2x}, \quad y_p = e^{2x}$
2. $y'' - y' - 2y = -4x, \quad y_p = 2x - 1$
3. $y'' + y = -3 \operatorname{sen} 2x, \quad y_p = \operatorname{sen} 2x$
4. $y'' - 2y' + y = 12e^x/x^3, \quad y_p = 6e^x/x$
5. $(D^2 + 3D - 4)y = 5e^x, \quad y_p = xe^x$
6. $(D^2 + 3D - 4)y = -6.8 \operatorname{sen} x, \quad y_p = \operatorname{sen} x + 0.6 \cos x$
7. $(x^2D^2 - 2xD + 2)y = 5x^3 \cos x, \quad y_p = -5x \cos x$
8. $(x^2D^2 - 4xD + 6)y = 42/x^4, \quad y_p = 1/x^4$
9. $(4x^2D^2 + 1)y = (1 - x^2) \cos 0.5x, \quad y_p = \cos 0.5x$
10. $(x^2D^2 - 3xD + 3)y = 3 \ln x - 4, \quad y_p = \ln x$

Comprobar que y_p es una solución de la ecuación dada y resolver el problema con valor inicial dado.

11. $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \quad y_p = x^2e^{3x}$
12. $8y'' - 6y' + y = 6e^x + 3x - 16, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 6.5;$
$y_p = 2e^x + 2x + 2$
13. $y'' + 4y = -12 \operatorname{sen} 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3; \quad y_p = 3x \cos 2x$
14. $(D^2 - 4D + 3)y = 10e^{-2x}, \quad y(0) = y'(0) = 5/3; \quad y_p = 2e^{-2x}/3$
15. $(D^2 - 2D + 1)y = e^x \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0; \quad y_p = -e^x \operatorname{sen} x$
16. $(D^2 + 4D + 4)y = e^{-2x}/x^2, \quad y(1) = 1/e^2, \quad y'(1) = -2/e^2;$
$y_p = -e^{-2x} \ln x$

17. Demostrar que si y_1 es una solución de (1) con $r = r_1$ y y_2 es una solución de (1) con $r = r_2$, entonces $y = y_1 + y_2$ es una solución de (1) con $r = r_1 + r_2$.
18. Como ilustración del problema 17, encontrar una solución general de la ecuación diferencial $y'' + 3y' - 4y = 5e^x - 6.8 \operatorname{sen} x$. *Sugerencia.* Usar los problemas 5 y 6.
19. Comprobar que $y_1 = e^x$ es una solución de $y'' + y = 2e^x$ y $y_2 = x \operatorname{sen} x$ es una solución de $y'' + y = 2 \cos x$. Usando el problema 17, encontrar una solución general de la ecuación $y'' + y = 2e^x + 2 \cos x$.
20. Para ilustrar que la elección de y_p en (3) no tiene importancia, demostrar que $y_{p1} = -\cos x$ y $y_{p2} = e^x - \cos x$ son soluciones particulares de $y'' - y = 2 \cos x$, encontrar las soluciones generales (3) correspondientes y demostrar que una de ellas puede expresarse en términos de la otra.

2.9 SOLUCIÓN POR COEFICIENTES INDETERMINADOS

Una solución general de una ecuación lineal no homogénea es una suma de la forma

$$y = y_h + y_p,$$

donde y_h es una solución general de la ecuación homogénea correspondiente y y_p es cualquier solución particular de la ecuación no homogénea. Esto se acaba de demostrar. Por consiguiente, el objetivo principal es discutir los métodos para encontrar esa y_p. Hay un método general para esto que siempre funciona y que se considerará en la siguiente sección. Hay también un método especial mucho más sencillo de interés práctico que se discute aquí. Se llama el **método de coeficientes indeterminados** y se aplica a ecuaciones

$$\text{(1)} \qquad \boxed{y'' + ay' + by = r(x)}$$

con coeficientes constantes y segundos miembros $r(x)$ especiales, a saber, funciones exponenciales, polinomios, cosenos, senos o sumas o productos de estas funciones. Estas $r(x)$ tienen derivadas de una forma similar a $r(x)$. Este hecho da lugar a la idea clave: escoger para y_p una forma similar a la de $r(x)$ y que incluya coeficientes desconocidos que se determinarán al sustituir esa elección de y_p en (1). El ejemplo 1 de la sección anterior ilustra este procedimiento para una función exponencial; el coeficiente indeterminado era C. Las reglas del método son las siguientes.

Reglas del método de coeficientes indeterminados

(A) Regla básica. *Si $r(x)$ en* (1) *es una de las funciones de la primera columna de la tabla* 2.1, *se elige la función correspondiente y_p de la segunda columna y se determinan sus coeficientes indeterminados sustituyendo y_p y sus derivadas en* (1).

(B) Regla de modificación. *Si un término de la elección de y_p resulta ser una solución de la ecuación homogénea correspondiente a* (1), *entonces se multiplica la elección de y_p por x (o por x^2 si esta solución corresponde a una raíz doble de la ecuación característica de la ecuación homogénea).*

Término en $r(x)$	Elección de y_p
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
$kx^n \ (n = 0, 1, \cdots)$	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0$
$k \cos \omega x$ $k \operatorname{sen} \omega x$	$K \cos \omega x + M \operatorname{sen} \omega x$
$ke^{\alpha x} \cos \omega x$ $ke^{\alpha x} \operatorname{sen} \omega x$	$e^{\alpha x}(K \cos \omega x + M \operatorname{sen} \omega x)$

Tabla 2.1. Método de los coeficientes indeterminados.

(C) Regla de la suma. *Si $r(x)$ es una suma de las funciones enlistadas en la primera columna de la tabla* 2.1, *entonces se elige para y_p la suma de las funciones de los renglones correspondientes de la segunda columna.*

La regla básica establece lo que tiene que hacerse en general. La regla de modificación se ocupa de las dificultades que se presentan en el caso indicado. En consecuencia, siempre será necesario resolver primero la ecuación homogénea. La regla de la suma se obtiene si se observa que la suma de dos soluciones de (1) con $r = r_1$ y $r = r_2$, respectivamente, es una solución de (1) con $r = r_1 + r_2$. (¡Comprobarlo!)

El método se corrige a sí mismo en el sentido de que una elección equivocada de y_p o una con muy pocos términos llevará a una contradicción, la cual por lo general indicará la corrección necesaria, y una elección con demasiados términos dará lugar a un resultado correcto, con los coeficientes innecesarios asumiendo el valor cero.

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla (A)

Resolver la ecuación no homogénea

(2) $$y'' + 4y = 8x^2.$$

Solución. La tabla 2.1 sugiere la elección

$$y_p = K_2x^2 + K_1x + K_0. \quad \text{Entonces} \quad y_p'' = 2K_2.$$

Al sustituir se obtiene

$$2K_2 + 4(K_2x^2 + K_1x + K_0) = 8x^2.$$

Al igualar los coeficientes de x^2, x y x^0 en ambos miembros, se obtiene $4K_2 = 8$, $4K_1 = 0$, $2K_2 + 4K_0 = 0$. Por tanto, $K_2 = 2$, $K_1 = 0$, $K_0 = -1$. Por tanto, $y_p = 2x^2 - 1$, y una solución general de (2) es

$$y = y_h + y_p = A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x + 2x^2 - 1.$$

Nótese que aun cuando $r(x) = 8x^2$, probar $y_p = K_2x^2$ no funcionaría. El lector deberá intentarlo. ¿Puede ver el lector por qué no funciona? ▮

EJEMPLO 2 Regla de modificación (B) en el caso de una raíz simple

Resolver

(3) $$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Solución. La ecuación característica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ tiene las raíces 1 y 2. Por tanto, $y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$. Normalmente, la elección sería $y_p = Ce^x$. Pero se observa que e^x es una solución de la ecuación homogénea que corresponde a una raíz simple (a saber, 1). En consecuencia, la regla (B) sugiere

$$y_p = Cxe^x. \qquad \text{Se necesita} \qquad y_p' = C(e^x + xe^x), \qquad y_p'' = C(2e^x + xe^x).$$

Al sustituir se obtiene

$$C(2 + x)e^x - 3C(1 + x)e^x + 2Cxe^x = e^x.$$

Los términos en xe^x se cancelan y queda $-Ce^x = e^x$. Por tanto, $C = -1$. Una solución general es

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x.$$

¡Comprobarlo! Probar $y_p = Ce^x$ para convencerse de que no funciona. ∎

EJEMPLO 3 Regla de modificación (B) (raíz doble) y regla de la suma (C)

Resolver el problema con valor inicial

$$(4) \qquad y'' - 2y' + y = (D - 1)^2y = e^x + x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Solución. La ecuación característica tiene la raíz doble $\lambda = 1$. Por tanto, $y_h = (c_1 + c_2x)e^x$. Se determina una solución particular y_p. Por la tabla 2.1, el término x indica una elección para la solución particular

$$K_1x + K_0.$$

Puesto que 1 es una raíz doble de la ecuación característica $(\lambda - 1)^2$, por la regla de modificación el término e^x requiere la solución particular

$$Cx^2e^x \qquad \text{(en lugar de } Ce^x\text{)}.$$

En conjunto,

$$y_p = K_1x + K_0 + Cx^2e^x.$$

Al sustituir esta expresión en (4) y simplificar se obtiene

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = 2Ce^x + K_1x - 2K_1 + K_0 = e^x + x.$$

Por tanto $C = \frac{1}{2}$, $K_1 = 1$, $K_0 = 2$ y una solución general de (4) es

$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2x)e^x + \tfrac{1}{2}x^2e^x + x + 2.$$

Para tomar en consideración las condiciones iniciales se necesita también

$$y' = (c_1 + c_2 + c_2x)e^x + (x + \tfrac{1}{2}x^2)e^x + 1.$$

Por tanto,

$$y(0) = c_1 + 2 = 1, \qquad c_1 = -1,$$
$$y'(0) = c_1 + c_2 + 1 = 0, \qquad c_2 = 0.$$

Respuesta. $y = -e^x + \frac{1}{2}x^2e^x + x + 2.$ ∎

EJEMPLO 4 Otra aplicación de la regla de la suma (C)

Resolver

$$(5) \qquad y'' + 2y' + 5y = 16e^x + \operatorname{sen} 2x.$$

Solución. La ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ tiene las raíces complejas $-1 + 2i$ y $-1 - 2i$. Por tanto, $y_h = e^{-x}(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x)$. Por la tabla 2.1 y al derivar

$$y_p = Ce^x + K \cos 2x + M \operatorname{sen} 2x,$$

$$y_p' = Ce^x - 2K \operatorname{sen} 2x + 2M \cos 2x,$$
$$y_p'' = Ce^x - 4K \cos 2x - 4M \operatorname{sen} 2x.$$

Se sustituye esta expresión en (5) y se agrupan términos, encontrándose

$$8Ce^x + (-4K + 4M + 5K) \cos 2x + (-4M - 4K + 5M) \operatorname{sen} 2x = 16e^x + \operatorname{sen} 2x.$$

Por tanto, $8C = 16$, $K + 4M = 0$, $-4K + M = 1$, de donde $C = 2$, $K = -4/17$, $M = 1/17$. La respuesta es

$$y = e^{-x}(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x) + 2e^x - \tfrac{4}{17} \cos 2x + \tfrac{1}{17} \operatorname{sen} 2x. \quad ▮$$

Problemas de la sección 2.9

Encontrar una solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $y'' + y = 3x^2$
2. $y'' - 4y = e^{2x}$
3. $y'' + 6y' + 9y = 18 \cos 3x$
4. $y'' + 4y' + 4y = 9 \cosh x$
5. $y'' - y' - 2y = e^x + x$
6. $y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x$
7. $y'' + 2y' + 5y = 5x^2 + 4x + 2$
8. $3y'' + 10y' + 3y = x^2 + \operatorname{sen} x$
9. $(D^2 - 4D + 3)y = 2 \operatorname{sen} x - 4 \cos x$
10. $(D^2 + 5D + 6)y = 9x^4 - x$
11. $(D^2 - 2D + 1)y = 2e^x$
12. $(D^2 - 4D + 3)y = 8e^{-3x} + e^{3x}$
13. $(D^2 + 9)y = \cos 3x$
14. $(D^2 + 5D)y = 1 + x + e^x$
15. $(D^2 - 4)y = 2 \operatorname{senh} 2x + x$
16. $(D^2 + D - 6)y = 52 \cos 2x$

Resolver los siguientes problemas con valor inicial.

17. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$
18. $y'' - y = x$, $y(2) = e^2 - 2 \approx 5.389$, $y'(2) = e^2 - 1 \approx 6.389$
19. $y'' + y' - 2y = 14 + 2x - 2x^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
20. $y'' - 4y' + 3y = 4e^{3x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$
21. $y'' - y' - 2y = 10 \operatorname{sen} x$, $y(\tfrac{1}{2}\pi) = -3$, $y'(\tfrac{1}{2}\pi) = -1$
22. $y'' + 4y' + 4y = 4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
23. $y'' + y' - 2y = -6 \operatorname{sen} 2x - 18 \cos 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$

Ecuaciones de primer orden. El método de los coeficientes indeterminados también puede aplicarse a ciertas ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, y en ocasiones puede resultar más sencillo que el método usual (sección 1.7). Utilizando ambos métodos, resolver:

24. $y' - y = x^5$
25. $y' + 2y = \cos 2x$

2.10 SOLUCIÓN POR VARIACIÓN DE PARÁMETROS

El método de la sección anterior es simple y tiene aplicaciones importantes en la ingeniería (como se verá en las secciones siguientes), pero sólo se aplica a ecuaciones con coeficientes constantes con segundos miembros $r(x)$ especiales. En esta sección se discute el llamado método de variación de parámetros,[12] el cual es completamente general; es decir, se aplica a las ecuaciones

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad (1)$$

[12] Atribuido a Lagrange (ver la nota de pie de página 123 en la sección 2.7).

con p, q, r funciones variables arbitrarias que son continuas en algún intervalo I. El método da una solución particular y_p de (1) en I en la forma

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\, dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\, dx, \tag{2}$$

donde y_1, y_2 forman una base de soluciones de la ecuación homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{3}$$

que corresponde a (1) y

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 \tag{4}$$

es el wronskiano de y_1, y_2 (ver la sección 2.7).

En la práctica, este método es mucho más complicado que el método anterior, debido a las integraciones de (2). Primero se analizará un ejemplo en el que no puede aplicarse el método anterior (como lo indicará la respuesta).

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + y = \sec x.$$

Solución. Una base de soluciones de la ecuación homogénea en cualquier intervalo es

$$y_1 = \cos x, \qquad y_2 = \operatorname{sen} x.$$

Esto da lugar al wronskiano

$$W(y_1, y_2) = \cos x \cos x - (-\operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x = 1.$$

Por tanto, por (2), eligiendo el valor cero para las constantes de integración, se obtiene la solución particular

$$y_p = -\cos x \int \operatorname{sen} x \sec x\, dx + \operatorname{sen} x \int \cos x \sec x\, dx$$
$$= \cos x \ln|\cos x| + x \operatorname{sen} x$$

de la ecuación dada y, a partir de ella, la solución general

$$y = y_h + y_p = [c_1 + \ln|\cos x|] \cos x + (c_2 + x) \operatorname{sen} x.$$

Esta es la respuesta. Si se hubieran incluido dos constantes de integración arbitrarias $-c_1$, c_2, en (2) se habría obtenido la expresión adicional $c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x = c_1 y_1 + c_2 y_2$, es decir, una solución general de la ecuación dada directamente de (2). Este será siempre el caso. ∎

Idea del método. Deducción de (2)

¿Cuál era la idea de Lagrange? ¿De dónde proviene el nombre del método? ¿Cómo puede obtenerse (2)? ¿En dónde se usa el supuesto de continuidad?

La continuidad de p y q implica que la ecuación homogénea (3) tiene una solución general

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

en I, por el teorema 3 de la sección 2.7. El método de variación de parámetros implica reemplazar las constantes c_1 y c_2 (consideradas aquí como "parámetros" en y_h) con las funciones $u(x)$ y $v(x)$ que habrán de determinarse de tal modo que la función resultante

$$y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) \tag{5}$$

sea una solución particular de (1) en I. Al derivar (5) se obtiene

$$y_p' = u'y_1 + uy_1' + v'y_2 + vy_2'.$$

Ahora (5) contiene *dos* funciones u y v, pero el requisito de que y_p satisfaga (1) impone *una* sola condición sobre u y v. Por tanto, parece plausible que pueda imponerse una segunda condición arbitraria. De hecho, más adelante se probará que pueden determinarse u y v tales que y_p satisfaga (1) y u y v satisfagan como segunda condición la relación

$$u'y_1 + v'y_2 = 0. \tag{6}$$

Esto reduce la expresión de y'_p a la forma

$$y_p' = uy_1' + vy_2'. \tag{7}$$

Al derivar esta función se obtiene

$$y_p'' = u'y_1' + uy_1'' + v'y_2' + vy_2''. \tag{8}$$

Al sustituir (5), (7) y (8) en (1) y agrupar los términos que contienen a u y los términos que contienen a v, se obtiene de inmediato

$$u(y_1'' + py_1' + qy_1) + v(y_2'' + py_2' + qy_2) + u'y_1' + v'y_2' = r.$$

Puesto que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea (2), esta expresión se reduce a

$$u'y_1' + v'y_2' = r.$$

La ecuación (6) es

$$u'y_1 + v'y_2 = 0.$$

Este es un sistema lineal de dos ecuaciones algebraicas para las funciones desconocidas u' y v'. La solución se obtiene por la regla de Cramer (sección 7.8) o de la siguiente manera. La primera ecuación se multiplica por $-y_2$ y la segunda por y_2' y se suman para obtener

$$u'(y_1y_2' - y_2y_1') = -y_2r, \quad \text{por tanto} \quad u'W = -y_2r,$$

donde W es el wronskiano (4) de y_1, y_2. Ahora se multiplica la primera ecuación por y_1 y la segunda por $-y_1'$ y se suman para obtener

$$v'(y_1y_2' - y_2y_1') = y_1r, \quad \text{por tanto} \quad v'W = y_1r.$$

Al dividir entre $W \neq 0$ (y_1, y_2 forman una base, por tanto $W \neq 0$ por el teorema 2 de la sección 2.7) se obtiene

$$(9) \qquad u' = -\frac{y_2r}{W}, \qquad v' = \frac{y_1r}{W}.$$

Al integrar,

$$u = -\int \frac{y_2r}{W}\,dx, \qquad v = \int \frac{y_1r}{W}\,dx.$$

Estas integrales existen porque $r(x)$ es continua. Al sustituirlas en (5), se obtiene (2). Con esto se termina la deducción de la fórmula (2). ∎

¡ATENCION! Antes de aplicar (2), es necesario asegurarse de que la ecuación en cuestión está escrita en la forma estándar (1), con y'' como primer término; dividirla entre $f(x)$ si empieza con $f(x)y''$.

Problemas de la sección 2.10

Encontrar una solución general de las siguientes ecuaciones.

1. $y'' - 2y' + y = x^{3/2}e^x$
2. $y'' + 4y = 2 \sec 2x$
3. $y'' - 2y' + y = 12e^x/x^3$
4. $y'' + y = \csc x$
5. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}/x^2$
6. $y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x}/\operatorname{sen} x$
7. $y'' - 2y' + y = 35x^{3/2}e^x + x^2$
8. $y'' - 4y' + 4y = (3x^2 + 2)e^x$
9. $y'' - 2y' + y = e^x \operatorname{sen} x$
10. $y'' + 6y' + 9y = 8e^{-3x}/(x^2 + 1)$
11. $(D^2 - 4D + 4)y = 6x^{-4}e^{2x}$
12. $(D^2 + 9)y = \sec 3x$
13. $(D^2 - 2D + 1)y = e^x/x^3$
14. $(D^2 + 2D + 2)y = e^{-x}/\cos^3 x$

Ecuaciones de Euler-Cauchy no homogéneas. Encontrar una solución general de las siguientes ecuaciones. *¡Atención!* Dividir primero la ecuación entre el coeficiente de y'' para obtener la forma estándar (1).

15. $(x^2D^2 - 4xD + 6)y = 42/x^4$
16. $(x^2D^2 - 2)y = 9x^2$
17. $(x^2D^2 - 2xD + 2)y = 5x^3 \cos x$
18. $(xD^2 - D)y = (3 + x)x^2e^x$
19. $(xD^2 - D)y = x^2e^x$
20. $(x^2D^2 - 4xD + 6)y = -7x^4 \operatorname{sen} x$
21. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 24/x^2$
22. $4x^2y'' + 4xy' - y = 12/x$
23. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 1/x^4$
24. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4$

25. **(Comparación de los métodos)** Siempre que sea posible aplicar el método de los coeficientes indeterminados (sección 2.9), deberá usarse ya que es más sencillo que el último método. Para ilustrar este hecho, resolver por ambos métodos

$$y'' + 4y' + 3y = 65 \cos 2x.$$

2.11 MODELADO: OSCILACIONES FORZADAS. RESONANCIA

Los **movimientos libres** del sistema masa-resorte de la figura 43 son movimientos en ausencia de fuerzas externas y están gobernados por la ecuación diferencial homogénea

$$my'' + cy' + ky = 0 \qquad (1) \qquad \text{(Sec. 2.5).}$$

Aquí, y es el desplazamiento del cuerpo a partir del reposo, m es la masa del cuerpo, my'' es la fuerza de la inercia, cy' la fuerza de amortiguamiento y ky la fuerza del resorte. Los **movimientos forzados** se obtienen si se hace que una fuerza externa $r(t)$ actúe sobre el cuerpo. Para establecer el modelo, tan sólo se agrega la nueva fuerza $r(t)$ a dichas fuerzas; se obtiene así la ecuación diferencial no homogénea

$$\boxed{my'' + cy' + ky = r(t).}$$

$r(t)$ se conoce como la **fuerza de entrada** o **impulsora** y a una solución correspondiente se le llama **salida** o **respuesta** *del sistema a la fuerza impulsora.* (Ver también la sección 1.7.)

De particular interés son las *entradas periódicas* y se considerará una fuerza senoidal, es decir,

$$r(t) = F_0 \cos \omega t \qquad (F_0 > 0, \omega > 0).$$

Se tiene entonces la ecuación

$$\boxed{my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t,} \qquad (2)$$

cuya solución familiarizará con hechos aún más interesantes que son fundamentales en las matemáticas para ingeniería, en particular la resonancia.

Resolución de la ecuación

Una solución general de (2) es la suma de una solución general y_h de (1), la cual se conoce desde la sección 2.5, y una solución particular y_p de (2), la cual puede determi-

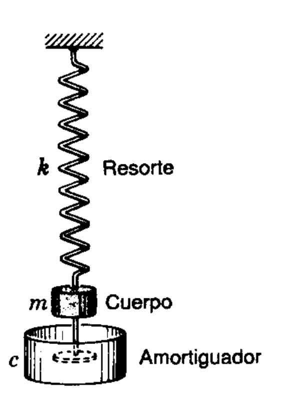


Figura 43. Masa en un resorte.

narse mejor por el método de los coeficientes indeterminados (sección 2.9). En consecuencia, se empieza con

$$y_p(t) = a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t. \tag{3}$$

Al derivar esta función se tiene

$$y_p' = -\omega a \operatorname{sen} \omega t + \omega b \cos \omega t,$$
$$y_p'' = -\omega^2 a \cos \omega t - \omega^2 b \operatorname{sen} \omega t.$$

Se sustituyen estas expresiones en (2) y se agrupan los términos con cosenos y senos:

$$[(k - m\omega^2)a + \omega cb] \cos \omega t + [-\omega ca + (k - m\omega^2)b] \operatorname{sen} \omega t = F_0 \cos \omega t.$$

Al igualar los coeficientes de los términos con cosenos y senos en ambos miembros se tiene

$$\begin{aligned} (k - m\omega^2)a + \omega cb &= F_0 \\ -\omega ca + (k - m\omega^2)b &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Este es un sistema lineal de dos ecuaciones algebraicas en las dos incógnitas a y b. La solución se obtiene de la manera usual por eliminación o por la regla de Cramer (de ser necesario, ver la sección 7.8). Se encuentra

$$a = F_0 \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}, \qquad b = F_0 \frac{\omega c}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$$

siempre y cuando el denominador sea diferente de cero. Si se hace $\sqrt{k/m} = \omega_0 \, (> 0)$ como en la sección 2.5, se llega a la expresión

$$a = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}, \quad b = F_0 \frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}. \tag{5}$$

Se obtiene así la solución general de (2) en la forma

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t), \tag{6}$$

donde y_h es una solución general de (1) y y_p está dada por (3) con los coeficientes (5).

Discusión de los tipos de soluciones

Se discutirá ahora el comportamiento del sistema mecánico, distinguiendo entre los dos casos $c = 0$ (sin amortiguamiento) y $c > 0$ (con amortiguamiento). Estos casos corresponderán a dos tipos diferentes de salida.

Caso 1. Oscilaciones forzadas no amortiguadas

Si no hay amortiguamiento, entonces $c = 0$. Se supone primero que $\omega^2 \neq \omega_0^2$ (donde $\omega_0^2 = k/m$, como en la sección 2.5). Esto es esencial. Entonces de (3) y (5) (donde $b = 0$ ya que $c = 0$) se obtiene

$$(7) \qquad y_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t = \frac{F_0}{k[1 - (\omega/\omega_0)^2]} \cos \omega t.$$

A partir de esta expresión y de la ecuación (6*) de la sección 2.5, se llega a la solución general

$$\textbf{(8)} \qquad \boxed{y(t) = C \cos (\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.}$$

*Esta salida representa una superposición de dos oscilaciones armónicas; las frecuencias son la "**frecuencia natural**" $\omega_0/2\pi$ [ciclos/segundo] del sistema (es decir, la frecuencia del movimiento libre no amortiguado) y la frecuencia $\omega/2\pi$ de la entrada.*

Por (7) se ve que la amplitud máxima de y_p es

$$(9) \qquad a_0 = \frac{F_0}{k}\rho \qquad \text{donde} \qquad \rho = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2}.$$

a_0 depende de ω y ω_0. Si $\omega \to \omega_0$, entonces ρ y a_0 tienden a infinito. Este fenómeno de excitación de grandes oscilaciones al hacer coincidir la entrada y las frecuencias naturales ($\omega = \omega_0$) se conoce como **resonancia** y es de importancia fundamental en el estudio de los sistemas vibratorios (ver más adelante). La cantidad se llama el *factor de resonancia* (figura 44). Por (9) se ve que $\rho/k = a_0/F_0$ es la razón entre las amplitudes de la función y_p y de la entrada.

En el caso de resonancia, la ecuación (2) queda como

$$\textbf{(10)} \qquad y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t.$$

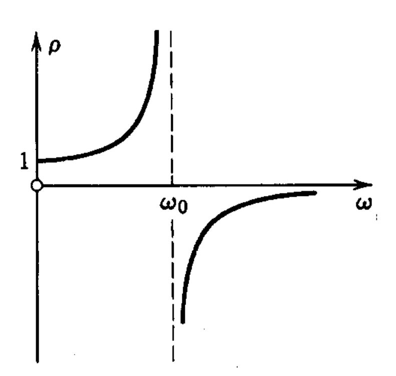


Figura 44. Factor de resonancia $\rho(w)$.

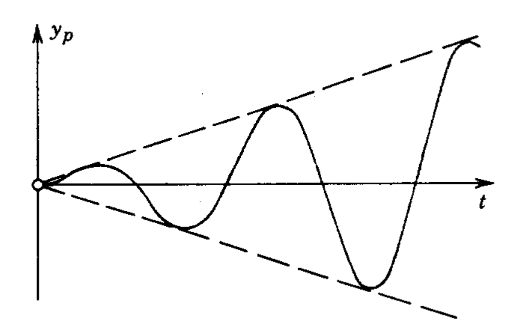


Figura 45. Solución particular en el caso de resonancia.

Por la regla de modificación de la sección 2.9 se concluye que una solución particular de (10) es de la forma

$$y_p(t) = t(a \cos \omega_0 t + b \operatorname{sen} \omega_0 t).$$

Al sustituir esta expresión en (10) se encuentra $a = 0$, $b = F_0/2m\,\omega_0$ y (figura 45)

$$\textbf{(11)} \qquad \boxed{y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen} \omega_0 t.}$$

Se ve que y_p se hace cada vez más grande. En la práctica, esto significa que los sistemas con poco amortiguamiento pueden sufrir vibraciones considerables que pueden destruir el sistema; se volverá a este aspecto práctico de la resonancia más adelante en esta sección.

Otro tipo de oscilación interesante y de gran importancia se obtiene cuando ω está próxima a ω_0. Considérese, por ejemplo, la solución particular [ver (8)]

$$(12) \qquad y(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \qquad (\omega \neq \omega_0)$$

que corresponde a las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Esta expresión puede escribirse como [ver (12) en el apéndice 3]

$$y(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \operatorname{sen} \frac{\omega_0 - \omega}{2} t.$$

Puesto que ω está próxima a ω_0, la diferencia $\omega_0 - \omega$ es pequeña, por lo que el periodo de la última función senoidal es grande, y se obtiene una oscilación del tipo ilustrado en la figura 46. Esto es lo que escuchan los músicos cuando afinan sus instrumentos.

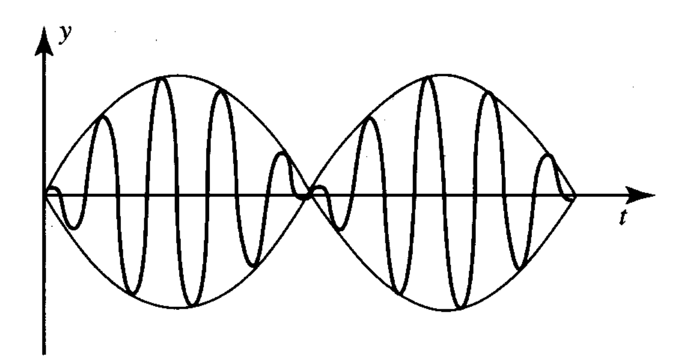


Figura 46. Oscilación forzada sin amortiguamiento cuando la diferencia de la entrada y las frecuencias naturales es pequeña (**pulsaciones**).

Caso 2. Oscilaciones forzadas amortiguadas

Si hay amortiguamiento, entonces $c > 0$ y por la sección 2.5 se sabe que la solución general y_h de (1) es

$$y_h(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega^* t + B \operatorname{sen} \omega^* t) \qquad \left(\alpha = \frac{c}{2m} > 0\right)$$

y esta solución tiende a cero cuando t tiende a infinito (en la práctica, después de un tiempo suficientemente largo); es decir, la solución general (6) de (2) representa ahora la **solución transitoria** y tiende a la **solución de estado estacionario** y_p. *Por tanto, después de un tiempo suficientemente largo, la salida que corresponde a una entrada senoidal pura será prácticamente una oscilación armónica cuya frecuencia es la de la entrada. Esto es lo que ocurre en la práctica, ya que ningún sistema físico es por completo no amortiguado.*

Mientras que en el caso sin amortiguamiento la amplitud de y_p tiende a infinito cuando ω tiende a ω_0, no ocurrirá lo mismo en el caso con amortiguamiento; *en este caso la amplitud siempre será finita*, pero puede tener un máximo para alguna w, dependiendo del valor de c. A este hecho puede llamársele **resonancia práctica**. Es de gran importancia porque indica que cierta entrada puede excitar oscilaciones con una amplitud tan grande que el sistema puede destruirse. Tales casos ocurrían en la práctica, en particular hace mucho tiempo cuando se sabía menos de la resonancia. Máquinas, automóviles, barcos, aviones y puentes son sistemas mecánicos vibratorios y en ocasiones resulta muy difícil encontrar construcciones que estén libres por completo de efectos de resonancia no deseados.

Amplitud de y_p

Para estudiar la amplitud de y_p como una función de ω, se escribe (3) en la forma

$$(13) \qquad y_p(t) = C^* \cos(\omega t - \eta)$$

donde, de conformidad con (5),

$$C^*(\omega) = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}}, \tag{14}$$

$$\tan \eta = \frac{b}{a} = \frac{\omega c}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Se determinará ahora el máximo de $C^*(\omega)$. Al hacer $dC^*/d\omega = 0$ se encuentra

$$[-2m^2(\omega_0^2 - \omega^2) + c^2]\,\omega = 0.$$

La expresión entre corchetes es cero cuando

$$c^2 = 2m^2(\omega_0^2 - \omega^2). \tag{15}$$

Para un amortiguamiento suficientemente grande ($c^2 > 2m^2\omega_0^2 = 2mk$) la ecuación (15) no tiene solución real, y C^* se decrementa de manera monótona conforme ω se incrementa (figura 47). Si $c^2 \leq 2mk$, la ecuación (15) tiene una solución real $\omega = \omega_{máx}$, que se incrementa conforme c se decrementa y tiende a ω_0 cuando c tiende a cero. La amplitud $C^*(\omega)$ tiene un máximo en $\omega = \omega_{máx}$ y al introducir $\omega = \omega_{máx}$ en (14) se encuentra

$$C^*(\omega_{máx}) = \frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2 - c^2}}. \tag{16}$$

Se ve que $C^*(\omega_{máx})$ es finita cuando $c > 0$. Puesto que $dC^*(\omega_{máx})/dc < 0$ cuando $c^2 < 2mk$, el valor de $C^*(\omega_{máx})$ se incrementa cuando $c\ (\leq \sqrt{2mk})$ se decrementa y tiende a infinito cuando c tiende a cero, lo que concuerda con el resultado estudiado en el caso 1. La figura 47 muestra la **amplificación** C^*/F_0 (razón de las amplitudes de la salida y la entrada) como una función de ω para $m = 1$, $k = 1$ y varios valores de la constante de amortiguamiento c.

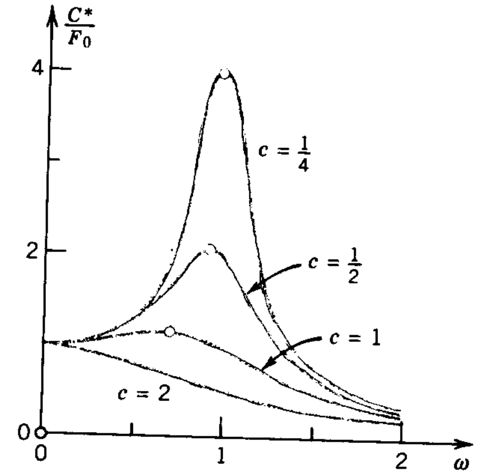


Figura 47. Amplificación C^*/F_0 como una función de ω para $m = 1$, $k = 1$ y varios valores de la constante de amortiguamiento c.

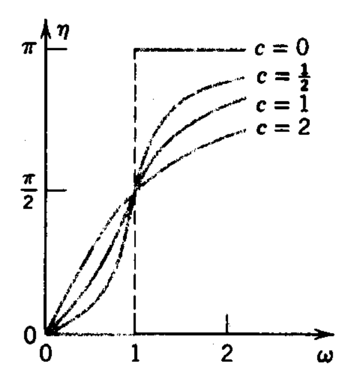


Figura 48. Atraso en fase η como una función de ω para $m = 1$, $k = 1$ y varios valores de la constante de amortiguamiento c.

El ángulo η de (14) se llama el **ángulo de fase** o **atraso en fase** (figura 48) debido a que mide el atraso de la salida con respecto a la entrada. Si $\omega < \omega_0$, entonces $\eta < \pi/2$; si $\omega = \omega_0$, entonces $\eta = \pi/2$, y si $\omega > \omega_0$, entonces $\eta > \pi/2$.

Problemas de la sección 2.11

Encontrar las oscilaciones de estado estacionario de los sistemas vibratorios gobernados por las siguientes ecuaciones.

1. $(D^2 + 4)y = 15 \operatorname{sen} t$

2. $y'' + y = \cos 2t$

3. $y'' + 3y' + 2y = 40 \operatorname{sen} t$

4. $2y'' + 2y' + 3y = \cos 3t - 5 \operatorname{sen} t$

5. $y'' + 5y' + 6y = 6.29 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t$

6. $(D^2 + D + 1)y = \cos t + 13 \cos 2t$

7. $(D^2 + 2D + 4)y = \operatorname{sen} 0.2t$

8. $(3D^2 + D + 2)y = 2 \cos t - 52 \operatorname{sen} 2t$

Encontrar los movimientos transitorios de los sistemas vibratorios gobernados por las siguientes ecuaciones.

9. $y'' + 25y = 48 \operatorname{sen} t$

10. $y'' + 2y' + 5y = -\operatorname{sen} t$

11. $y'' + 2y' + 2y = \cos t$

12. $y'' + 2y' + y = 50 \operatorname{sen} 3t$

13. $(D^2 + \frac{1}{2}D + 2)y = 5 \cos t$

14. $(D^2 + 4D + 5)y = 37.7 \operatorname{sen} 4t$

15. $(D^2 + 1)y = \cos \omega t,\ \omega^2 \neq 1$

16. $(D^2 + 4D + 20)y = \operatorname{sen} t + \frac{4}{19} \cos t$

En cada caso, la ecuación diferencial dada es el modelo matemático de un sistema vibratorio. Encontrar el movimiento del sistema correspondiente al desplazamiento inicial y la velocidad inicial dados.

17. $y'' + 9y = 8 \operatorname{sen} t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

18. $y'' + 4y' + 20y = 23 \operatorname{sen} t - 15 \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y(0) = -1$

19. $(D^2 + \omega_0^2)y = \cos \omega t, \quad y(0) = y_0, \quad y(0) = v_0, \quad \omega^2 \neq \omega_0^2$

20. $(D^2 + 4)y = \operatorname{sen} t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3t + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5t, \quad y(0) = 1, \quad y(0) = \frac{3}{35}$

21. $(D^2 + D + 0.25)y = 2 \cos t - \frac{3}{2} \operatorname{sen} t - 2 \cos 2t + 3.75 \operatorname{sen} 2t,$
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.5$

22. **(Tubo cañón)** Resolver

$$y'' + y = \begin{cases} 1 - t^2/\pi^2 & \text{si } 0 \leqq t \leqq \pi \\ 0 & \text{if } t > \pi \end{cases} \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Esta expresión puede interpretarse como un sistema no amortiguado en el que una fuerza F actúa durante cierto intervalo de tiempo (ver la figura 49), por ejemplo la fuerza que actúa sobre el tubo cañón cuando se dispara una obús, con el tubo frenado por fuertes resortes (y después por un amortiguador hidráulico que se ha omitido por sencillez). *Sugerencia.* En $t = \pi$ tanto y como y' deben ser continuas.

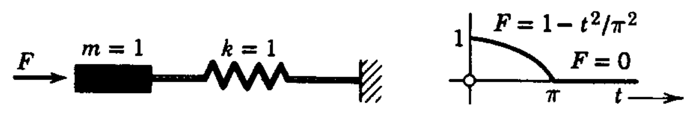


Figura 49. Problema 22.

23. En la ecuación (12), sea que ω tiende a ω_0. Demostrar que esto lleva a una solución de la forma (11).

24. ¿Para qué condiciones iniciales $y(0) = y_0, y'(0) = v_0$ la solución del problema 15 representa una oscilación cuya frecuencia es igual a la de la entrada?

25. Resolver el problema con valor inicial $y'' + y = \cos \omega t$, $\omega^2 \neq 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Graficar la amplitud máxima como una función de ω. Demostrar que la solución puede escribirse

$$y(t) = \frac{2}{1 - \omega^2} \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(1 + \omega)t\right] \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(1 - \omega)t\right].$$

Trazar gráficas de $y(t)$ con $\omega = 0.5, 0.9, 1.1, 2$.

2.12 MODELADO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

La sección anterior se dedicó al estudio de un sistema mecánico que presenta un gran interés práctico. Se tratará ahora un *sistema eléctrico* de importancia similar, el cual puede considerarse como una de las piezas fundamentales de las redes eléctricas. Esta consideración también proporcionará un ejemplo notable del importante hecho de que ***sistemas físicos por completo diferentes pueden corresponder al mismo modelo matemático*** —en el caso presente, a la misma ecuación diferencial— por lo que pueden abordarse y resolverse por los mismos métodos. Se trata de una impresionante demostración de la ***capacidad unificadora*** de las matemáticas.

De hecho, se obtendrá una *correspondencia entre sistemas mecánicos y eléctricos que no es sólo cualitativa sino estrictamente cuantitativa* en el sentido de que para un sistema mecánico dado puede construirse un circuito eléctrico cuya corriente dará los valores exactos del desplazamiento en el sistema mecánico cuando se introducen los factores de escala adecuados.

La importancia práctica de esta ***analogía entre sistemas mecánicos y eléctricos*** es casi obvia. La analogía puede usarse para construir un "modelo eléctrico" de un sistema mecánico dado; en muchos casos esta será una simplificación esencial, debido a que los circuitos eléctricos son más fáciles de ensamblar y las corrientes y los

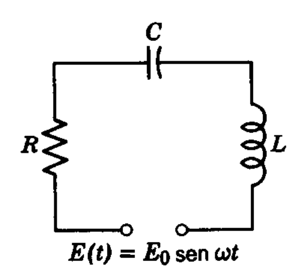


Figura 50. Circuito *RLC.*

voltajes son más fáciles de medir, en tanto que la construcción de un modelo mecánico puede resultar complicada y costosa, y la medición de los desplazamientos tomará bastante tiempo y será relativamente imprecisa.

Planteamiento del modelo

Se considera el circuito *RLC* de la figura 50, en el cual un resistor de Ohm de resistencia R [ohms], un inductor de inductancia L [henrys] y un capacitor de capacitancia C [faradios] están conectados en serie a una fuente de fuerza electromotriz $E(t)$ [volts], donde t es el tiempo. La ecuación para la corriente $I(t)$ [amperes] en el circuito *RLC* se obtiene considerando las tres caídas de voltaje

$$E_L = LI' \qquad \text{en el inductor,}$$

$$E_R = RI \qquad \text{en el resistor (\textit{ley de Ohm}) y}$$

$$E_C = \frac{1}{C}\int I(t)\,dt \qquad \text{en el capacitor}$$

Su suma es igual a la fuerza electromotriz $E(t)$. Esta es la **ley del voltaje de Kirchoff** (sección 1.8), el análogo de la segunda ley de Newton (sección 2.5) para sistemas mecánicos. Para una $E(t) = E_0$ sen ωt (E_0 constante) senoidal de esta ley se obtiene

$$(1') \qquad LI' + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = E(t) = E_0 \text{ sen } \omega t.$$

Este proceso de modelado es igual al de la sección 1.8. De hecho, si se agrega $E_L = LI'$ a la ecuación (7) de la sección 1.8 para el circuito *RC*, se obtiene la ecuación (1') para el circuito *RLC*.

Para eliminar la integral de (1'), se deriva con respecto a t, obteniéndose

$$(1) \qquad \boxed{LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E_0\omega \cos \omega t.}$$

Esta expresión es de la misma forma que (2), *sección 2.11. Por tanto, este circuito RLC es el análogo eléctrico del sistema mecánico de la sección* 2.11. *La analogía*

correspondiente de las cantidades eléctricas y las mecánicas se muestra en la tabla 2.2.

Sistema eléctrico	Sistema mecánico
Inductancia L	Masa m
Resistencia R	Constante de amortiguamiento c
Recíproco $1/C$ de la capacitancia	Módulo del resorte k
Derivada $E_0\omega \cos \omega t$ de la fuerza electromotriz	Fuerza impulsora $F_0 \cos \omega t$
Corriente $I(t)$	Desplazamiento $y(t)$

Tabla 2.2. Analogía de las cantidades eléctricas y las mecánicas en (1), de esta sección, y (2), de la sección 2.11.

Comentario. Recuérdese de la sección 1.8 que $I = Q'$; se tiene entonces $I' = Q''$ y $Q = \int I\,dt$ en (1'). Por tanto, de (1') se obtiene como ecuación diferencial de la carga Q en el capacitor

$$(1'') \qquad LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E_0 \operatorname{sen} \omega t.$$

En la mayoría de los problemas prácticos, la corriente $I(t)$ es más importante que $Q(t)$ y por esta razón la atención se centrará más en (1) que en (1'').

Resolución de la ecuación (1), discusión de la solución

Para obtener una solución particular de (1) puede procederse como en la sección 2.11. Al sustituir

$$(2) \qquad I_p(t) = a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t$$

en (1) se obtiene

$$(3) \qquad a = \frac{-E_0 S}{R^2 + S^2}, \qquad b = \frac{E_0 R}{R^2 + S^2}$$

donde S es la llamada **reactancia**, dada por la expresión

$$(4) \qquad S = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

En cualquier caso práctico, $R \neq 0$, por lo que el denominador de (3) es diferente de cero. El resultado es que (2), con a y b dadas por (3), es una solución particular de (1).

Usando (3), puede escribirse I_p en la forma

$$(5) \qquad I_p(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t - \theta)$$

donde [ver (14) en el apéndice 3]

$$I_0 = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + S^2}}, \qquad \tan\theta = -\frac{a}{b} = \frac{S}{R}.$$

La cantidad $\sqrt{R^2 + S^2}$ se llama la **impedancia**. Esta fórmula indica que la impedancia es igual al cociente E_0/I_0, que es un tanto análogo a $E/I = R$ (ley de Ohm).

Una solución general de la ecuación homogénea correspondiente a (1) es

$$I_h = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

donde λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0,$$

que pueden escribirse en la forma $\lambda_1 = -\alpha + \beta$ y $\lambda_2 = -\alpha - \beta$, donde

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \qquad \beta = \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}.$$

Como en la sección 2.11, se concluye que si $R > 0$ (lo cual se cumple, desde luego, en cualquier caso práctico), la solución general $I_h(t)$ de la ecuación homogénea tiende a cero cuando t tiende a infinito (prácticamente: después de un tiempo suficientemente largo). Por tanto, la corriente transitoria $I = I_h + I_p$ tiende a la corriente de estado estacionario I_p, y *después de algún tiempo* ***la salida será prácticamente una oscilación armónica****, la cual está dada por* (5) *y cuya frecuencia es la de la entrada.*

EJEMPLO 1 Circuito *RLC*

Encontrar la corriente $I(t)$ en un circuito *RLC* con $R = 100$ ohms, $L = 0.1$ henrys, $C = 10^{-3}$ faradios, que está conectado a una fuente de voltaje $E(t) = 155 \operatorname{sen} 377t$ (de donde 60 Hz = 60 ciclos/segundo), suponiendo una carga y una corriente cero cuando $t = 0$.

Solución. Primer paso. Solución general. La ecuación (1) es

$$0.1I'' + 100I' + 1000I = 155 \cdot 377 \cos 377t.$$

Se calcula la reactancia $S = 37.7 - 1/0.377 = 35.0$ y la corriente de estado estacionario

$$I_p(t) = a \cos 377t + b \operatorname{sen} 377t$$

donde

$$a = \frac{-155 \cdot 35.0}{100^2 + 35^2} = -0.484, \qquad b = \frac{155 \cdot 100}{100^2 + 35^2} = 1.380.$$

Entonces se resuelve la ecuación característica

$$0.1\lambda^2 + 100\lambda + 1000 = 0.$$

Las raíces son $\lambda_1 = -10$ y $\lambda_2 = -990$. Por tanto, la solución general es

$$I(t) = c_1 e^{-10t} + c_2 e^{-990t} - 0.484 \cos 377t + 1.380 \operatorname{sen} 377t. \tag{6}$$

Segundo paso. Solución particular. Se determinan c_1 y c_2 a partir de las condiciones iniciales $Q(0) = 0$ e $I(0) = 0$. De la segunda condición se obtiene

$$I(0) = c_1 + c_2 - 0.484 = 0. \tag{7}$$

¿Cómo debe usarse $Q(0) = 0$? Al despejar algebraicamente I' en (1'), se tiene

$$I' = \frac{1}{L}\left[E(t) - RI(t) - \frac{1}{C}Q(t)\right] \tag{8}$$

ya que $\int I\,dt = Q$. Aquí $E(0) = 0$, $I(0) = 0$ y $Q(0) = 0$, de donde $I'(0) = 0$. Por tanto, al derivar (6) se obtiene

$$I'(0) = -10c_1 - 990c_2 + 1.380 \cdot 377 = 0. \tag{9}$$

La solución de (7) y (9) es $c_1 = -0.042$, $c_2 = 0.526$. Así, por (6) se llega a la respuesta

$$I(t) = -0.042e^{-10t} + 0.526e^{-990t} - 0.484 \cos 377t + 1.380 \operatorname{sen} 377t.$$

Los dos primeros términos desaparecerán con rapidez y después de un tiempo muy corto la corriente ejecutará prácticamente oscilaciones armónicas de frecuencia 60 Hz = 60 ciclos/segundo, que es la frecuencia del voltaje aplicado.

Obsérvese que por (5) puede escribirse la corriente de estado estacionario en la forma

$$I_p(t) = 1.463 \operatorname{sen}(377t - 0.34).$$ ∎

Problemas de la sección 2.12

Circuitos *RLC*

1. Deducir (3) de dos maneras, a saber, (a) directamente sustituyendo (2) en (1), (b) a partir de la fórmula (5) de la sección 2.11, usando la tabla 2.2 y tomando $E_0\omega$ en lugar de F_0.
2. En el texto se afirmó que si $R > 0$, entonces la corriente transitoria tiende a $I_p(t)$ cuando $t \to \infty$. ¿Cómo puede demostrarse esta afirmación?
3. **(Tipos de amortiguamiento)** ¿Cuáles son las condiciones para que un circuito *RLC* esté sobreamortiguado (caso I), críticamente amortiguado (Caso II) y subamortiguado (caso III)? En particular, ¿cuál es la resistencia crítica R_{crit} (el análogo de la constante de amortiguamiento crítico $2\sqrt{mk}$)?
4. **(Sintonización)** Al sintonizar un radio en una estación se hace girar la perilla del radio que cambia C (o quizás L) en un circuito *RLC* (figura 51) para que la amplitud de la corriente de estado estacionario sea máxima. ¿Para qué valor de C será este el caso?

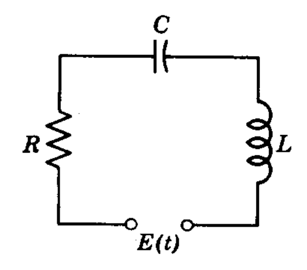


Figura 51. Circuito *RLC.*

Encontrar la corriente de estado estacionario en el circuito *RLC* de la figura 51, donde

5. $R = 4$ ohms, $L = 1$ henry, $C = 2 \cdot 10^{-4}$ faradios, $E = 220$ volts

6. $R = 10$ ohms, $L = 5$ henrys, $C = 10^{-2}$ faradios, $E = 87\frac{2}{9}$ sen $3t$ volts

7. $R = 20$ ohms, $L = 10$ henrys, $C = 10^{-3}$ faradios, $E = 100 \cos t$ volts

Encontrar la corriente transitoria en el circuito *RLC* de la figura 51, donde

8. $R = 20$ ohms, $L = 5$ henrys, $C = 10^{-2}$ faradios, $E = 85$ sen $4t$ volts

9. $R = 200$ ohms, $L = 100$ henrys, $C = 0.005$ faradios, $E = 500$ sen $4t$ volts

10. $R = 16$ ohms, $L = 8$ henrys, $C = \frac{1}{8}$ faradio, $E = 100 \cos 2t$ volts

Usando (8), encontrar la corriente en el circuito *RLC* de la figura 51, suponiendo una corriente y una carga iniciales cero, y

11. $R = 80$ ohms, $L = 20$ henrys, $C = 0.01$ faradios, $E = 100$ volts

12. $R = 160$ ohms, $L = 20$ henrys, $C = 0.002$ faradios, $E = 481$ sen $10t$ volts

13. $R = 6$ ohms, $L = 1$ henry, $C = 0.04$ faradios, $E = 24 \cos 5t$ volts

Circuitos *LC*

(En la práctica, éstos son circuitos *RLC* con *R* despreciablemente pequeña)

14. Encontrar la frecuencia natural (= frecuencia de oscilaciones libres) de un circuito *LC* (a) directamente, (b) por la sección 2.5 por medio de la tabla 2.2.

Encontrar la corriente $I(t)$ en el circuito *LC* de la figura 52, donde

15. $L = 0.4$ henrys, $C = 0.1$ faradios, $E = 110$ sen ωt volts, $\omega^2 \neq 25$

16. $L = 0.2$ henrys, $C = 0.05$ faradios, $E = 100$ volts

17. $L = 2.5$ henrys, $C = 10^{-3}$ faradios, $E = 10t^2$ volts

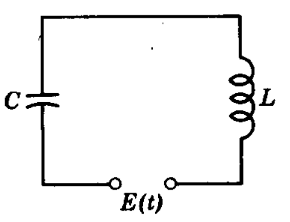


Figura 52. Circuito *LC*.

Encontrar la corriente $I(t)$ en el circuito *LC* de la figura 52, suponiendo una corriente y una carga iniciales cero, y

18. $L = 10$ henrys, $C = 0.004$ faradios, $E = 250$ volts

19. $L = 1$ henry, $C = 0.25$ faradios, $E = 30$ sen t volts

20. $L = 10$ henrys, $C = \frac{1}{90}$ faradio, $E = 10 \cos 2t$ volts

21. $L = 10$ henrys, $C = 0.1$ faradios, $E = 10t$ volts

22. Demostrar que si $E(t)$ en la figura 52 tiene un salto de magnitud J en $t = a$, entonces $I'(t)$ tiene un salto de magnitud J/L en $t = a$, en tanto que $I(t)$ es continua en $t = a$.

Usando el resultado del problema 22, encontrar la corriente $I(t)$ en el circuito LC de la figura 52, suponiendo que $L = 1$ henry, $C = 1$ faradio, corriente y carga iniciales cero y

23. $E = 1$ cuando $0 < t < 1$ y $E = 0$ cuando $t > 1$

24. $E = t$ cuando $0 < t < a$ y $E = a$ cuando $t > a$

25. $E = 1 - e^{t}$ cuando $0 < t < \pi$ y $E = 0$ cuando $t > \pi$

2.13 MÉTODO COMPLEJO PARA OBTENER SOLUCIONES PARTICULARES. *OPCIONAL*

A los ingenieros les gusta resolver ecuaciones como

$$(1) \qquad LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E_0\omega \cos \omega t \qquad \text{(Sec. 2.12)}$$

por un elegante método complejo, usando el hecho de que cos ωt es la parte real de $e^{i\omega t}$ (ver la sección 2.3), encontrando una solución particular I_p de la ecuación compleja resultante

$$\textbf{(2)} \qquad \boxed{LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E_0\omega e^{i\omega t}} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

y finalmente tomando la parte real $\tilde{I}_p$ de I_p como una solución particular de la ecuación real (1) dada. Para encontrar I_p, se sustituye (usando $i^2 = -1$)

$$I_p = Ke^{i\omega t}, \qquad I_p' = i\omega Ke^{i\omega t}, \qquad I_p'' = -\omega^2 Ke^{i\omega t}$$

en (2). Se obtiene así

$$\left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right) Ke^{i\omega t} = E_0\omega e^{i\omega t}.$$

Después de dividir ambos miembros entre $\omega e^{i\omega t}$, de resolver la ecuación para K y de usar la reactancia $S = \omega L - 1/\omega C$ [(4), sección 2.12], se obtiene

$$(3) \qquad K = \frac{E_0}{-\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) + iR} = \frac{E_0}{-S + iR} = \frac{-E_0(S + iR)}{S^2 + R^2},$$

donde la última igualdad se sigue al multiplicar el numerador y el denominador por $-S - iR$. Por tanto, la solución particular compleja de (2) es

$$I_p = Ke^{i\omega t} = \frac{-E_0}{S^2 + R^2}(S + iR)(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t).$$

La parte real (de nuevo se usa $i^2 = -1$).

$$(4) \qquad \tilde{I}_p = \frac{-E_0}{S^2 + R^2}(S \cos \omega t - R \operatorname{sen} \omega t).$$

Este resultado concuerda con (2), (3) de la sección 2.12.

EJEMPLO 1 Método complejo

Resolver por el método complejo:

$$I'' + I' + 3I = 5 \cos t.$$

Solución. La ecuación diferencial compleja correspondiente es

$$I'' + I' + 3I = 5e^{it}.$$

Se sustituye

$$I_p = Ke^{it}, \qquad I'_p = iKe^{it}, \qquad I''_p = -Ke^{it}$$

en la ecuación compleja. Se obtiene así

$$(-1 + i + 3)Ke^{it} = 5e^{it}.$$

Al despejar K se obtiene

$$K = \frac{5}{2 + i} = \frac{5(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{10 - 5i}{5} = 2 - i.$$

A partir de esta expresión se llega a la solución compleja

$$I_p = (2 - i)e^{it} = (2 - i)(\cos t + i \operatorname{sen} t).$$

La parte real es

$$\tilde{I}_p = 2 \cos t + \operatorname{sen} t.$$

El estudiante deberá comprobar que ésta es en efecto una solución de la ecuación dada. ∎

La fórmula (3) sugiere la introducción de la llamada **impedancia compleja**

$$(5) \qquad \boxed{Z = R + iS = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).}$$

Entonces (3) puede escribirse en la forma

$$(3^*) \qquad K = \frac{E_0}{iZ}.$$

Se observa que la parte real de Z es R, la parte imaginaria es la reactancia S y el valor absoluto es la impedancia

$$|Z| = \sqrt{R^2 + S^2} \qquad \text{(Sec. 2.12).}$$

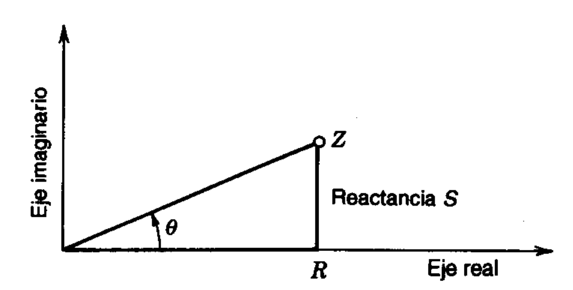


Figura 53. Impedancia compleja Z.

Por tanto (figura 53)

$$(6) \qquad Z = |Z|e^{i\theta} \qquad \text{donde} \qquad \tan\theta = \frac{S}{R}.$$

Por consiguiente, la solución I_p de (2) puede escribirse ahora (usar $1/i = -i$)

$$I_p = \frac{E_0}{iZ}e^{i\omega t} = -i\frac{E_0}{|Z|}e^{i(\omega t-\theta)}.$$

Su parte real es

$$(7) \qquad \tilde{I}_p = \frac{E_0}{|Z|}\operatorname{sen}(\omega t - \theta) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+S^2}}\operatorname{sen}(\omega t - \theta),$$

y esta solución de la ecuación (1) dada concuerda con (5) de la sección 2.12, justificando plenamente el presente método complejo. ∎

Problemas de la sección 2.13

Usando el método complejo, determinar la corriente de estado estacionario $I_p(t)$ en el circuito *RLC* gobernado por (1), donde

1. $L = 30$, $R = 50$, $C = 0.025$, $E_0 = 200$, $\omega = 4$
2. $L = 4$, $R = 20$, $C = 0.5$, $E_0 = 10$, $\omega = 10$
3. $L = 2$, $R = 4$, $C = \frac{1}{8}$, $E_0 = 10$, $\omega = 5$
4. $R = 50$, $L = 25$, $C = 0.01$, $E_0 = 500$, $\omega = 3$
5. $R = 20$, $L = 10$, $C = 0.05$, $E_0 = 5$, $\omega = 2$

6. Encontrar la impedancia compleja Z y la reactancia en el problema 1.
7. Comprobar I_p del ejemplo 1 de la sección 2.12 por el método complejo.

Usando el método complejo, encontrar la salida de estado estacionario de las siguientes ecuaciones.

8. $y'' + 5y' + \frac{1}{2}y = 25\cos 10t$
9. $y'' + y' + 4y = 8\operatorname{sen} 2t$
10. $y'' + 0.5y' + 2y = 5\cos t$
11. $y'' + 2y' + 2y = \cos t$
12. $y'' - y' - 2y = \operatorname{sen} t$
13. $y'' + 4y' + 3y = 65\cos 2t$
14. $y'' + 3y' + 2y = 20\operatorname{sen} t$
15. $y'' + 2y' + y = 50\operatorname{sen} 3t$

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 2

1. ¿Qué es el principio de superposición? ¿Es válido para ecuaciones no lineales? ¿Para ecuaciones lineales no homogéneas? ¿Para ecuaciones lineales homogéneas?
2. ¿Cuántas constantes arbitrarias incluye una solución general de una ecuación lineal no homogénea de segundo orden? ¿Cuántas condiciones adicionales se necesitan para determinarlas?
3. ¿Cómo se determinaría prácticamente si dos soluciones de una ecuación diferencial son linealmente independientes? ¿Por qué es esto importante y pertinente en este capítulo?
4. ¿Tiene sentido hablar de la dependencia lineal de dos funciones un solo punto? Explicar la respuesta.
5. Si se conocen dos soluciones de una ecuación diferencial lineal no homogénea en el mismo intervalo, ¿puede encontrarse a partir de ellas una solución particular de la ecuación homogénea correspondiente? ¿Una solución general de esta última?
6. ¿Cuál es la diferencia entre un problema con valor inicial y un problema con valores en la frontera? ¿Por qué no se hizo esta diferencia en el caso de una ecuación de primer orden?
7. ¿Qué es una solución particular? ¿Por qué las soluciones particulares son generalmente más comunes como respuestas finales de problemas prácticos que las soluciones generales?
8. ¿Por qué siempre se determina primero una solución general, aun cuando sólo se necesite una solución particular?
9. ¿Puede tener una ecuación diferencial lineal no homogénea la solución trivial 0? ¿Una ecuación diferencial lineal homogénea?
10. ¿Qué puede decir el lector acerca de la existencia y la unicidad de las soluciones?
11. ¿Qué es el wronskiano y qué papel desempeña en los temas tratados?
12. Se consideraron dos grandes clases de ecuaciones diferenciales que pueden resolverse básicamente por manipulaciones "algebraicas". ¿Cúales eran?
13. Al establecer un modelo, por lo general se prefieren las ecuaciones diferenciales lineales sobre las no lineales siempre que pueda esperarse obtener un cuadro fiel de la realidad a partir de una ecuación lineal. ¿Cuál es la razón de esto?
14. Para las ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes se distinguieron tres casos. ¿Cuáles son? ¿Cuál es su importancia en relación con los sistemas masa-resorte? ¿En los circuitos *RLC*?
15. ¿Que se entiende por "resonancia"? ¿Dónde y bajo qué circunstancias ocurre?

Encontrar una solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

16. $y'' - 2y' + y = e^x \operatorname{sen} x$

17. $y'' + y' - 2y = 3e^x$

18. $x^2y'' + xy' - y = 4$

19. $x^2y'' - 0.4xy' + 0.49y = 0$

20. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$

21. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}/x$

22. $y'' + y' + y = \cos x + 13\cos 2x$

23. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\cos x$

24. $y'' + 9y = \sec 3x + 18x - 36$

25. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^4 \operatorname{sen} x$

26. $(D^2 - D - 2)y = 4 \operatorname{sen} x$

27. $(D^2 + 4D + 3)y = 2\cos x + \operatorname{sen} x$

28. $(x^2D^2 - 5xD + \frac{82}{9})y = 0$

29. $(D^2 + 4D + 4)y = e^{-2x}/x^2$

30. $(x^2D^2 + xD - 1)y = x^3e^x$

Resolver los siguientes problemas con valor inicial.

31. $y'' - 2y' + y = 2x^2 - 8x + 4, \quad y(0) = 0.3, \quad y'(0) = 0.3$

32. $(D^2 + 2D + 10)y = 10x^2 + 4x + 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

33. $4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0, \quad y(4) = \frac{3}{4}, \quad y'(4) = -\frac{5}{32}$

34. $(D^2 + 4)y = 8e^{-2x} + 4x^2 + 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$
35. $(x^2D^2 + xD - 1)y = 16x^3, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 11$
36. $y'' - 0.2y' + 100.01y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -9.9$
37. $y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + \pi^2)y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -3\alpha$
38. $(D^2 + 2D + 5)y = 16 \operatorname{sen} x, \quad y(0) = -0.6, \quad y'(0) = 0.2$
39. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(\frac{1}{2}\pi) = 0, \quad y'(\frac{1}{2}\pi) = -2e^{-\pi/2}$
40. $y'' + 4y' + (4 + \omega^2)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \omega - 2$
41. $y'' + 2y' + 2y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
42. $(x^2D^2 - 2)y = 3x^2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0$
43. $(D^2 - 4D + 3)y = 2 \operatorname{sen} x - 4 \cos x, \quad y(\frac{1}{4}\pi) = 1/\sqrt{2}, \quad y'(\frac{1}{4}\pi) = 1/\sqrt{2}$
44. $(4D^2 - 4D + 65)y = 64e^{x/2} + 65x - 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5.5$
45. $(D^2 + 0.5D - 0.5)y = 3 \cos x + \operatorname{sen} x + e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.5$

46. Encontrar la corriente de estado estacionario en el circuito RLC de la figura 54, suponiendo que $L = 1$ henry, $R = 2000$ ohms, $C = 4 \cdot 10^{-3}$ faradios y $E(t) = 110 \operatorname{sen} 415t$ (66 ciclos/segundo).

47. Encontrar una solución general de la ecuación homogénea que corresponde a la ecuación del problema 46.

48. Encontrar la corriente en el circuito RLC de la figura 54 cuando $R = 20$ ohms, $L = 0.1$ henrys, $C = 1.5625 \cdot 10^{-3}$ faradios, $E(t) = 160t$ volts si $0 < t < 0.01$, $E(t) = 1.6$ volts si $t > 0.01$ s, suponiendo que $I(0) = 0$, $I'(0) = 0$.

49. Encontrar la corriente de estado estacionario en el circuito RLC de la figura 54 cuando $R = 50$ ohms, $L = 30$ henrys, $C = 0.025$ faradios, $E(t) = 200 \operatorname{sen} 4t$ volts.

50. Encontrar el movimiento del sistema masa-resorte de la figura 55 con masa 0.125 kg, amortiguamiento 0, constante del resorte 1.125 kg/s^2 y fuerza impulsora $\cos t - 4 \operatorname{sen} t$ N, suponiendo un desplazamiento y una velocidad iniciales cero. ¿Para qué frecuencia de la fuerza impulsora se produciría resonancia?

51. Encontrar la solución de estado estacionario del sistema de la figura 55 cuando $m = 1$, $c = 2$, $k = 6$ y la fuerza impulsora es $\operatorname{sen} 2t + 2 \cos 2t$.

52. En la figura 55, sean $m = 1$, $c = 4$, $k = 24$ y $r(t) = 10 \cos \omega t$. Determinar ω tal que se obtenga la oscilación de estado estacionario con la máxima amplitud posible. Determinar esta amplitud. Después encontrar la solución general con esta ω y comprobar si los resultados concuerdan.

53. En el problema 51, encontrar la solución que corresponde al desplazamiento inicial 1 y a la velocidad inicial 0.

54. Una boya cilíndrica de 60 cm de diámetro está en el agua sobre su eje vertical (figura 56). Cuando se hunde un poco y luego se suelta, se encuentra que el periodo de oscilación es

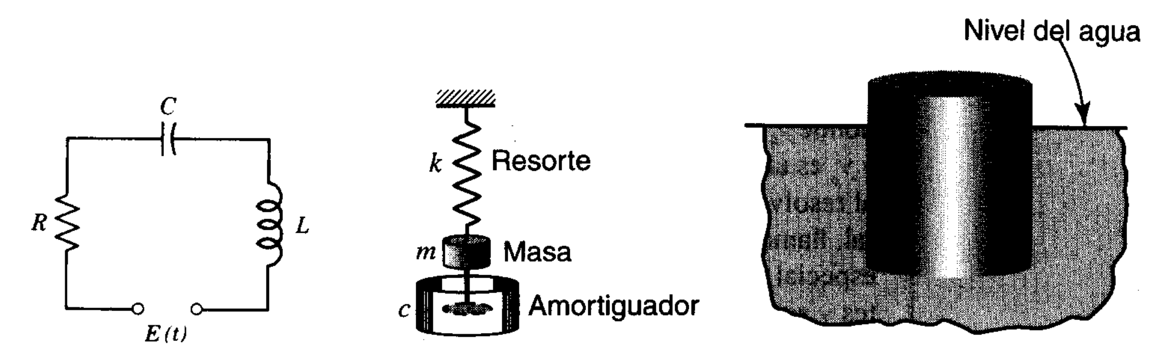


Figura 54. Circuito *RLC*. **Figura 55.** Sistema masa-resorte. **Figura 56.** Boya.

de 2 segundos. Determinar el peso de la boya. *Sugerencia.* Por el **principio de Arquímedes**, la fuerza de flotación es igual al peso del agua desplazada por el cuerpo (el cual se supone total o parcialmente sumergido).

55. Resolver $y'' + 6y' + 8y = 40$ sen $2x$ por coeficientes indeterminados y por variación de parámetros; comentar el trabajo requerido en ambos métodos.

Resumen del capítulo 2

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Una ecuación lineal homogénea de *primer orden* es $y' + p(x)y = 0$ (sección 1.7). Una **ecuación lineal homogénea de segundo orden** es una ecuación que puede escribirse

(1) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Posee la muy importante propiedad de que una combinación lineal de soluciones es también una solución (**principio de superposición** o **principio de linealidad**, sección 2.1). Dos soluciones y_1, y_2 de (1) linealmente independientes forman una **base** de soluciones y $y = c_1y_1 + c_2y_2$ con constantes arbitrarias c_1, c_2 es una **solución general**. A partir de ella se obtiene una **solución particular** si se especifican valores numéricos de c_1 y c_2, por ejemplo, al imponer dos **condiciones iniciales** (sección 2.1)

(2) $$y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \qquad (x_0, K_0, K_1 \text{ números dados}).$$

En conjunto, (1) y (2) constituyen un **problema con valor inicial** para (1). Si p y q son continuas en algún intervalo abierto I y x_0 está en I, entonces (1) tiene una solución general en I, y (1), (2) tiene una solución única en I (que es una solución particular; por tanto (1) no tiene soluciones singulares).

Las secciones 2.1-2.7 tratan las ecuaciones lineales ***homogéneas*** y las secciones 2.8-2.13 las ecuaciones lineales **no homogéneas**

(3) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad r(x) \not\equiv 0.$$

Una **solución general** de (3) es de la forma

$$y = y_h + y_p,$$

donde y_h es una solución general de la ecuación homogénea (1) correspondiente y y_p es una solución particular de (3). Por tanto, el problema práctico adicional al resolver (3) es la determinación de esta y_p. Para ello se dan un método general, llamado el método de **variación de parámetros** (sección 2.10), un método especial más simple de **coeficiente indeterminados**, válido para p, q constantes y r especial (potencias de x, senos, cosenos, etc.; sección 2.9) y un método complejo para fuerzas impulsoras senoidales (sección 2.13).

Si $p(x)$ y $q(x)$ en (1) o (3) son *variables*, las soluciones serán en general funciones superiores. En el capítulo 5 se estudian las más importantes. Si $p(x)$ y $q(x)$ son ***constantes***, se escribe $p(x) = a$, $q(x) = b$ y a partir de (1) se obtiene una ecuación

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{4}$$

Esta ecuación puede resolverse sustituyendo $y = e^{\lambda x}$. Entonces λ es una raíz de la **ecuación característica**

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Por tanto, hay tres casos (sección 2.2):

Caso	Tipo de raíces	Solución general
I	λ_1, λ_2 reales diferentes	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
II	$-\frac{1}{2}a$ doble	$y = (c_1 + c_2 x)e^{-ax/2}$
III	$-\frac{1}{2}a \pm i\omega$ complejas	$y = e^{-ax/2}(A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x)$

La ecuación (4) y la ecuación no homogénea

$$y'' + ay' + by = r(x) \qquad (a, b \text{ constantes}) \tag{5}$$

tienen importantes aplicaciones en ingeniería mecánica (secciones 2.5, 2.11) y eléctrica (sección 2.12), que son fundamentales en el estudio de las oscilaciones y la resonancia.

Otra gran clase de ecuaciones que también pueden resolverse por métodos "algebraicos" se compone de las **ecuaciones de Euler-Cauchy** (sección 2.6)

$$x^2y'' + axy' + by = 0.$$

Si se sustituye $y = x^m$, puede determinarse m a partir de la ecuación auxiliar

$$m^2 + (a - 1)m + b = 0$$

(donde en el caso de una raíz doble $m = (1 - a)/2$, una base es x^m, $x^m \ln x$).

Capítulo

3

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

En este capítulo se demuestra que los conceptos y métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden del capítulo 2 se generalizan de manera directa a las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. En realidad no se necesitan nuevas ideas para hacer esta generalización. La correspondencia entre las secciones es aproximadamente la siguiente (y deberá usarse para facilitar el estudio del capítulo 3):

La sección 3.1 es una generalización de 2.1 y 2.7.
3.2 es una generalización de 2.2 y 2.3.
3.3 es una generalización de 2.8.
3.4 es una generalización de 2.9.
3.5 es una generalización de 2.10.

Algunas características nuevas son:

(i) En las secciones 3.1 y 3.5, un papel más importante del wronskiano.
(ii) En la sección 3.2, el mayor número de posibilidades para las raíces (en lugar de sólo tres casos en las secciones 2.2 y 2.3).
(iii) En la sección 3.5, la interesante generalización de la demostración de Lagrange.

Prerrequisitos para este capítulo: Capítulo 2
Bibliografía: Apéndice 1, parte A.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

3.1 ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS

Recuérdese de la sección 1.1 que una ecuación diferencial ordinaria de ***n*-ésimo orden** es una ecuación en la que la n-ésima derivada $y^{(n)} = d^ny/dx^n$ de la función desconocida $y(x)$ es la mayor derivada presente. Por tanto la ecuación es de la forma

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

sin olvidar que pueden estar presentes o no derivadas de y de órdenes menores o la propia y.

La ecuación se llama **lineal** si puede escribirse

$$(1) \qquad y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

donde r en el segundo miembro y los **coeficientes,** $p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$ son cualquier función dada de x. Cualquier ecuación diferencial de n-ésimo orden que no pueda escribirse en la forma (1) se llama **no lineal.**

Como en la sección 2.1 para $n = 2$, la **"forma estándar"** (1), con $y^{(n)}$ como primer término, es práctica. (Dividir la ecuación entre $f(x)$ si el primer término es $f(x)y^{(n)}$.) Si $r(x) \equiv 0$, la ecuación (1) queda como

$$(2) \qquad y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

y se llama **homogénea.** Si $r(x)$ no es idéntica a cero, la ecuación se llama **no homogénea.** Ocurre lo mismo que en el capítulo 2.

Solución. Solución general. Independencia lineal

Una **solución** de una ecuación diferencial (lineal o no lineal) de n-ésimo orden en algún intervalo abierto I es una función $y = h(x)$ que está definida y es derivable n veces en I, y es tal que la ecuación se convierte en una identidad si se sustituyen la función desconocida y y sus derivadas en la ecuación por h y sus respectivas derivadas.

Se discute ahora la ecuación homogénea (2) y se empieza con el siguiente

Teorema 1 (Principio de superposición o principio de linealidad

Para la ecuación diferencial lineal ***homogénea*** (2), *las sumas y los múltiplos constantes de soluciones en algún intervalo abierto I también son soluciones de* (2) *en I.*

La demostración se reduce a una generalización de la presentada en la sección 2.1 y se le deja al estudiante. Y se repite la ***advertencia*** de que el teorema ***no es válido*** para la ecuación no homogénea (1) o para una ecuación no lineal.

El análisis subsecuente es semejante y amplía el de las ecuaciones de segundo orden, presentado en el capítulo 2. Así pues, a continuación se definirá una solución general de (2), para la que será necesario extender la independencia lineal de dos a n funciones, concepto de gran importancia general, tema que rebasa el objetivo actual.

Definición (solución general, base, solución particular)

Una **solución general** de (2) en un intervalo abierto I es una solución de (2) en I de la forma

$$(3) \qquad y(x) = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x) \qquad (c_1, \cdots, c_n \text{ arbitrarias}^1)$$

[1] Ver la nota de pie de página 91 en la sección 2.1.

donde $y_1, \cdots, y_n$ es una **base** (o **sistema fundamental**) de soluciones de (2) en I; es decir, estas soluciones son linealmente independientes en I, según se define a continuación.

Una **solución particular** de (2) en I se obtiene si se asignan valores específicos a las n constantes $c_1, \cdots, c_n$ en (3). ∎

Definición (independencia y dependencia lineal)

Se dice que n funciones $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ son **linealmente independientes** *en algún intervalo I* donde están definidas si la ecuación

$$k_1 y_1(x) + \cdots + k_n y_n(x) = 0 \quad \text{on } I \tag{4}$$

implica que todas las $k_1, \cdot, k_n$ son cero. Se dice que estas funciones son **linealmente dependientes** en I si esta ecuación también es válida en I para alguna $k_1, \cdots, k_n$ cuando no todas son cero. ∎

Si y sólo si $y_1, \cdots, y_n$ son linealmente dependientes en I es posible expresar (al menos) una de estas funciones en I como una "**combinación lineal**" de las $n - 1$ funciones restantes, es decir, como una suma de dichas funciones, cada una de ellas multiplicada por una constante (cero o no). Se motiva así el término "linealmente dependiente". Por ejemplo, si (4) es válida con $k_1 \neq 0$, puede dividirse entre k_1 y expresar y_1 como la combinación lineal

$$y_1 = -\frac{1}{k_1}(k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n).$$

Obsérvese que cuando $n = 2$, estos conceptos se reducen a los definidos en la sección 2.1.

EJEMPLO 1 Dependencia lineal

Demostrar que las funciones $y_1 = x$, $y_2 = 3x$, $y_3 = x^2$ son linealmente dependientes en cualquier intervalo.

Solución. $y_2 = 3y_1 + 0y_3$. ∎

EJEMPLO 2 Independencia lineal

Demostrar que $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$ son linealmente independientes en cualquier intervalo, por ejemplo, en $-1 \leq x \leq 2$.

Solución. La ecuación (4) es $k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 = 0$. Al tomar $x = -1, 1, 2$, se obtiene

$$-k_1 + k_2 - k_3 = 0, \qquad k_1 + k_2 + k_3 = 0, \qquad 2k_1 + 4k_2 + 8k_3 = 0,$$

respectivamente, lo cual implica que $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, es decir la independencia lineal.

Estos cálculos no fueron muy placenteros e ilustran la necesidad de un método mejor para probar la independencia lineal, al menos para soluciones. Se llegará a esto pronto. ∎

EJEMPLO 3 Solución general, base

Resolver la ecuación diferencial de cuarto orden

$$y^{\text{IV}} - 5y'' + 4y = 0.$$

Solución. Como en la sección 2.2, se prueba $y = e^{\lambda x}$. Entonces la sustitución y omisión del factor (diferente de cero) común $e^{\lambda x}$ produce la ecuación característica

$$\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0,$$

que es una ecuación cuadrática en $\mu = \lambda^2$,

$$\mu^2 - 5\mu + 4 = 0.$$

Las raíces son $\mu = 1$ y $\mu = 4$. Por tanto, $\lambda = -2, -1, 1, 2$, de donde se obtienen cuatro soluciones, por lo que una solución general en cualquier intervalo es

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x} + c_4 e^{2x}$$

siempre que esas soluciones sean linealmente independientes. Es este el caso, pero se demostrará más adelante. ∎

Problema con valor inicial, existencia y unicidad

Un **problema con valor inicial** para la ecuación (2) se compone de (2) y n **condiciones iniciales**

$$(5) \qquad y(x_0) = K_0, \qquad y'(x_0) = K_1, \qquad \cdots, \qquad y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1},$$

donde x_0 es algún punto fijo en el intervalo I considerado.

Como ampliación del teorema 1 de la sección 2.7 se tiene ahora lo siguiente.

Teorema 2 Teorema de existencia y unicidad para problemas con valor inicial

Si $p_0(x), \cdots, p_{n-1}(x)$ son funciones continuas en algún intervalo abierto I y x_0 está en I, entonces el problema con valor inicial (2), (5) *tiene una solución única $y(x)$ en el intervalo I.*

La existencia se demuestra en la referencia [A6] del apéndice 1 y la unicidad puede demostrarse mediante una ligera generalización de la prueba de unicidad que está al principio del apéndice 4.

EJEMPLO 4 Problema con valor inicial para una ecuación de Euler-Cauchy de tercer orden

Resolver el problema con valor inicial

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0, \qquad y(1) = 2, \qquad y'(1) = 1, \qquad y''(1) = -4$$

en cualquier intervalo abierto I sobre el eje x positivo que contenga a $x = 1$.

Solución. Primer paso. Solución general. Como en la sección 2.6, se prueba $y = x^m$. Al derivar y sustituir se obtiene

$$m(m-1)(m-2)x^m - 3m(m-1)x^m + 6mx^m - 6x^m = 0.$$

Ordenando términos y eliminando el factor x^m se obtiene

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0.$$

Si es posible conjeturar la raíz $m = 1$, puede dividirse y encontrar como las otras raíces a $m = 2$ y $m = 3$. (Sin conjeturar, para órdenes mayores que cuatro, es necesario usar un método numérico para encontrar

raíces, como el de Newton; ver la sección 18.2.) Las soluciones correspondientes x, x^2, x^3 son linealmente independientes en I (ver el ejemplo 2). Por tanto, una solución general en I es

$$y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3.$$

(El intervalo I considerado no incluye 0, donde los coeficientes de la ecuación en la forma estándar [la forma dada dividida entre x^3] no son continuos, pero se observa que, en realidad, y es una solución general en cualquier intervalo.)

Segundo paso. Solución particular. En este caso se necesitan también las derivadas

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2, \qquad y'' = 2c_2 + 6c_3x.$$

A partir de esto, de y y de las condiciones iniciales se obtiene

$$\begin{aligned} y(1) &= c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ y'(1) &= c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 1 \\ y''(1) &= 2c_2 + 6c_3 = -4. \end{aligned}$$

Por eliminación o por la regla de Cramer (sección 7.8) se obtiene $c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = -1$. *Respuesta.* $y = 2x + x^2 - x^3$. ∎

Independencia lineal de las soluciones. Wronskiano

Se ha visto que resultaría conveniente contar con un criterio práctico para verificar la independencia lineal de las soluciones. Por fortuna, el criterio en el que interviene el wronskiano (teorema 2 de la sección 2.7) se generaliza al n-ésimo orden. Utiliza el **wronskiano** W de n soluciones definido como el determinante de n-ésimo orden

$$(6) \qquad W(y_1, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

y puede enunciarse como sigue.

Teorema 3 (Dependencia e independencia lineal de las soluciones)

Suponer que los coeficientes $p_0(x), \cdots, p_{n-1}(x)$ de (2) son continuos en algún intervalo abierto I. Entonces n soluciones $y_1, \cdots, y_n$ de (2) en I son linealmente dependientes en I si y sólo si su wronskiano es cero para alguna $x = x_0$ en I. Además, si $W = 0$ para $x = x_0$, entonces $W \equiv 0$ en I; por tanto, si existe una x_1 en I en la que $W \neq 0$, entonces $y_1, \cdots, y_n$ son linealmente independientes en I.

Demostración. **(a)** Sean $y_1, \cdots, y_n$ linealmente dependientes en I. Entonces existen constantes $k_1, \cdots, k_n$ no todas cero, tales que

$$(7) \qquad k_1y_1 + \cdots + k_ny_n = 0$$

para toda x en I, y al derivar $n-1$ veces esta identidad,

$$(8)\qquad \begin{aligned} k_1y_1' + \cdots + k_ny_n' &= 0 \\ &\vdots \\ k_1y_1^{(n-1)} + \cdots + k_ny_n^{(n-1)} &= 0. \end{aligned}$$

(7), (8) es un sistema lineal homogéneo de ecuaciones algebraicas con una solución no trivial $k_1, \cdots, k_n$, por lo que el determinante de sus coeficientes debe ser cero para toda x en I, por el teorema de Cramer (sección 7.9). Pero ese determinante es el wronskiano W, de donde $W = 0$ para toda x en I.

(b) Recíprocamente, sea $W = 0$ para una x_0 en I. Entonces el sistema (7), (8) con $x = x_0$ tiene una solución $\tilde{k}_1, \cdots, \tilde{k}_n$, no todas cero, por el mismo teorema. Con estas constantes se define la solución $\tilde{y} = \tilde{k}_1y_1 + \cdots + \tilde{k}_ny_n$ de (2). Por (7), (8) satisface las condiciones iniciales $\tilde{y}(x_0) = 0, \cdots, \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$. Pero otra solución que también satisface estas condiciones es $y \equiv 0$. Por tanto, $\tilde{y} \equiv y$ en I por el teorema 2; es decir, (7) es una identidad en I, lo que implica la dependencia lineal de $y_1, \cdots, y_n$.

(c) Si $W = 0$ en una x_0 de I, entonces po (b) se tiene dependencia lineal, por lo cual $W \equiv 0$ por (a), de modo que $W \neq 0$ en cualquier x_1 implica independencia lineal de las soluciones $y_1, \cdots, y_n$. ∎

EJEMPLO 5 Base, wronskiano

Puede demostrarse ahora que en el ejemplo 3 se tiene una base. Para evaluar W, se sacan los exponenciales por columnas. En el resultado, se resta la columna 1 de las columnas 2, 3, 4 y se desarrolla por el renglón 1. En el determinante de tercer orden resultante, se resta la columna 1 de la 2 y se desarrolla el resultado por el renglón 2:

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} & e^{x} & e^{2x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} & e^{x} & 2e^{2x} \\ 4e^{-2x} & e^{-x} & e^{x} & 4e^{2x} \\ -8e^{-2x} & -e^{-x} & e^{x} & 8e^{2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -3 & -3 & 0 \\ 7 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 72.$$ ∎

Una solución general de (2) incluye todas las soluciones

Se demuestra primero que siempre existen soluciones generales. De hecho, el teorema 3 de la sección 2.7 se generaliza de la siguiente manera.

Teorema 4 (Existencia de una solución general)

Si los coeficientes $p_0(x), \cdots, p^{n-1}(x)$ de (2) *son continuos en algún intervalo abierto I, entonces* (2) *tiene una solución general en I.*

Demostración. Se elige cualquier x_0 fija en I. Por el teorema (2), la ecuación (2) tiene n soluciones $y_1, \cdots, y_n$, donde y_j satisface las condiciones iniciales (5) con $K_j = 1$ y

todas las K restantes iguales a cero. Su wronskiano en x_0 es igual a 1; por ejemplo, cuando $n = 3$,

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0), y_3(x_0)) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) \\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Por tanto, estas soluciones son linealmente independientes en I, por el teorema 3; forman una base en I, y $y_1 = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ con constantes arbitrarias $c_1, \cdots, c_n$ es una solución general de (2) en I. ∎

Puede demostrarse ahora la propiedad básica de que a partir de una solución general de (2) es posible obtener todas las soluciones de (2) mediante la elección de valores adecuados de las constantes arbitrarias. Por tanto, una ecuación diferencial ***lineal*** de n–ésimo orden no tiene **soluciones singulares**, es decir, soluciones que no puedan obtenerse a partir de la solución general.

Teorema 5 (Solución general)

Suponer que (2) *tiene coeficientes continuos* $p_0(x), \cdots, p_{n-1}(x)$ *en algún intervalo abierto* I. *Entonces toda solución* $y = Y(x)$ *de* (2) *en* I *es de la forma*

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x), \tag{9}$$

donde $y_1, \cdots, y_n$ *es una base de soluciones de* (2) *en* I *y* $C_1, \cdots, C_n$ *son constantes adecuadas.*

Demostración. Sea $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ una solución general de (2) en I y se elige cualquier x_0 fija en I. Se demuestra que pueden encontrarse valores de $c_1, \cdots, c_n$ para los que y y sus primeras $n-1$ derivadas concuerdan con Y y sus respectivas derivadas en x_0. En forma desarrollada, esto significa que para $x = x_0$ deberá tenerse

$$\begin{aligned} c_1 y_1 &+ \cdots + c_n y_n &= Y \\ c_1 y_1' &+ \cdots + c_n y_n' &= Y' \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)} &+ \cdots + c_n y_n^{(n-1)} &= Y^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Pero este es un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas $c_1, \cdots, c_n$. El determinante de sus coeficientes es el wronskiano de $y_1, \cdots, y_n$ en $x = x_0$, que es diferente de cero por el teorema 3 debido a que $y_1, \cdots, y_n$ son linealmente independientes en I (¡forman una base!). Por tanto, (10) tiene una solución única $c_1 = C_1, \cdots, c_n = C_n$ (por

el teorema de Cramer, sección 7.9). Con estos valores a partir de la solución general se obtiene la solución particular

$$y^*(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

en I. Por (10) se ve que y^* concuerda con Y en x_0, y ocurre lo mismo para las primeras $n-1$ derivadas de y^* y Y. Es decir, y^* y Y satisfacen las mismas condiciones iniciales en x_0. Por el teorema de unicidad (teorema 2) se sigue entonces que $y^* \equiv Y$ en I, y el teorema queda demostrado. ∎

Con esto se termina la teoría de la ecuación lineal homogénea (2) y en la siguiente sección se empieza con los métodos para encontrar soluciones.

Problemas de la sección 3.1

Propiedades generales importantes de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas. Demostrar los siguientes enunciados, los cuales se refieren a cualquier intervalo abierto fijo I. Se supone aquí que $r(x) \not\equiv 0$ en (1).

1. La **"solución trivial"** $y(x) \equiv 0$ es una solución de (2) pero no de (1).
2. La suma de una solución de (1) y una solución de (2) es una solución de (1).
3. La diferencia de dos soluciones de (1) es una solución de (2).
4. La suma de dos soluciones de (1) ***no*** es una solución de (1).
5. Un múltiplo cy de una solución y de (1) con $c \neq 1$ ***no*** es una solución de (1).

Demostrar que las funciones dadas forman una base de soluciones de las ecuaciones diferenciales dadas en cualquier intervalo abierto, verificando la independencia lineal por el teorema 3. (En el problema 7, suponer $x > 0$.)

6. $1, x, x^2, x^3, \quad y^{IV} = 0$
7. $1, x^2, x^4, \quad x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$
8. $e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}, \quad y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
9. $e^{-x}, xe^{-x}, x^3e^{-x}, x^2e^{-x}, \quad (D^4 + 4D^3 + 6D^2 + 4D + 1)y = 0$
10. $x, x^2, e^x, \quad [(x^2 - 2x + 2)D^3 - x^2D^2 + 2xD - 2]y = 0$
11. $\cos x, \operatorname{sen} x, e^{-x}, \quad (D^3 + D^2 + D + 1)y = 0$
12. $e^x, e^{-x}, \cos x, \operatorname{sen} x, \quad y^{IV} - y = 0$
13. $e^x \cos x, e^x \operatorname{sen} x, e^{-x} \cos x, e^{-x} \operatorname{sen} x, \quad (D^4 + 4)y = 0$
14. $\cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \quad (D^4 + 5D^2 + 4)y = 0$
15. $\cosh x, \operatorname{senh} x, \cos x, \operatorname{sen} x, \quad y^{IV} - y = 0$

Comprobar que las funciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial dada. Demostrar su independencia lineal por el teorema 3. Resolver el problema con valor inicial dado.

16. $y''' - y' = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = -4, \quad y''(0) = 2; \quad 1, e^{-x}, e^x$
17. $y^{IV} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -48; \quad 1, x, x^2, x^3$
18. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 11, \quad y''(0) = 17;$ e^x, e^{2x}, e^{3x}
19. $xy''' + 3y'' = 0, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = -8, \quad y''(1) = 10; \quad 1, x, x^{-1}$
20. $(x + 1)y''' - y'' - (x + 1)y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1,$ $y''(0) = 1; \quad e^x, e^{-x}, x + 1$

Independencia y dependencia lineal

Puesto que estos conceptos son de importancia *general*, rebasando con mucho el presente estudio, se agregan algunos problemas más sobre ellos.

21. $1, x, x^2$
22. $x, x + 1, x + 2$
23. $(x - 1)^2, (x + 1)^2, x$
24. $\cos^2 x, \operatorname{sen}^2 x, -2$
25. $\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x$
26. $\ln x, \ln x^2, (\ln x)^2$
27. $x, 1/x, 1$
28. $\cosh^2 x \operatorname{senh}^2 x, 1$
29. $(x - 1)^2, (x + 1)^2, x$
30. $\cos x, \operatorname{sen} x, 1$
31. $\cos^2 x, \operatorname{sen}^2 x, \cos 2x$
32. $\cos x, \cosh x, e^x$

33. Encontrar un intervalo I en el que las tres funciones x^3, $|x|^3$ y 1 sean linealmente independientes y un subintervalo de I en el que las funciones sean linealmente dependientes. ¿Qué hecho se ilustra aquí?

34. Si un conjunto de R funciones es linealmente dependiente en un intervalo I, probar que un conjunto de n $(\geq p)$ funciones que contiene al primer conjunto es linealmente dependiente en I.

35. Si n funciones son linealmente dependientes en un intervalo I, probar que también son linealmente dependientes en cualquier subintervalo de I.

36. Si $y \equiv 0$ es una función de un conjunto de funciones en un intervalo I, probar que el conjunto es linealmente dependiente en I.

37. Comprobar los cálculos del ejemplo 5.

38. Demostrar que las funciones de una base de una ecuación (2) con coeficientes continuos no pueden tener todas un máximo o un mínimo en el mismo punto.

39. Demostrar que las funciones del problema 38 no pueden ser todas cero en el mismo punto.

40. Comprobar que e^x, e^{-x}, x forman una base de

$$xy''' - y'' - xy' + y = 0$$

en cualquier intervalo. Demostrar que $W(e^x, e^{-x}, x) = 0$ en $x = 0$. ¿Contradice esto el teorema 3?

3.2 ECUACIONES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Se tratan ahora las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de n-ésimo orden con coeficientes *constantes* y estas ecuaciones se escriben en la forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{1}$$

La idea de solución es la misma que para $n = 2$. De hecho, por sustitución de $y = e^{\lambda x}$ y sus derivadas se obtiene la **ecuación característica**

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{2}$$

de (1). Para obtener soluciones de (1) es necesario determinar las raíces de (2), lo cual resultará complicado en la práctica y tendrá que hacerse por un método numérico, a menos que puedan conjeturarse algunas raíces o encontrarse por tanteo. Se discutirán los casos posibles (que combinan y generalizan los tratados en las secciones 2.2 y 2.3) y se ilustrarán por medio de ejemplos típicos.

Raíces reales diferentes

Si (2) tiene n raíces reales diferentes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, entonces las n soluciones

(3) $$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad \cdots, \quad y_n = e^{\lambda_n x}$$

Forman una base para toda x y la solución general correspondiente de (1) es

(4) $$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

De hecho, las soluciones de (3) son linealmente independientes, como se verá después del ejemplo.

EJEMPLO 1 Raíces reales diferentes

Resolver la ecuación diferencial

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Solución. Las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

son -1, 1 y 2, y la solución general (4) correspondiente es

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}.$$

El estudiante deberá verificar la independencia lineal usando el wronskiano. ∎

Los estudiantes que estén familiarizados con determinantes de n-ésimo orden pueden verificar que al sacar todas las exponenciales de las columnas, el wronskiano de $e^{\lambda x}, \cdots, e^{\lambda x}$ queda como

(5)
$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

La función exponencial nunca es cero. Por tanto $W = 0$ si y sólo si el determinante del segundo miembro es cero. Este es el llamado **determinante de Vandermonde o de Cauchy**.[2] Puede demostrarse que es igual a

$$(-1)^{n(n-1)/2} V \tag{6}$$

donde V es el producto de todos los factores $\lambda_j - \lambda_k$ con $j < k\ (\le n)$; por ejemplo, si $n = 3$ se tiene $-V = -(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)$. Con esto se demuestra que el wronskiano es diferente de cero si y sólo todas las n raíces de (2) son diferentes llegándose así a lo siguiente.

Teorema 1 (Base)

Las soluciones $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \cdots, y_n = e^{\lambda_n x}$ de (1) (con cualesquiera λ_j reales o complejas) forman una base de soluciones de (1) si y sólo si todas las n raíces de (2) son diferentes.

En realidad, el teorema es un importante caso especial del resultado más general obtenido a partir de (5) y (6):

Teorema 2 (Independencia lineal)

Cualquier número de soluciones $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \cdots, y_m = e^{\lambda_m x}$ de (1) son linealmente independientes en un intervalo abierto I si y sólo si $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ son todas diferentes.

Raíces complejas simples

Si se presentan raíces complejas, deben hacerlo en pares conjugados ya que los coeficientes de (1) son reales. Por tanto, si $\lambda = \gamma + i\omega$ es una raíz simple de (2), también lo es el conjugado $\lambda = \gamma - i\omega$, y dos soluciones linealmente independientes correspondientes son (como en la sección 2.3, salvo por la notación)

$$y_1 = e^{\gamma x} \cos \omega x, \qquad y_2 = e^{\gamma x} \operatorname{sen} \omega x.$$

EJEMPLO 2 Raíces complejas conjugadas simples

Resolver el problema con valor inicial

$$y''' - 2y'' + 2y' = 0, \qquad y(0) = 0.5, \qquad y'(0) = -1, \qquad y''(0) = 2.$$

Solución. Una raíz de $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = 0$ es $\lambda_1 = 0$. Una solución correspondiente es $y_1 = e^{0x} = 1$. Al dividir entre λ se obtiene

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

[2] ALEXANDRE-THÉOPHILE VANDERMONDE (1735-1796), matemático francés, quien trabajó en la solución de ecuaciones por determinantes. Para CAUCHY, ver la nota de pie de página 115 en la sección 2.6

Las raíces son $\lambda_2 = 1 + i$ y $\lambda_3 = 1 - i$. Las soluciones correspondientes son $y_2 = e^x \cos x$ y $y_3 = e^x \operatorname{sen} x$. La solución general correspondiente y sus derivadas son

$$y = c_1 + e^x[A \cos x + B \operatorname{sen} x],$$

$$y' = e^x[(A + B)\cos x + (B - A)\operatorname{sen} x],$$

$$y'' = e^x[2B \cos x - 2A \operatorname{sen} x],$$

como se sigue por derivación. A partir de estas expresiones y de las condiciones iniciales se obtiene

$$y(0) = c_1 + A = 0.5, \qquad y'(0) = A + B = -1, \qquad y''(0) = 2B = 2.$$

Por tanto, $B = 1$, $A = -2$, $c_1 = 2.5$. La respuesta es

$$y = 2.5 + e^x(-2 \cos x + \operatorname{sen} x).$$ ∎

Raíces reales múltiples

Si se presenta una **raíz real doble**, por ejemplo, $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces $y_1 = y_2$ en (3) y se toman y_1 y $y_2 = xy_1$ como dos soluciones linealmente independientes que corresponden a esta raíz; es como en la sección 2.2.

Si se presenta una **raíz triple**, por ejemplo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, entonces $y_1 = y_2 = y_3$ en (3) y tres soluciones linealmente independientes que corresponden a esta raíz son

$$y_1, \qquad xy_1, \qquad x^2y_1. \tag{7}$$

En términos más generales, *si* λ *es una* **raíz de orden *m***, *entonces m soluciones linealmente independientes correspondientes son*

$$\boxed{e^{\lambda x}, \qquad xe^{\lambda x}, \qquad \cdots, \qquad x^{m-1}e^{\lambda x}.} \tag{8}$$

La independencia lineal de estas funciones en cualquier intervalo abierto se sigue de la de $1, x, \cdots, x^{m-1}$, la cual se sigue a su vez del teorema 3 de la sección 3.1 y del hecho de que se trata de soluciones de $y^{(m)} = 0$ con wronskiano W diferente de cero. ¿Cómo se llega a (8)? Esto se indica después del ejemplo.

EJEMPLO 3 Raíces reales dobles y triples

Resolver la ecuación diferencial

$$y^{V} - 3y^{IV} + 3y''' - y'' = 0.$$

Solución. La ecuación característica

$$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

tiene las raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1$, y la respuesta es

$$y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x + c_5x^2)e^x. \tag{9}$$

¿Puede resolverse la ecuación haciendo $y'' = z$? ∎

Como se anticipó, se demuestra ahora cómo se obtiene (8) [y que estas funciones son soluciones de (1) en el caso presente]. Para simplificar un poco las fórmulas, se usa la notación de operadores (ver la sección 2.4), escribiendo el primer miembro de (1) como

$$L[y] = [D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0]y.$$

Para $y = e^{\lambda x}$ pueden efectuarse las derivaciones indicadas y se obtiene

$$L[e^{\lambda x}] = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0)e^{\lambda x}.$$

Sea λ_1 una raíz de m-ésimo orden del polinomio del segundo miembro y sean $\lambda_{m+1}, \cdots, \lambda_n$ las raíces restantes, todas diferentes de λ_1, cuando $m < n$. En forma de producto se tiene entonces

$$L[e^{\lambda x}] = (\lambda - \lambda_1)^m h(\lambda)e^{\lambda x}$$

con $h(\lambda) = 1$ si $m = n$ o $h(\lambda) = (\lambda - \lambda_{m+1}) \cdots (\lambda - \lambda_n)$ si $m < n$. Ahora interviene la idea clave: Se derivan ambos miembros con respecto a λ,

$$\text{(10)} \qquad \frac{\partial}{\partial\lambda} L[e^{\lambda x}] = m(\lambda - \lambda_1)^{m-1}h(\lambda)e^{\lambda x} + (\lambda - \lambda_1)^m \frac{\partial}{\partial\lambda}[h(\lambda)e^{\lambda x}].$$

Las derivaciones con respecto a x y λ son independientes, por lo que puede cambiarse su orden en el primer miembro:

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial}{\partial\lambda} L[e^{\lambda x}] = L\left[\frac{\partial}{\partial\lambda} e^{\lambda x}\right] = L[xe^{\lambda x}].$$

Ahora el segundo miembro de (10) es cero para $\lambda = \lambda_1$ debido a los factores $\lambda - \lambda_1$ (y $m \geq 2$). Por tanto (11) indica que $xe^{\lambda x}$ es una solución de (1).

Puede repetirse este paso y producir $x^2e^{\lambda x}, \cdots, x^{m-1}e^{\lambda_1 x}$ al hacer otras $n-2$ derivaciones iguales con respecto a λ. Si se hiciera un paso más ya no se tendría cero en el segundo miembro porque la menor potencia de $\lambda - \lambda_1$ sería entonces $(\lambda - \lambda_1)^0$, multiplicada por $m!h(\lambda)$ y $h(\lambda_1) \neq 0$ porque $h(\lambda)$ no tiene $\lambda - \lambda_1$; se obtienen por lo tanto *precisamente* las soluciones de (8). ∎

Raíces complejas múltiples

En este caso, se obtienen soluciones reales como en las raíces complejas simples anteriores. En consecuencia, si $\lambda = \gamma + i\omega$ es una **raíz compleja doble**, también lo es el conjugado $\bar{\lambda} = \gamma - i\omega$. Las soluciones linealmente independientes correspondientes son

$$\textbf{(12)} \qquad \boxed{e^{\gamma x}\cos \omega x \qquad e^{\gamma x}\,\text{sen}\, \omega x, \qquad xe^{\gamma x}\cos \omega x, \qquad xe^{\gamma x}\,\text{sen}\, \omega x.}$$

Las dos primeras resultan de $e^{\lambda x}$ y $e^{\bar{\lambda} x}$, como antes, y las dos segundas de $xe^{\lambda x}$ y $xe^{\bar{\lambda} x}$ de la misma manera.

Para *raíces complejas triples* (las cuales difícilmente ocurren en las aplicaciones), se obtendrían otras dos soluciones $x^2e^{\gamma x}\cos\omega x$, $x^2e^{\gamma x}$ sen ωx, y así sucesivamente.

EJEMPLO 4 Raíces complejas dobles

Resolver

$$y^{(7)} + 18y^{(5)} + 81y''' = 0.$$

Solución. La ecuación característica

$$\begin{aligned}\lambda^7 + 18\lambda^5 + 81\lambda^3 &= \lambda^3(\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81)\\ &= \lambda^3(\lambda^2 + 9)^2\\ &= \lambda^3[(\lambda + 3i)(\lambda - 3i)]^2 = 0\end{aligned}$$

tiene una raíz 0 triple y raíces dobles $-3i$ y $3i$; por tanto, por (12) con $\gamma = 0$ y $\omega = 3$, una solución general es

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + A_1\cos 3x + B_1 \operatorname{sen} 3x + x(A_2\cos 3x + B_2\operatorname{sen} 3x).$$ ∎

Problemas de la sección 3.2

Encontrar una ecuación (1) para la cual las funciones dadas forman una base.

1. e^x, e^{2x}, e^{3x}
2. $e^x, e^{-x}, \cos x, \operatorname{sen} x$
3. e^x, xe^x, x^2e^x
4. $\cos x, \operatorname{sen} x, x\cos x, x\operatorname{sen} x$
5. $e^{-x}, xe^{-x}, e^x, xe^x$
6. $e^{-2x}, e^{-x}, e^x, e^{2x}, 1$
7. $1, x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x$
8. $\cosh x, \operatorname{senh} x, x\cosh x, x\operatorname{senh} x$

Encontrar una solución general.

9. $y''' - y' = 0$
10. $y^{IV} + 4y = 0$
11. $y''' - y'' - y' + y = 0$
12. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$
13. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$
14. $y''' + y'' - y' - y = 0$
15. $y^{IV} - 81y = 0$
16. $y^{IV} - 29y'' + 100y = 0$

Resolver los siguientes problemas con valor inicial.

17. $y''' = 0,\quad y(2) = 12,\quad y'(2) = 16,\quad y''(2) = 8$
18. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 2,\quad y''(0) = 10$
19. $y''' - y'' - y' + y = 0,\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 1,\quad y''(0) = 0$
20. $y^{IV} + 3y'' - 4y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = -10,\quad y''(0) = 0,$ $y'''(0) = 40$
21. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0,\quad y(0) = 3,\quad y'(0) = 0,\quad y''(0) = 3$
22. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0,\quad y(0) = 12,\quad y'(0) = -12,\quad y''(0) = 6$

La **reducción del orden** se generaliza de las ecuaciones de segundo orden (ver la sección 2.7) a las de orden superior. Resulta particularmente simple en el caso de coeficientes constantes,

ya que entonces basta dividir la ecuación característica entre $\lambda - \lambda_1$, donde $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ es una solución conocida. Reducir y resolver las siguientes ecuaciones, usando la y_1 dada,

23. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0, y_1 = e^x$
24. $y''' + 4y'' + 6y' + 4y = 0, y_1 = e^{-2x}$
25. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0, y_1 = e^{2x}$
26. $4y''' + 8y'' + 5y' + y = 0, y_1 = e^{-x}$
27. $y''' - 2y'' - 7.25y' - 3y = 0, y_1 = e^{4x}$
28. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0, y_1 = e^x$

29. La **reducción del orden** es más complicada para una ecuación con coeficientes *variables* $y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$. Si $y_1(x)$ es una solución de esta ecuación, demostrar que otra solución es $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ con $u(x) = \int z(x)\,dx$ y z obtenida a partir de

$$y_1 z'' + (3y_1' + p_2 y_1)z' + (3y_1'' + 2p_2 y_1' + p_1 y_1)z = 0.$$

30. Resolver $x^3y''' - 3x^2y'' + (6 - x^2)xy' - (6 - x^2)y = 0$ reduciendo el orden, usando $y_1 = x$.

31. (Ecuación de Euler-Cauchy) La *ecuación de Euler-Cauchy de tercer orden* es

$$x^3y''' + ax^2y'' + bxy' + cy = 0.$$

Generalizando el método de la sección 2.6, demostrar que $y = x^m$ es una solución de la ecuación si y sólo si m es una raíz de la ecuación auxiliar

$$m^3 + (a - 3)m^2 + (b - a + 2)m + c = 0.$$

Resolver

32. $x^2y''' + 3xy'' - 3y' = 0$
33. $x^3y''' + 2x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$
34. $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$
35. $x^3y''' + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$

3.3 ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS

De las ecuaciones lineales homogéneas se pasará ahora a las ecuaciones diferenciales lineales ***no homogéneas*** de orden n-ésimo, las cuales se escriben en la forma estándar

(1) $$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

con $y^{(n)} = d^ny/dx^n$ como primer término, lo cual es práctico. Aquí, $r(x) \equiv 0$. Para estudiar (1) se necesita también la ecuación homogénea correspondiente

(2) $$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

como en la sección 2.8 para el caso $n = 2$. La teoría de (1) se establecerá a partir de la de (2) por medio de las relaciones entre las soluciones:

Teorema 1 [Relaciones entre las soluciones de (1) y (2)]

(a) *La diferencia de dos soluciones de* (1) *en algún intervalo abierto I es una solución de* (2) *en I.*

(b) *La suma de una solución de* (1) *en I y una solución de* (2) *en I es una solución de* (1) *en I.*

La demostración de este teorema es igual que la del caso especial $n = 2$ (teorema 1 de la sección 2.8); incluso las fórmulas son las mismas si se escribe (1) en la forma $L[y] = r(x)$.

Junto con la teoría de la ecuación homogénea de la sección 3.1, este teorema sugiere los siguientes conceptos de soluciones generales y particulares, al generalizar los de $n = 2$.

Solución general

Definición (Solución general, solución particular)

Una **solución general** de la ecuación no homogénea (1) en algún intervalo abierto I es una solución de la forma

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x), \tag{3}$$

donde $y_h(x) = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x)$ es una solución general de la ecuación homogénea (2) en I y $y_p(x)$ es cualquier solución de (1) en I que no contiene constantes arbitrarias.

Una **solución particular** de (1) en I es una solución obtenida a partir de (3) asignando valores específicos a las constantes arbitrarias $c_1, \cdots, c_n$ en $y_h(x)$. ∎

Como en el caso de la ecuación homogénea, puede demostrarse que (1) tiene una solución general, la cual incluye todas las soluciones, por lo que (1) no tiene soluciones singulares:

Teorema 2 (Solución general)

Si los coeficientes $p_0(x), \cdots, p_{n-1}(x)$ de (1) *y $r(x)$ son continuos en algún intervalo abierto I, entonces* (1) *tiene una solución general en I, y todas las soluciones de* (1) *en I se obtienen asignando valores adecuados a las constantes de esa solución general.*

Demostración. **(a)** $y_h(x)$ en (3) existe por el teorema 4 de la sección 3.1 y la existencia de $y_p(x)$ se demostrará en la sección 3.5, donde se construirá $y_p(x)$ por el método de variación de parámetros.

(b) Sean $\tilde{y}(x)$ cualquier solución de (1) en I y (3) cualquier solución general de (1) en I. Entonces el teorema 1(a) implica que $Y(x) = \tilde{y}(x) - y_p(x)$ es una solución de (2). Por el teorema 5 de la sección 3.1, esta $Y(x)$ puede obtenerse de $y_h(x)$ asignando valores adecuados a las constantes arbitrarias $c_1, \cdots, c_n$ en $y_h(x)$. De lo anterior y $\tilde{y}(x) = Y(x) + y_p(x)$ se sigue el segundo enunciado del teorema. ∎

Problema con valor inicial

Un **problema con valor inicial** para (1) consta de (1) y n condiciones iniciales

$$y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1, \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1} \tag{4}$$

[como para (2)] y tiene una solución única:

Teorema 3 Teorema de existencia y unicidad para problemas con valor inicial

Si los coeficientes de (1) *y $r(x)$ son continuos en algún intervalo abierto I y x_0 está en I, entonces el problema con valor inicial* (1), (4) *tiene una solución única en I.*

Demostración. Se escoge cualquier solución general (3) de (1) en I, la cual existe por el teorema 2. Entonces el teorema 2 de la sección 3.1 implica que el problema con valor inicial para la ecuación homogénea (2) con condiciones iniciales

$$y(x_0) = K_0 - y_p(x_0), \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1} - y_p^{(n-1)}(x_0)$$

tiene una solución única $y^*(x)$ en I. Por tanto $y(x) = y^*(x) + y_p(x)$ es una solución de (1) en I, la cual satisface las condiciones iniciales (4); es decir, $y(x)$ es la solución buscada, y el teorema queda demostrado. ∎

La discusión indica que para resolver (1) o problemas con valor inicial para (1) se necesitan métodos para obtener soluciones particulares y_p de (1). Tales métodos se considerarán y aplicarán a ejemplos típicos en las dos secciones siguientes.

3.4 MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Como para las ecuaciones lineales de segundo orden, con el método de coeficientes indeterminados se obtienen soluciones particulares y_p de la ecuación con coeficientes constantes

$$(1) \qquad \boxed{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = r(x).}$$

En este método, el rango de aplicación [a funciones $r(x)$ cuyas derivadas tienen formas similares a la propia $r(x)$] y los detalles técnicos de los cálculos siguen siendo los mismos que para $n = 2$ en la sección 2.9.

La única diferencia menor se refiere a la regla de modificación y surge del hecho de que mientras que para $n = 2$ la ecuación característica de la ecuación homogénea únicamente puede tener raíces simples o dobles, la ecuación característica de la ecuación homogénea presente

$$(2) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

puede tener raíces múltiples de órdenes mayores ($\leq n$). Se obtienen así:

Reglas para el método de coeficientes indeterminados

(A) Regla básica, como en la sección 2.9 con la tabla 3.1 (que es igual a la tabla 2.1 de la sección 2.9).

(B) Regla de modificación. *Si un término de la conjetura de y_p es una solución de la ecuación homogénea* (2), *entonces multiplicar $y_p(x)$ por x^k, donde k es el menor entero positivo tal que ningún término de $x^ky_p(x)$ es una solución de* (2).

(C) Regla de la suma, como en la sección 2.9.

Término en $r(x)$	Elección de y_p
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
kx^n $(n = 0, 1, \cdots)$	$C_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0$
$k \cos \omega x$ $k \operatorname{sen} \omega x$	$\Big\}$ $K \cos \omega x + M \operatorname{sen} \omega x$
$ke^{\alpha x} \cos \omega x$ $ke^{\alpha x} \operatorname{sen} \omega x$	$\Big\}$ $e^{\alpha x}(K \cos \omega x + M \operatorname{sen} \omega x)$

Tabla 3.1. Método de coeficientes indeterminados.

Por tanto, para un problema con valor inicial tienen que realizarse tres pasos:

Primer paso. Encontrar una solución general de la ecuación homogénea (2).
Segundo paso. Verificar si debe aplicarse la regla de modificación, y después determinar una solución particular $y_p(x)$ de (1).
Tercer paso. Encontrar la solución particular de (1) que satisface las condiciones iniciales dadas.

EJEMPLO 1

Resolver

$$y^{\mathrm{IV}} - y = 4.5e^{-2x}.$$

Solución. Primer paso. La ecuación característica $\lambda^4 - 1 = 0$ tiene las raíces ± 1 y $\pm i$. Por tanto, una solución general es

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_2 e^{ix} + c_4 e^{-ix}$$

o

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + A \cos x + B \operatorname{sen} x.$$

Segundo paso. No es necesaria la regla de modificación. A partir de $y_p = Ce^{-2x}$ por sustitución se obtiene

$$(-2)^4 Ce^{-2x} - Ce^{-2x} = 4.5e^{-2x}.$$

Se obtiene así $C = 0.3$. *Respuesta:*

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \mathrm{A} \cos x + B \operatorname{sen} x + 0.3e^{-2x}.$$ ∎

EJEMPLO 2 Regla de modificación

Considérese

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 30e^x. \tag{3}$$

Encontrar una solución general.

Solución. Primer paso. La ecuación característica $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ tiene una raíz triple, $\lambda = 1$. Por tanto, una solución general es

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x.$$

Segundo paso. Al probar $y_p = Ce^x$ se obtiene $C - 3C + 3C - C = 30$, que no tiene solución. Se prueban Cxe^x y Cx^2e^x. La regla de modificación requiere

$$y_p = Cx^3e^x.$$

Por tanto

$$y_p' = C(x^3 + 3x^2)e^x,$$

$$y_p'' = C(x^3 + 6x^2 + 6x)e^x,$$

$$y_p''' = C(x^3 + 9x^2 + 18x + 6)e^x.$$

Al sustituir estas expresiones en (3) y omitir el factor común e^x se obtiene

$$(x^3 + 9x^2 + 18x + 6)C - 3(x^3 + 6x^2 + 6x)C + 3(x^3 + 3x^2)C - x^3C = 30.$$

Los términos lineales, cuadráticos y cúbicos se cancelan y $6C = 30$. Por tanto, $C = 5$. *Respuesta:*

$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x + 5x^3e^x.$$ ∎

EJEMPLO 3 Un problema con valor inicial

Resolver el problema con valor inicial

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^2 - 6x + 4, \qquad y(0) = 5, \qquad y'(0) = -5, \qquad y''(0) = 1.$$

Solución. Una solución general de la ecuación homogénea es $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3e^{2x}$; ver el ejemplo 1 de la sección 3.2. Se necesita una solución y_p. La forma del segundo miembro sugiere que se pruebe

$$y_p = Kx^2 + Mx + N. \quad \text{Por tanto} \quad y_p' = 2Kx + M, \qquad y_p'' = 2K, \qquad y_p''' = 0.$$

Al sustituir en la ecuación se obtiene

$$-2 \cdot 2K - (2Kx + M) + 2(Kx^2 + Mx + N) = 2x^2 - 6x + 4.$$

Al igualar las potencias iguales,

$$2Kx^2 = 2x^2, \qquad (-2K + 2M)x = -6x, \qquad -4K - M + 2N = 4.$$

Por tanto, $K = 1$, $M = -2$, $N = 3$. Esto da la solución general

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3e^{2x} + x^2 - 2x + 3.$$

Para determinar las constantes a partir de las condiciones iniciales se necesitan también las derivadas

$$y' = -c_1e^{-x} + c_2e^x + 2c_3e^{2x} + 2x - 2,$$

$$y'' = c_1e^{-x} + c_2e^x + 4c_3e^{2x} + 2.$$

Al hacer $x = 0$ y usar las condiciones iniciales se obtiene

$$\text{(a)} \qquad y(0) = c_1 + c_2 + c_3 + 3 = 5,$$

$$\text{(b)} \qquad y'(0) = -c_1 + c_2 + 2c_3 - 2 = -5,$$

$$\text{(c)} \qquad y''(0) = c_1 + c_2 + 4c_3 + 2 = 1.$$

(a) más (b) da $2c_2 + 3c_3 = -1$, y (c) menos (a) da $3c_3 = -3$. Por tanto, $c_3 = -1$, $c_2 = 1$ y $c_1 = 2$ a partir de (a). La respuesta es

$$y = 2e^{-x} + e^x - e^{2x} + x^2 - 2x + 3.$$ ∎

Problemas de la sección 3.4

Encontrar una solución general.

1. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 12e^{2x}$
2. $y'' + 3y' - 4y = -13.6 \operatorname{sen} x$
3. $y''' - y' = 10 \cos 2x$
4. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 80e^{3x}$
5. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 12e^{x}$
6. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 1 - 4x^3$
7. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 16e^{x} + x + 3$
8. $y''' + 5y'' + 7y' - 13y = -48 \cos x - 36 \operatorname{sen} x$

Resolver los siguientes problemas con valor inicial.

9. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 10 \cos x,\quad y(0) = 2, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0$
10. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 6e^{-x},\quad y(0) = 2, y'(0) = 3, y''(0) = -1$
11. $y^{IV} + y''' - 2y'' = -4x^2 + 18,\quad y(1) = -3/2, y'(1) = -10/3, y''(1) = -2,$ $y'''(1) = 6$
12. $y''' - 4y' = 10 \cos x + 5 \operatorname{sen} x,\quad y(0) = 3, y'(0) = -2, y''(0) = -1$
13. $y''' + y'' - 2y = 2x^2 + 2x,\quad y(0) = -1, y'(0) = 0, y''(0) = -4$
14. $y''' + 3y'' - y' - 3y = 21e^{x/2} + 3x + 1,\quad y(0) = -7, y'(0) = -4,$ $y''(0) = -9$
15. $y^{IV} + 10y'' + 9y = 2 \operatorname{senh} x,\quad y(0) = 0, y'(0) = 4.1, y''(0) = 0,$ $y'''(0) = -27.9$

3.5 MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

El **método de variación de parámetros** es un procedimiento para encontrar soluciones particulares y_p de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de n-ésimo orden

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x). \tag{1}$$

Se aplica a cualquier ecuación (1) con coeficientes continuos y segundo miembro $r(x)$ en algún intervalo abierto I, pero es más complicado que el método especial de la sección anterior. (Se explicó para ecuaciones de segundo orden en la sección 2.10.)

Con el método se obtiene una solución particular y_p de (1) en I de la forma

$$y_p(x) = y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)} r(x)\, dx + y_2(x) \int \frac{W_2(x)}{W(x)} r(x)\, dx + \cdots + y_n(x) \int \frac{W_n(x)}{W(x)} r(x)\, dx. \tag{2}$$

Aquí $y_1, \cdots, y_n$ es una base de soluciones de la ecuación homogénea

$$(3) \qquad y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

en I, con wronskiano W, y W_j ($j = 1, \cdots, n$) se obtiene a partir de W sustituyendo la j-ésima columna de W por la columna $[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]$.

Por tanto, cuando $n = 2$,

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \qquad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = -y_2, \qquad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 1 \end{vmatrix} = y_1,$$

y se ve que (2) se hace idéntica a (2) de la sección 2.10.

Además, la idea de la demostración de la sección 2.10 se generaliza para n arbitraria, de la siguiente manera.

Se escribe (3) como $L[y] = 0$. En una solución general de (3),

$$y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$$

se sustituyen las constantes (los "parámetros") por las funciones $u_1(x), \cdots, u_n(x)$ por determinarse de tal modo que

$$(4) \qquad y_p = u_1y_1 + \cdots + u_ny_n$$

se vuelve una solución de (1) en I. Esta es una condición sobre n funciones arbitrarias u_j y al parecer es plausible que sea posible imponer $n - 1$ condiciones más. A fin de simplificar los cálculos, estas últimas condiciones se escogen de tal modo que en y_p', y_p'', $\cdots$ desaparezcan tantas derivadas de las u_j como sea posible. Por tanto, por (4),

$$y_p' = (u_1y_1' + \cdots + u_ny_n') + (u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n),$$

y se escoge como primera de las $n - 1$ condiciones

$$(5/1) \qquad u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n = 0.$$

Al derivar las expresiones que quedan, se obtiene

$$y_p'' = (u_1y_1'' + \cdots + u_ny_n'') + (u_1'y_1' + \cdots + u_n'y_n')$$

y se impone como segunda condición

$$(5/2) \qquad u_1'y_1' + \cdots + u_n'y_n' = 0,$$

y así sucesivamente hasta llegar a

$$y_p^{(n-1)} = (u_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n y_n^{(n-1)}) + (u_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-2)})$$

y se impone como la última de las n - 1 condiciones

$$(5/n-1) \qquad u_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-2)} = 0.$$

Las expresiones de las derivadas, según se reducen por estas condiciones, son

$$(6) \qquad y_p^{(j)} = u_1 y_1^{(j)} + \cdots + u_n y_n^{(j)}, \quad j = 1, \cdots, n-1.$$

Al derivar la última de estas expresiones se obtiene

$$(7) \quad y_p^{(n)} = (u_1 y_1^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)}) + (u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)}).$$

Como la n-ésima condición se pide que y_p sea una solución de (1); al sustituir (6), (5) y (4) en (1) se obtiene

$$(8) \qquad \begin{aligned} &(u_1 y_1^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)}) + (u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)}) \\ &+ p_{n-1}(u_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n y_n^{(n-1)}) \\ &+ \cdots + p_0(u_1 y_1 + \cdots + u_n y_n) = r(x). \end{aligned}$$

Agrupando los términos en u_j, luego en u_2, etc., se obtiene $u_1 L[y_1] = 0$, después $u_2 L[y_2] = 0$, etc., ya que $y_1, \cdots, y_n$ son soluciones de (2). Por tanto (8) se reduce a

$$(8^*) \qquad u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = r.$$

Las condiciones (5/1), (5/2), $\cdots$, (5/n – 1), (8*) forman un sistema de n ecuaciones para las funciones desconocidas $u_1', \cdots, u_n'$:

$$\begin{aligned} y_1 u_1' + \cdots + \quad & y_n u_n' = 0 \\ y_1' u_1' + \cdots + \quad & y_n' u_n' = 0 \\ & \vdots \\ y_1^{(n-2)} u_1' + \ldots + \; & y_n^{(n-2)} u_n' = 0 \\ y_1^{(n-1)} u_1' + \ldots + \; & y_n^{(n-1)} u_n' = r. \end{aligned}$$

El determinante de los coeficientes del sistema es el wronskiano W, el cual es diferente de cero ya que $y_1, \cdots, y_n$ es una base de soluciones de (2). Por la regla de Cramer (sección 7.9) se obtienen para $u_1', \cdots, u_n'$ los integrandos de (2), y al integrar y sustituir en (4) se obtiene (2) terminándose así la derivación. ∎

EJEMPLO 1 Variación de parámetros

Resolver la ecuación no homogénea de Euler-Cauchy

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x^4 \ln x \qquad (x > 0).$$

Solución. Primer paso. Solución general. De la sustitución de $y = x^m$ y las derivadas y la supresión del factor x^m se obtiene

$$m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 6m - 6 = 0.$$

Las raíces son 1, 2, 3, que dan como base de la ecuación homogénea

$$y_1 = x, \qquad y_2 = x^2, \qquad y_3 = x^3.$$

Segundo paso. Determinantes necesarios en (2). Estos son

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3, \qquad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x^4,$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 6x \end{vmatrix} = -2x^3, \qquad W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2.$$

Tercer paso. Integración. En (2) también se necesita el segundo miembro $r(x)$ de la ecuación en cuestión en la forma estándar, la cual se obtiene dividiendo la ecuación dada entre x^3 (el coeficiente de x'''); se obtiene así $r(x) = (x^4 \ln x)/x^3 = x \ln x$. A partir de esta expresión y de (2),

$$y_p = x \int \frac{x}{2} x \ln x \, dx - x^2 \int x \ln x \, dx + x^3 \int \frac{1}{2x} x \ln x \, dx$$

$$= \frac{x}{2}\left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}\right) - x^2\left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^3}{2}(x \ln x - x).$$

Al simplificar se llega a la respuesta

$$y_p = \frac{x^4}{6}\left(\ln x - \frac{11}{6}\right).$$ ∎

Problemas de la sección 3.5

Encontrar una solución general.

1. $y''' - 3y' + 3y' - y = x^{1/2}e^x$
2. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \sqrt{2x}\, e^{2x}$
3. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{2x} \operatorname{sen} x$
4. $y''' - y' = \cosh x$
5. $y''' + y' = \sec x$
6. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x^4 \operatorname{senh} x$
7. $xy''' + 3y'' = e^x$
8. $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x$
9. $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x^{-2}$
10. $4x^3y''' + 3xy' - 3y = 4x^{11/2}$

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 3

1. ¿Cuál es el principio de superposición o linealidad? ¿Para qué ecuaciones de n-ésimo orden es válido?
2. Hacer una lista de otros teoremas que sean generalizaciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden a las de n-ésimo orden.
3. ¿Bajo qué condiciones (suficientes) son válidos esos teoremas?
4. ¿Cómo se definen la independencia y la dependencia lineal de n funciones? ¿Por qué son importantes estos conceptos en este capítulo?
5. ¿Qué forma tiene una solución general de una ecuación diferencial homogénea? ¿De una ecuación no homogénea?
6. ¿Qué forma presenta un problema con valor inicial para una ecuación diferencial de n-ésimo orden?
7. ¿Qué es el wronskiano? ¿Qué papel desempeña en este capítulo?
8. Describir de memoria, lo mejor que el estudiante pueda recordar, la idea y algunos detalles del método de variación de parámetros
9. Discutir las ventajas y desventajas de los dos métodos estudiados para encontrar soluciones particulares.
10. ¿Cuál es la regla de modificación y cuándo se necesitó?

Encontrar una solución general.

11. $y''' - y'' - y' + y = 0$
12. $y^{IV} + 20y'' + 64y = 0$
13. $x^2y''' + 3xy'' + 0.75y' = 0$
14. $y^{IV} + 4y = 0$
15. $(x^2D^3 - 3xD^2 + 3D)y = 0$
16. $(D^3 - 2D^2 - D + 2)y = 8x^3$
17. $(D^4 - 1)y = 30e^{2x} - x^2$
18. $(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)y = 4 \operatorname{sen} x$
19. $(D^4 - 5D^2 + 4)y = 40 \cos 2x$
20. $(D^3 - D)y = \operatorname{senh} x$

Resolver los siguientes problemas con valor inicial.

21. $y''' - y' = 0, \quad y(0) = 3.4, \quad y'(0) = -5.4, \quad y''(0) = -0.6$
22. $y^{IV} + 3y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -20, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 80$
23. $y''' - y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0$
24. $4x^2y''' + 12xy'' + 3y' = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.5, \quad y''(1) = -1.75$
25. $(D^3 - 3D + 2)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3$
26. $(D^3 - D)y = \cosh x, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -1.25, \quad y''(0) = 3$
27. $(x^3D^3 - 3x^2D^2 + 6xD - 6)y = 12x^{-1}, \quad y(1) = 2.5, \quad y'(1) = 6.5,$ $y''(1) = 5$
28. $(D^3 + 3D^2 + 3D + 1) = 4 \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = 4$
29. $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 10$
30. $(x^3D^3 + x^2D^2 - 2xD + 2)y = x^3 \ln x, \quad y(1) = 25/32, \quad y'(1) = 47/32,$ $y''(1) = 21/16$

Resumen del capítulo 3

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Compararlo con el resumen del capítulo 2 (el caso $n = 2$).

Una **ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden** es aquella que puede escribirse en la "*forma estándar*" (sección 3.1)

$$(1) \qquad y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

con $y^{(n)} = d^ny/dx^n$ como primer término. Posee la muy importante propiedad de que una combinación lineal de soluciones es también una solución (**principio de superposición** o **principio de linealidad**, sección 3.1). Una **base** de soluciones de (1) se compone de n soluciones ***linealmente independientes*** $y_1, \cdots, y_n$ de (1). La **solución general** correspondiente es una combinación lineal

$$y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n \qquad (c_1, \cdots, c_n \text{ constantes arbitrarias}).$$

A partir de ella se obtiene una solución particular si se eligen n números para $c_1, \cdots, c_n$, por ejemplo, imponiendo n **condiciones iniciales**

$$(2) \quad y(x_0) = K_0, \qquad y'(x_0) = K_1, \qquad \cdots, \qquad y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1}$$

($x_0, K_0, \cdots, K_{n-1}$ dadas). Las ecuaciones (1), (2) constituyen un **problema con valor inicial** para (1). Si $p_0, \cdots, p_{n-1}$ son continuas en algún intervalo abierto I y x_0 está en I, entonces (1) tiene una solución general y (1), (2) tienen una solución única en I, que es una solución particular. Por tanto, (1) y la **ecuación diferencial lineal no homogénea**

$$(3) \qquad y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

(con $r(x)$ continua en I) no tienen soluciones singulares. Una **solución general** de (3) es de la forma

$$y = y_h + y_p \qquad \text{(Sec. 3.3)},$$

donde y_h es una solución general de (1) y y_p es una solución particular de (3). Remitirse a las secciones 3.4 y 3.5 para dos métodos para determinar y_p.

En el caso de coeficientes constantes (3) se escribe como

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = r(x)$$

al igual que (1), la cual puede resolverse entonces en términos de funciones exponenciales, seno y coseno (sección 3.2). En contraste, las ecuaciones (1) con coeficientes variables por lo general tienen funciones superiores como soluciones, según se verá en el capítulo 5.

Capítulo

4

Sistemas de ecuaciones diferenciales. Plano fase, estabilidad

Los sistemas de ecuaciones diferenciales se presentan en diversos problemas prácticos (ver las secciones 4.1 y 4.5) y su teoría (descrita en la sección 4.2) incluye la de las ecuaciones sencillas. Los sistemas lineales (secciones 4.3, 4.4, 4.6) se abordan de manera más conveniente mediante el uso de matrices y vectores, de los cuales, sin embargo, sólo se necesitarán aquí conocimientos elementales (sección 4.0). Además de la *resolución* de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales (secciones 4.3, 4.6), se presenta el eficaz método para discutir el comportamiento general de las soluciones en el **plano fase** (sección 4.4). Esto se relaciona asimismo con la **estabilidad**, concepto que es de importancia creciente en las ciencias de la ingeniería (por ejemplo, en teoría de control). Esto significa que, hablando en términos generales, cambios pequeños de un sistema físico en algún instante producen tan sólo cambios pequeños en el comportamiento del sistema en todos los tiempos posteriores. Los métodos del plano fase pueden generalizarse a sistemas no lineales (sección 4.5), para los que son particularmente importantes.

Prerrequisitos para este capítulo: Secciones 1.7-1.11, capítulo 2.
Bibliografía: Apéndice 1, parte A.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

4.0 INTRODUCCIÓN: VECTORES, MATRICES

En la discusión de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales se usarán matrices y vectores a fin de simplificar las fórmulas y así clarificar las ideas. Para ello se requiere conocer algunos hechos bastante elementales que probablemente estarán al

alcance de la mayoría de los estudiantes, quienes pueden pasar de inmediato a la sección 4.1 y usar esta sección ***como referencia*** en caso necesario. (El tratamiento completo de las matrices en el capítulo 7 ***no*** se necesitará en este capítulo.)

La mayoría de los sistemas lineales constarán de dos ecuaciones en dos funciones desconocidas $y_1(t)$, $y_1(t)$ de la forma

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \end{aligned} \qquad \text{por ejemplo,} \qquad \begin{aligned} y_1' &= -5y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 13y_1 + \tfrac{1}{2}y_2 \end{aligned}$$

(probablemente con una función adicional *conocida* en cada ecuación de la derecha). En la sección 4.2 se discutirán brevemente sistemas de n ecuaciones en n funciones desconocidas $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ de la forma

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Algunas definiciones y términos

En (1) los coeficientes (constantes o variables) forman una **matriz A de 2 × 2**, es decir, un arreglo

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \text{por ejemplo,} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 13 & \tfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

De manera similar, los coeficientes de (2) forman una **matriz de *n* × *n***

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A $a_{11}, a_{12}, \cdots$ se les llama **elementos**; las líneas horizontales reciben el nombre de **renglones** o *vectores renglón* y las líneas verticales **columnas** o *vectores columna.* Por tanto, en (3) el primer renglón es $[a_{11} \ \ a_{12}]$, el segundo renglón es $[a_{21} \ \ a_{22}]$ y la primera y segunda columnas son

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

En la "***notación de subíndice doble***" para los elementos, el primer subíndice denota el *renglón* y el segundo la *columna* en la que se encuentra el elemento. Se aplica lo mismo en (4). La **diagonal principal** es la diagonal $a_{11}\ a_{22}\ \cdots\ a_{nn}$ en (4) y, por consiguiente, $a_{11}\ a_{22}$ en (3).

Se necesitarán también vectores. Un **vector columna** $\mathbf{x}$ con n **componentes** $x_1, \cdots, x_n$ es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \text{por tanto si } n = 2 \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

De manera similar, un **vector renglón** $\mathbf{v}$ es de la forma

$$\mathbf{v} = [v_1 \quad \cdots \quad v_n], \quad \text{por tanto si } n = 2, \qquad \mathbf{v} = [v_1 \quad v_2].$$

Cálculos con matrices y vectores

Igualdad. Dos matrices son *iguales* si y sólo si ambas son de $n \times n$ y los elementos correspondientes son iguales. Por tanto, para $n = 2$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

si y sólo si

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{11}, & a_{12} &= b_{12} \\ a_{21} &= b_{21}, & a_{22} &= b_{22}. \end{aligned}$$

Dos vectores son *iguales* si y sólo si ambos tienen n componentes y las componentes correspondientes son iguales. Por tanto, para $n = 2$,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \text{si y sólo si} \qquad \begin{aligned} v_1 &= x_1 \\ v_2 &= x_2. \end{aligned}$$

La **adición** se efectúa sumando los elementos (o las componentes) correspondientes; aquí, ambas matrices deben ser de $n \times n$ y ambos vectores deben tener el mismo número de componentes. Por tanto, para $n = 2$,

$$(5) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} + \mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_1 + x_1 \\ v_2 + x_2 \end{bmatrix}$$

La **multiplicación escalar** (multiplicación por un número c) se efectúa multiplicando cada elemento (o componente) por c. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ entonces } -7\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -63 & -21 \\ 14 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -13 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad 10\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -130 \end{bmatrix}.$$

Multiplicación de matrices. El producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ (en este orden) de dos matrices $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ y $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ de $n \times n$ es la matriz $\mathbf{C} = [c_{jk}]$ de $n \times n$ con elementos

$$(6) \qquad \boxed{c_{jk} = \sum_{m=1}^{n} a_{jm} b_{mk}} \qquad \begin{matrix} j = 1, \cdots, n \\ k = 1, \cdots, n, \end{matrix}$$

es decir, se multiplica cada elemento del j-ésimo *renglón* de **A** por el elemento correspondiente de la k-ésima *columna* de **B** y después se suman estos n productos. Se acostumbra decir que ésta es una "multiplicación de los renglones en las columnas". Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 9 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 \\ -2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & (-2) \cdot (-4) + 0 \cdot 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

¡Atención! La multiplicación de matrices ***no es conmutativa***, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ en general. En el ejemplo anterior,

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 9 + (-4) \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + (-4) \cdot 0 \\ 2 \cdot 9 + 5 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

La multiplicación de una matriz **A** de $n \times n$ por un vector **x** con n componentes se define por la misma regla: $\mathbf{v} = \mathbf{Ax}$ es el vector con las n componentes

$$v_j = \sum_{m=1}^{n} a_{jm} x_m \qquad j = 1, \cdots, n.$$

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 12 & 7 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x_1 + 7x_2 \\ -8x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Derivación. La *derivada* de una matriz (o vector) con elementos (o componentes) variables se obtiene derivando cada elemento (o componente). Por tanto, si

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ \operatorname{sen} t \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad \mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

La **transposición** es la operación de escribir las columnas como renglones y viceversa, y se indica por **T**. Por tanto, la transpuesta $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ de la matriz de 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 1 & -6 & 7 \\ 9 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

es

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 0 & -6 & 9 \\ -8 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

La transpuesta de un vector columna, por ejemplo,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \text{es un vector renglón,} \quad \mathbf{v}^\mathsf{T} = [v_1 \quad v_2],$$

y viceversa.

NOTA Usando multiplicación y derivación de matrices, ahora (1) puede escribirse como

$$(7) \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{Ay} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ e.g., } \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 13 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

al igual que para (2) por medio de una matriz **A** de $n \times n$ y un vector columna **y** con n componentes, a saber, $\mathbf{y}' = \mathbf{Ay}$. La ecuación vectorial (7) es equivalente a dos ecuaciones de las componentes, y éstas son precisamente las dos ecuaciones de (1).

Independencia lineal. A r vectores dados $\mathbf{v}^{(1)}, \cdots, \mathbf{v}^{(r)}$ con n componentes se les llama *conjunto linealmente independiente* o, abreviando, **linealmente independientes**, si

$$(8) \qquad c_1\mathbf{v}^{(1)} + \cdots + c_r\mathbf{v}^{(r)} = \mathbf{0}$$

implica que todos los escalares $c_1, \cdots, c_r$ deben ser cero; aquí, $\mathbf{0}$ denota el **vector cero**, cuyas n componentes son todas cero. Si (8) también es válida para escalares que no sean todos cero, entonces a estos vectores se les llama *conjunto linealmente dependiente* o, abreviando, **linealmente dependientes**.

Inversa de una matriz. La **matriz unitaria I** de $n \times n$ es la matriz de $n \times n$ con diagonal principal $1, 1, \cdots, 1$ y todos los demás elementos cero. Si para una matriz **A** de $n \times n$ existe una matriz **B** de $n \times n$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, entonces a **A** se le llama **no singular** y a **B** se le llama la **inversa de A** y se denota por $\mathbf{A}^{-1}$; por tanto,

$$(9) \qquad \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Si **A** no tiene inversa, recibe el nombre de **singular**. Para $n = 2$,

$$(10) \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix},$$

donde el **determinante** de **A** es

$$(11) \qquad \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(Para n general, ver la sección 7.8, pero este caso no se necesitará en este capítulo.)

Eigenvalores, eigenvectores

Sea $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ una matriz dada. Considérese la ecuación

$$(12) \qquad \boxed{\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}}$$

donde λ es un escalar (un número real o complejo) por determinarse y **x** es un vector también por determinarse. Ahora bien, para toda λ, una solución es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. A un escalar λ tal que (12) sea válida para algún vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ se le llama **eigenvalor** de **A** y a este vector se le llama **eigenvector** de **A** correspondiente a este eigenvalor λ. Puede escribirse (12) como $\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o

$$(13) \qquad \boxed{(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}.}$$

Estas son n ecuaciones algebraicas lineales en las n incógnitas $x_1, \cdots, x_n$ (las componentes de **x**) y para que estas ecuaciones tengan una solución $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, la matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ de

sus coeficientes debe ser singular, lo cual se demuestra como un hecho básico en el álgebra lineal (sección 7.6). En este capítulo este hecho sólo se necesita para $n = 2$. Entonces (13) es

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{14}$$

en forma de componentes,

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + \quad a_{12}x_2 \quad &= 0 \\ a_{21}x_1 \quad + (a_{22} - \lambda)x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{14*}$$

Ahora $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ es singular si y sólo si su determinante $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, llamado el **determinante característico** de **A**, es cero:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Esta ecuación cuadrática recibe el nombre de **ecuación característica** de **A**. Sus soluciones son los eigenvalores λ_1 y λ_2 de **A**. Primero se determinan éstas, después a partir de (14*) con $\lambda = \lambda_1$ se determina un eigenvector $\mathbf{x}^{(1)}$ de **A** correspondiente a λ_1 y después a partir de (14*) con $\lambda = \lambda_2$ un eigenvector $\mathbf{x}^{(2)}$ de **A** correspondiente a λ_2. Nótese que si **x** es un eigenvector de **A**, también lo es $k\mathbf{x}$ para cualquier $k \neq 0$.

EJEMPLO 1 Problema de eigenvalor

Encontrar los eigenvalores y eigenvectores de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Solución. La ecuación característica es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0.$$

Sus soluciones son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -6$. Para $\lambda = \lambda_1 = -1$ por (14*) se obtiene

$$\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - \quad x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Una solución de la primera ecuación es $x_1 = 1, x_2 = 2$. La segunda ecuación da el mismo resultado. (¿Por qué?) Por tanto un eigenvector que corresponde a $\lambda_1 = -1$ es

(17) $$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad \text{De manera similar,} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

es un eigenvector de A correspondiente a $\lambda_2 = -6$, el mismo resultado que se obtuvo usando (14*) con $\lambda = \lambda_2$. ■

4.1 EJEMPLOS INTRODUCTORIOS

Se empieza ilustrando con algunos ejemplos típicos que los sistemas de ecuaciones diferenciales tienen varias aplicaciones y que una ecuación de orden superior siempre puede reducirse a un sistema de primer orden. Esto explica la importancia práctica de estos sistemas.

Masas oscilatorias en resortes

Por la sección 2.5 se sabe que los movimientos libres sin amortiguamiento de una masa en un resorte elástico están gobernados por $my'' + ky = 0$ o

$$my'' = -ky$$

donde $y = y(t)$ es el desplazamiento de la masa. Por los mismos argumentos, para las dos masas en los dos resortes de la figura 57 se obtiene el sistema lineal homogéneo

(1) $$\begin{aligned} m_1 y_1'' &= -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1) \\ m_2 y_2'' &= -k_2(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

para los desplazamientos desconocidos $y_1 = y_1(t)$ de la primera masa m_1 y $y_2 = y_2(t)$ de la segunda masa m_2. Las fuerzas que actúan sobre la primera masa dan la primera ecuación y las fuerzas que actúan sobre la segunda masa dan la segunda ecuación. Ahora en la figura 57 $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 3$ y $k_2 = 2$, por lo que al ordenar se obtiene

(2*) $$\begin{aligned} y_1'' &= -5y_1 + 2y_2 \\ y_2'' &= 2y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

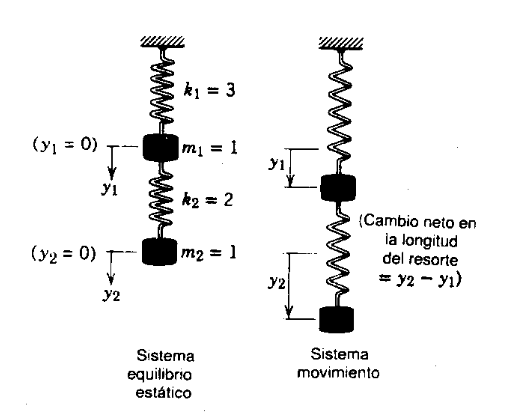


Figura 57. Sistema mecánico del ejemplo 1.

o, escribiéndola como una sola ecuación vectorial,

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{y}'' = \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Como en el caso de una sola ecuación, se prueba una función exponencial de t,

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\omega t}. \quad \text{Entonces} \quad \mathbf{y}'' = \omega^2 \mathbf{x} e^{\omega t} = \mathbf{A}\mathbf{x}e^{\omega t}.$$

Después, escribiendo $\omega^2 = \lambda$ y dividiendo por $e^{\omega t}$, se obtiene

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

Los eigenvalores y eigenvectores son (ver ejemplo 1, sección 5.0)

$$\lambda_1 = -1, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -6, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Puesto que $\omega = \sqrt{\lambda}$ y $\sqrt{-1} = \pm i$ y $\sqrt{-6} = \pm i\sqrt{6}$, se obtiene

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^{(1)}(c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}) + \mathbf{x}^{(2)}(c_3 e^{i\sqrt{6}t} + c_4 e^{-i\sqrt{6}t})$$

o, por (7) de la sección 2.3,

$$\mathbf{y} = a_1 \mathbf{x}^{(1)} \cos t + b_1 \mathbf{x}^{(1)} \operatorname{sen} t + a_2 \mathbf{x}^{(2)} \cos \sqrt{6}t + b_2 \mathbf{x}^{(2)} \operatorname{sen} \sqrt{6}t$$

donde $a_1 = c_1 + c_2$, $b_1 = i(c_1 - c_2)$, $a_2 = c_3 + c_4$, $b_2 = i(c_3 - c_4)$. Estas cuatro constantes arbitrarias pueden especificarse con cuatro condiciones iniciales. En forma decomponentes, esta solución es

$$y_1 = a_1 \cos t + b_1 \operatorname{sen} t + 2a_2 \cos \sqrt{6}t + 2b_2 \operatorname{sen} \sqrt{6}t$$

$$y_2 = 2a_1 \cos t + 2b_1 \operatorname{sen} t - a_2 \cos \sqrt{6}t - b_2 \operatorname{sen} \sqrt{6}t. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Modelo de una red eléctrica

Encontrar las corrientes $I_1(t)$ e $I_2(t)$ en la red ilustrada en la figura 58, suponiendo que todas las cargas y corrientes son cero cuando el interruptor está cerrado en $t = 0$.

Solución. Primer paso. Establecimiento del modelo matemático. El modelo matemático de esta red se obtiene de la ley del voltaje de Kirchhoff, como en las secciones 1.8 y 2.12 (donde se consideraron circuitos sencillos). Del circuito izquierdo se obtiene

$$I_1' + 4(I_1 - I_2) = 12$$

o

$$\text{(3a)} \qquad I_1' = -4I_1 + 4I_2 + 12,$$

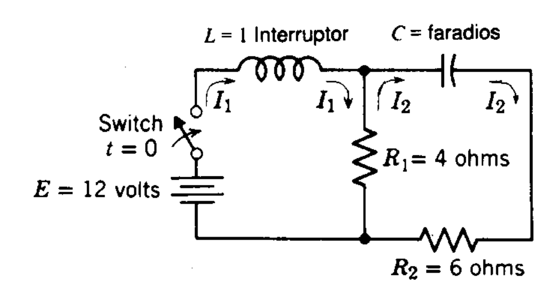


Figura 58. Red eléctrica del ejemplo 2.

donde I_1 es la corriente en el cirtuito izquierdo e I_2 es la corriente en el circuito derecho y $4(I_1 - I_2)$ es la caída de voltaje en el resistor debido a que I_1 e I_2 fluyen por el resistor en direcciones opuestas. De manera similar, para el circuito derecho se obtiene

$$6I_2 + 4(I_2 - I_1) + 4\int I_2\,dt = 0$$

o, derivando y dividiendo entre 10,

$$I_2' - 0.4I_1' + 0.4I_2 = 0.$$

Al sustituir $-0.4I_1'$ usando (3a) y al ordenar los términos, se obtiene

$$\text{(3b)} \qquad I_2' = -1.6I_1 + 1.2I_2 + 4.8.$$

En forma matricial, (3) es (se escribe **J** porque **I** denota la matriz unitaria)

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{J}' = \mathbf{AJ} + \mathbf{g}, \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4.0 & 4.0 \\ -1.6 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 12.0 \\ 4.8 \end{bmatrix}.$$

Segundo paso. Resolución de (4). Este es un sistema lineal no homogéneo. Aún no se cuenta con algún método de solución, pero podría intentarse proceder como en el caso de una sola ecuación, al resolver primero el sistema homogéneo $\mathbf{J}' = \mathbf{AJ}$ sustituyendo $\mathbf{J} = \mathbf{x}e^{\lambda t}$; se obtiene así

$$\mathbf{J}' = \lambda\mathbf{x}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{x}e^{\lambda t}, \qquad \text{por tanto} \qquad \mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}.$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -4 - \lambda & 4 \\ -1.6 & 1.2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2.8\lambda + 1.6 = 0$$

tiene las soluciones $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -0.8$. Para $\lambda_1 = -2$ se obtiene

$$(-4 + 2)x_1 + 4x_2 = 0, \text{ por ejemplo, } x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad \text{por tanto} \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = -0.8$ se obtiene

$$(-4 + 0.8)x_1 + 4x_2 = 0, \text{ por ejemplo, } x_1 = 1, \quad x_2 = 0.8, \quad \text{por tanto} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, una "solución general" del sistema homogéneo es

$$\mathbf{J}_h = c_1\mathbf{x}^{(1)}e^{-2t} + c_2\mathbf{x}^{(2)}e^{-0.8t}.$$

Para obtener una solución particular de (4), como **g** es constante, podría probarse con un vector constante $\mathbf{J}_p^{\mathsf{T}} = \mathbf{a}^{\mathsf{T}} = [a_1 \ \ a_2]$. Entonces $\mathbf{J}_p' = \mathbf{0}$ y por sustitución se obtiene $\mathbf{Aa} + \mathbf{g} = \mathbf{0}$; en forma de componentes,

$$-4.0a_1 + 4.0a_2 + 12.0 = 0$$

$$-1.6a_1 + 1.2a_2 + 4.8 = 0.$$

La solución es $a = 3$, $a_2 = 0$; por tanto, $\mathbf{a}^{\mathsf{T}} = [3 \ \ 0]$. En consecuencia,

$$\text{(5)} \qquad \mathbf{J} = \mathbf{J}_h + \mathbf{J}_p = c_1\mathbf{x}^{(1)}e^{-2t} + c_2\mathbf{x}^{(2)}e^{-0.8t} + \mathbf{a};$$

en forma de componentes,

$$\begin{aligned} I_1 &= 2c_1e^{-2t} + c_2e^{-0.8t} + 3 \\ I_2 &= c_1e^{-2t} + 0.8c_2e^{-0.8t}. \end{aligned}$$

De las condiciones iniciales se obtiene

$$\begin{aligned} I_1(0) &= 2c_1 + c_2 + 3 = 0 \\ I_2(0) &= c_1 + 0.8c_2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $c_1 = -4$ y $c_2 = 5$. Se observa que $I_1(t) \to 3$ amperes cuando $t \to \infty$, mientras que $I_2(t) \to 0$. ¿Por qué sería esto de esperarse prácticamente? ∎

Las aplicaciones básicas representan una razón de la importancia de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Otra razón resulta del hecho de que una ecuación diferencial de n-ésimo orden

(6) $$y^{(n)} = F(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

siempre puede reducirse a un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden haciendo

(7) $$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \cdots, \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

Entonces se obtiene de inmediato el sistema

(8a) $$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \end{aligned}$$

y por (6)

(8b) $$y_n' = F(t, y_1, y_2, \cdots, y_n).$$

Esta reducción es otra de las razones por las que uno se concentra generalmente en los sistemas de *primer orden*. A fin de obtener confianza, se considera un viejo conocido:

EJEMPLO 3 Masa en un resorte

Para

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0 \qquad \text{(Sec. 2.5)}$$

el sistema (8) es lineal y homogéneo.

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2.$$

Al hacer $\mathbf{y}^T = [y_1 \ \ y_2]$, se llega a la forma matricial

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}\mathbf{y}.$$

La ecuación característica es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

la cual concuerda con la ecuación característica de la sección 2.5. Como cálculo ilustrativo sencillo, suponer que $m = 1$, $c = 2$ y $k = 0.75$. Entonces $\lambda^2 + 2\lambda + 0.75 = 0$ y se obtienen los eigenvalores $\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = -1.5$, y los eigenvectores son $\mathbf{x}^{(1)T} = [2 \ \ -1]$ (de $0.5x_1 + x_2 = 0$) y $\mathbf{x}^{(2)T} = [1 \ \ -1.5]$ (de $1.5x_1 + x_2 = 0$). Se llega así a la solución

$$\mathbf{y} = c_1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-0.5t} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \end{bmatrix}e^{-1.5t}.$$

La primera componente de esta ecuación vectorial es la solución esperada

$$y = y_1 = 2c_1e^{-0.5t} + c_2e^{-1.5t}$$

y $y_2 = y_1'$ resulta como debería,

$$y_2 = -c_1e^{-0.5t} - 1.5c_2e^{-1.5t} = y_1'. \quad \blacksquare$$

De manera similar, muchos sistemas de ecuaciones diferenciales de orden superior pueden reducirse a sistemas de primer orden. Así, en el ejemplo 1 puede obtenerse un sistema de esta clase haciendo $y_3 = y_1'$, $y_4 = y_2'$; entonces $y_3' = y_1''$ y $y_4' = y_2''$, de donde por (2*)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_3 \\ y_2' &= y_4 \\ y_3' &= -5y_1 + 2y_2 \\ y_4' &= 2y_1 - 2y_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Problemas de la sección 4.1

1. Presentar los detalles de los cálculos del ejemplo 1 que llevaron de la solución general compleja a la solución general real.

En el ejemplo 1, encontrar la solución particular que satisface las siguientes condiciones iniciales.

2. $y_1(0) = 1, y_2(0) = 2$, velocidades iniciales cero
3. Desplazamientos iniciales cero, $y_1'(0) = 2, y_2'(0) = 0$
4. $y_1(0) = 3,\ y_1'(0) = 0, y2(0) = 1, y_2'(0) = 0$
5. $y_1(0) = -2,\ y_1'(0) = 8\sqrt{6}, y_2(0) = -4, y_2'(0) = -4\sqrt{6}$

En el ejemplo 2, encontrar las corrientes cuando

6. $I_1(0) = 28, I_2(0) = 14$
7. $I_1(0) = 9, I_2(0) = 0$

4.2 CONCEPTOS Y TEORÍA BÁSICOS

En esta sección se discuten algunos conceptos y hechos básicos que son similares a los de las ecuaciones sencillas.

Los sistemas de primer orden de la sección anterior eran casos especiales del sistema más general

$$\boxed{\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, \cdots, y_n) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, \cdots, y_n) \\ &\cdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, \cdots, y_n) \end{aligned}} \tag{1}$$

que incluye casi todos los casos de interés práctico. Cuando $n = 1$, esta expresión queda como $y_1' = f_1(t, y_1)$ o, simplemente, como $y' = f(t, y)$, fórmula bien conocida por el capítulo 1.

Una **solución** de (1) en algún intervalo $a < t < b$ es un conjunto de n funciones derivables

$$y_1 = \phi_1(t), \cdots, y_n = \phi_n(t)$$

en $a < t < b$ que satisface (1) en este intervalo completo.

Un **problema con valor inicial** para (1) se compone de (1) y n condiciones iniciales dadas

$$y_1(t_0) = K_1, \qquad y_2(t_0) = K_2, \qquad \cdots, \qquad y_n(t_0) = K_n \tag{2}$$

donde t_0 es un valor especificado de t en el intervalo considerado y $K_1, \cdots, K_n$ son números dados. Las condiciones suficientes para la existencia y la unicidad de una

solución de un problema con valor inicial (1), (2) se establecen en el siguiente teorema, el cual es una generalización de los teoremas de la sección 1.11 para una ecuación sencilla. (Para una demostración, ver la referencia [A4].)

Teorema 1 (Teorema de existencia y unicidad)

Sean $f_1, \cdots f_n$ en (1) *funciones continuas que tienen derivadas parciales continuas $\partial f_1/\partial y_1, \cdots, \partial f_1/\partial y_n, \cdots, \partial f_n/\partial y_n$, en algún dominio R del espacio $ty_1y_2 \cdots y_n$ que contiene el punto $(t_0, K_1, \cdots K_n)$. Entonces* (1) *tiene una solución en algún intervalo $t_0 - \alpha < t < t_0 + \alpha$ que satisface* (2), *y esta solución es única.*

Generalizando la noción de ecuación diferencial lineal, a (1) se le llama **sistema lineal** si es lineal en $y_1, \cdots, y_n$; es decir, si puede escribirse

$$(3^*)\qquad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}(t)y_1 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + g_1(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(t)y_1 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + g_n(t). \end{aligned}$$

En forma vectorial esta expresión queda

$$(3)\qquad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}$$

$$\text{donde}\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}.$$

Este sistema se llama **homogéneo** si $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, de tal modo que es

$$(4)\qquad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}.$$

Si $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, entonces (3) se llama **no homogéneo**. El ejemplo 1 de la sección anterior es homogéneo y el ejemplo 2 no homogéneo.

Para un sistema lineal (3) el teorema de existencia y unicidad es más simple:

Teorema 2 (Existencia y unicidad en el caso lineal)

Sean las a_{jk} y las g_j de (3) *funciones continuas de t en un intervalo abierto $\alpha < t < \beta$ que contiene al punto $t = t_0$. Entonces* (3) *tiene una solución y(t) en este intervalo que satisface* (2), *y esta solución es única.*

Como para una ecuación lineal homogénea sencilla se tiene

Teorema 3 (Principio de superposición o principio de linealidad)

Si $y^{(1)}$ y $y^{(2)}$ son soluciones del sistema ***lineal homogéneo*** (4) *en algún intervalo, también lo es cualquier combinación lineal $y = c_1y^{(1)} + c_2y^{(2)}$.*

Demostración. Al derivar y usar (4), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= [c_1\mathbf{y}^{(1)} + c_2\mathbf{y}^{(2)}]' \\ &= c_1\mathbf{y}^{(1)\prime} + c_2\mathbf{y}^{(2)\prime} \\ &= c_1\mathbf{A}\mathbf{y}^{(1)} + c_2\mathbf{A}\mathbf{y}^{(2)} \\ &= \mathbf{A}(c_1\mathbf{y}^{(1)} + c_2\mathbf{y}^{(2)}) = \mathbf{A}\mathbf{y}. \end{aligned}$$

∎

La teoría general de los sistemas lineales es muy similar a la de una ecuación lineal sencilla de las secciones 2.1, 2.7 y 2.8. Para verlo, se explicarán los conceptos y los hechos más fundamentales, remitiendo al lector a textos más avanzados para las demostraciones, como la referencia [A4].

Se entiende por una **base** de soluciones del sistema homogéneo (4) en algún intervalo J un conjunto linealmente independiente de n soluciones $\mathbf{y}^{(1)}, \cdots, \mathbf{y}^{(n)}$ de (4) en ese intervalo, y a la combinación lineal correspondiente

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}^{(1)} \cdots + c_n\mathbf{y}^{(n)} \qquad (c_1, \cdots, c_n \text{ arbitrario}) \tag{5}$$

se le llama **solución general** de (4) en J, ya que esta $\mathbf{y}$ incluye a todas las soluciones de (4) en J, como puede demostrarse. Si las $a_{jk}(t)$ de (4) son continuas en J, entonces (4) tiene una base de soluciones en J.

Además, el **wronskiano** de $\mathbf{y}^{(1)}, \cdots, \mathbf{y}^{(n)}$ es el determinante

$$W(\mathbf{y}^{(1)}, \cdots, \mathbf{y}^{(n)}) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \cdots & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \cdots & y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{6}$$

cuyas columnas son estas soluciones, cada una ellas escrita en términos de componentes. Estas soluciones forman una base en J si y sólo si W es diferente de cero en cualquier t_1 de este intervalo. W es idénticamente cero o en ninguna parte de J es cero.

Obsérvese que el wronskiano de dos soluciones y y z de una ecuación sencilla de segundo orden es (ver la sección 2.8)

$$W(y, z) = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}.$$

Si ahora se escribe la ecuación como un sistema de primer orden, debe hacerse $y_1 = y$, $y_2 = y'$ y $z_1 = z$, $z_2 = z'$ (ver la sección 4.1). Entonces $W(y, z)$ asume la forma (6) con $n = 2$ (salvo por la notación). Esto motiva la definición dada en (6).

Se abordarán ahora los **métodos de solución**, empezando con sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes en la siguiente sección.

4.3 SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Se continúa la discusión de los sistemas lineales homogéneos

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \tag{1}$$

suponiendo ahora que la matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $n \times n$ es constante, es decir, sus términos no dependen de t. Quiere resolverse (1). Para ello se recuerda que una ecuación sencilla $y' = ky$ tiene la solución $y = Ce^{kt}$. En consecuencia, se prueba

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\lambda t}. \tag{2}$$

Al sustituir en (1) se obtiene

$$\mathbf{y}' = \lambda \mathbf{x} e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}e^{\lambda t}.$$

Al dividir entre $e^{\lambda t}$, la expresión se reduce al problema de eigenvalor

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}. \tag{3}$$

Por tanto, las soluciones no triviales de (1) son de la forma (2), donde λ es un eigenvalor de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{x}$ es un eigenvector correspondiente.

Supóngase además que $\mathbf{A}$ tiene una base de n eigenvectores $\mathbf{x}^{(1)}, \cdots, \mathbf{x}^{(n)}$ que corresponden a $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ eigenvalores (los cuales pueden ser todos diferentes o algunos —o todos— puede ser iguales). Entonces las soluciones (2) correspondientes son

$$\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \quad \cdots, \quad \mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}e^{\lambda_n t} \tag{4}$$

y tienen el wronskiano

$$W(\mathbf{y}^{(1)}, \cdots, \mathbf{y}^{(n)}) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} & \cdots & x_1^{(n)}e^{\lambda_n t} \\ x_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} & \cdots & x_2^{(n)}e^{\lambda_n t} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_n^{(1)}e^{\lambda_1 t} & \cdots & x_n^{(n)}e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}$$

$$= e^{\lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & \cdots & x_2^{(n)} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

En el segundo miembro, la función exponencial nunca es cero y el determinante tampoco es cero ya que sus columnas son los eigenvectores linealmente independientes que forman una base. Con esto se demuestra el

Teorema 1 (Solución general)

Si la matriz constante **A** *en el sistema* (1) *tiene un conjunto linealmente independiente de n eigenvectores,*[1] *entonces las soluciones correspondientes* $\mathbf{y}^{(1)}, \cdots, \mathbf{y}^{(n)}$ *de* (4) *forman una base de soluciones de* (1), *y la solución general correspondiente es*

$$(5) \qquad \mathbf{y} = c_1\mathbf{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}e^{\lambda_n t}.$$

A continuación se verá cómo resolver en la práctica un sistema (1) de dos ecuaciones y cómo visualizar las curvas solución en el plano y_1y_2, conocidas también como **trayectorias**. Este plano se llama **plano fase.**

EJEMPLO 1 Nodo

Encontrar la solución general del sistema lineal homogeneo

$$(6) \qquad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{y}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - 3y_2. \end{aligned}$$

Solución. Al sustituir $\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\lambda t}$ y $\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{x}e^{\lambda t}$ y eliminar la función exponencial se obtiene $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. La ecuación característica es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0.$$

De esta expresión se obtienen los eigenvalores $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -4$. Entonces los eigenvectores se obtienen de

$$(-3-\lambda)x_1 + x_2 = 0.$$

Para $\lambda = -2$ se tiene $-x_1 + x_2 = 0$, por lo que puede tomarse $\mathbf{x}^{(1)\mathsf{T}} = [1 \;\; 1]$. Para $\lambda_2 = -4$ se tiene $x_1 + x_2 = 0$, y un eigenvector es $\mathbf{x}^{(2)\mathsf{T}} = [1 \;\; -1]$. De donde se obtiene la solución general

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1\mathbf{y}^{(1)} + c_2\mathbf{y}^{(2)} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-4t}.$$

Para cualquier elección de c_1, c_2 se obtiene alguna trayectoria. Cuando $c_2 = 0$ y $c_1 > 0$, se obtiene el rayo recto $y_1 = y_2$ en el primer cuadrante de la figura 59, con la flecha indicando la dirección de crecimiento de t. Cuando $c_2 = 0$ y $c_1 < 0$, se obtiene el rayo $y_1 = y_2$ en el tercer cuadrante. De manera similar, para $c_1 = 0$ y $c_2 > 0$ o $c_2 < 0$ se obtienen los rayos de $y_1 = -y_2$ en el cuarto y el segundo cuadrante, respectivamente. Cuando $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$ se obtiene una curva cuya dirección de las tangentes en el origen es la de $\mathbf{x}^{(1)}$, ya que e^{-4t} tiende a cero con mayor rapidez que e^{-2t} cuando t se incrementa. Por ejemplo, de $c_1 = c_2 = 1$ se obtiene

$$y_1 = e^{-2t} + e^{-4t}, \qquad y_2 = e^{-2t} - e^{-4t},$$

[1] Esto es válido si **A** es simétrica ($a_{jk} = a_{kj}$) o si tiene n eigenvalores *diferentes*. (Ver los teoremas 2 y 4 de la sección 7.14.)

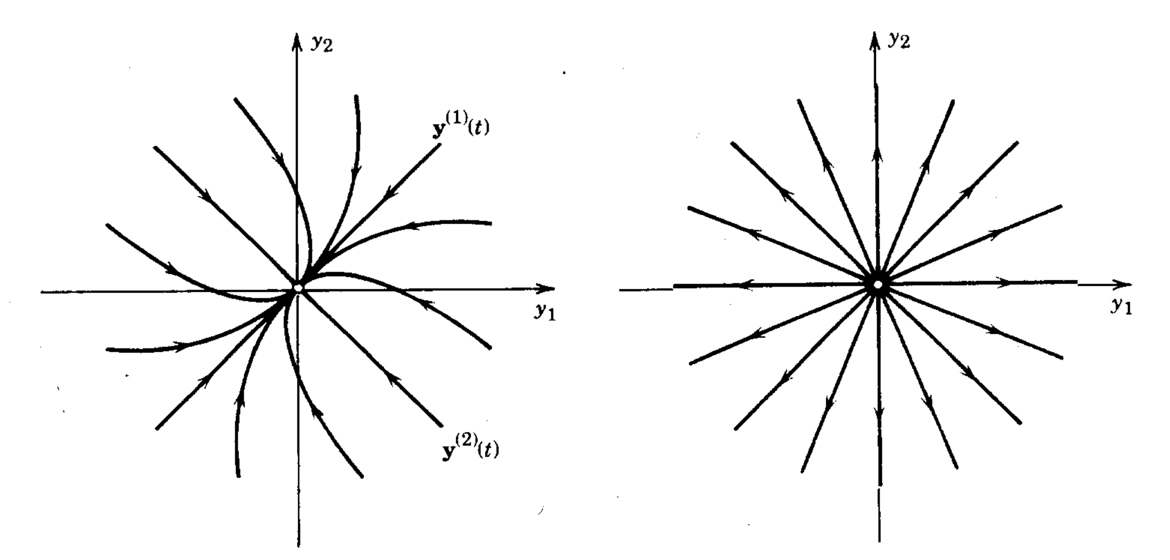


Figura 59. Soluciones del sistema (6), nodo impropio en el origen.

Figura 60. Soluciones del sistema (7), nodo propio en el origen.

por lo que $y_1 \approx y_2$ cuando t es grande, es decir, cerca del origen. Por tanto, todas las trayectorias tienen la misma dirección límite en 0, salvo por el par de trayectorias para las que $y_1 = -y_2$. A un punto en el que las soluciones muestran este comportamiento se le llama **nodo**. En consecuencia, 0 es un nodo del sistema (6). Con mayor precisión, a 0 se le llama **nodo impropio**, por oposición a **nodo propio**, que es un punto en el que existe una curva solución en todas las direcciones posibles. Por ejemplo, el sistema

$$(7) \qquad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_2 \end{aligned}$$

tiene un nodo propio en 0 (ver la figura 60) porque la solución general es

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \quad \text{o} \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^t \\ y_2 &= c_2 e^t \end{aligned} \quad \text{o} \quad c_1 y_2 = c_2 y_1.$$ ■

EJEMPLO 2 Punto silla. Problema con valor inicial

Encontrar la solución general del sistema lineal homogéneo

$$(8) \qquad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 4y_2 \\ y_2' &= y_1 - 3y_2 \end{aligned}$$

y a partir de ella, la solución particular que satisface las condiciones iniciales $y_1(0) = 3, y_2(0) = 0$; en forma vectorial, $y(0)^T = [3 \;\; 0]$.

Solución. Los sistemas del ejemplo 1 tuvieron eigenvalores reales del mismo signo y esto llevó a nodos. El sistema presente tendrá eigenvalores reales de signos contrarios y esto llevará al llamado **punto silla** (de nuevo en 0), caracterizado por dos trayectorias que llegan, dos trayectorias que salen y con todas las demás trayectorias evitando el punto. De hecho, la ecuación característica es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0.$$

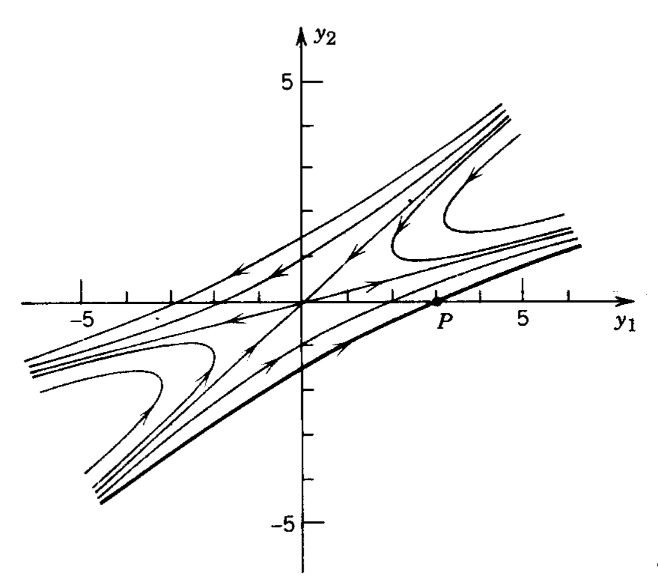


Figura 61. Soluciones del sistema (8), punto silla en el origen. *P* corresponde a las condiciones iniciales.

De ésta se obtienen los eigenvalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$. Los eigenvectores se obtienen de la ecuación $(2-\lambda)x_1 - 4x_2 = 0$. Para $\lambda_1 = 1$ se obtiene $x_1 = 4x_2$ y puede tomarse $\mathbf{x}^{(1)\mathsf{T}} = [4 \quad 1]$. Para $\lambda_2 = -2$ se obtiene $4x_1 = 4x_2$ y puede tomarse $\mathbf{x}^{(2)\mathsf{T}} = [1 \quad 1]$. Se obtiene así la solución general

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1\mathbf{y}^{(1)} + c_2\mathbf{y}^{(2)} = c_1\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Esta ecuación representa las trayectorias ilustradas en la figura 61. Pueden discutirse eligiendo primero $c_2 = 0$, que da las dos trayectorias rectas que salen (para $c_1 > 0$ y $c_1 < 0$), eligiendo después $c_1 = 0$ para obtener las dos trayectorias rectas que llegan y, tercero, haciendo más elecciones generales de c_1 y c_2 para obtener trayectorias que eviten el punto silla 0. Las flechas indican las direcciones de t creciente, como antes.

Por último, a partir de las condiciones iniciales $y_1(0) = 3, y_2(0) = 0$ se obtiene

$$\mathbf{y}(0) = c_1\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} 4c_1 + c_2 &= 3 \\ c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

de donde $c_1 = 1, c_2 = -1$. Por lo tanto, la solución particular deseada es

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^t - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} y_1 &= 4e^t - e^{-2t} \\ y_2 &= e^t - e^{-2t}. \end{aligned}$$

Un sistema más simple que tiene un punto silla (en 0) es

$$\text{(9)} \qquad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{y}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= -y_2. \end{aligned}$$

Tiene la solución general

$$\mathbf{y} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1e^t \\ y_2 &= c_2e^{-t} \end{aligned} \quad \text{o} \quad y_1y_2 = const.$$

Se trata de una familia de hipérbolas (y los ejes de coordenadas); ver la figura 62. ∎

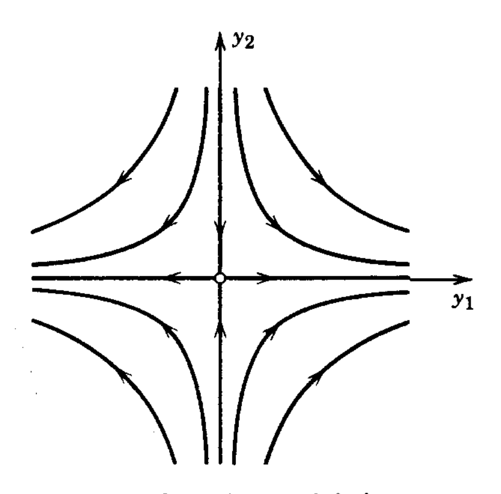


Figura 62. Soluciones del sistema (9), punto silla en el origen.

Figura 63. Soluciones del sistema (10), centro en el origen.

EJEMPLO 3 Centro

Se muestra en seguida que los eigenvalores imaginarios puros llevan a un **centro**, es decir, a un punto P tal que las trayectorias son curvas cerradas alrededor de P. Encontrar la solución general del sistema

$$\text{(10)} \qquad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -4y_1. \end{aligned}$$

Solución. Las ecuaciones dadas se escriben como $y_1' = y_2$ y $4y_1 = -y_2'$. Evidentemente, el producto de los primeros miembros debe ser igual al producto de los segundos miembros,

$$4y_1y_1' = -y_2y_2'. \qquad \text{por integración,} \qquad 2y_1^2 + \tfrac{1}{2}y_2^2 = const.$$

Estas son elipses (figura 63). El origen es un centro.

Se aplicó un método corto. Si uno no se da cuenta de él, puede procederse sistemáticamente de la siguiente manera. La ecuación característica es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0. \qquad \text{Eigenvalores } \lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i.$$

Aquí, $i = \sqrt{-1}$. Los eigenvectores resultan de $-\lambda x_1 + x_2 = 0$. Para λ_1 se tiene $-2ix_1 + x_2 = 0$. Puede elegirse $\mathbf{x}^{(1)\mathsf{T}} = [1 \;\; 2i]$. Para λ_2 se encuentra $\mathbf{x}^{(2)\mathsf{T}} = [1 \;\; -2i]$. Se obtiene así la solución general

$$\text{(11)} \qquad \mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{2it} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} e^{-2it}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1e^{2it} + c_2e^{-2it} \\ y_2 &= 2ic_1e^{2it} - 2ic_2e^{-2it}. \end{aligned}$$

Para eliminar t, se observa que $i^2 = -1$ y se toma

$$\begin{aligned} y_1^2 &= c_1^2e^{4it} + 2c_1c_2 + c_2^2e^{-4it} \\ (\tfrac{1}{2}y_2)^2 &= -c_1^2e^{4it} + 2c_1c_2 - c_2^2e^{-4it}. \end{aligned}$$

Se suman ambas expresiones para obtener $y_1^2 + \frac{1}{4}y_2^2 = 4c_1c_2 = const$, como se esperaba.

La solución (11) es compleja, pero pueden obtenerse de inmediato una base *real* y una solución general *real* aplicando (7), sección 2.3, con $x = 0$ y $\pm 2t$ en lugar de t.

$$e^{2it} = \cos 2t + i \operatorname{sen} 2t, \qquad e^{-2it} = \cos 2t - i \operatorname{sen} 2t.$$

Se agrupan las partes reales y las imaginarias, obteniéndose así en (11)

$$\text{(11*)} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{2it} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} (\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t) = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2 \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ 2 \cos 2t \end{bmatrix}$$

y de manera similar

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} e^{-2it} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} (\cos 2t - i \operatorname{sen} 2t) = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2 \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ 2 \cos 2t \end{bmatrix}$$

La sustitución en (10) indica que la parte real y la parte imaginaria de (11*),

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2 \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ 2 \cos 2t \end{bmatrix},$$

son soluciones. Estas soluciones reales forman una base porque su wronskiano es diferente de cero.

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ -2 \operatorname{sen} 2t & 2 \cos 2t \end{vmatrix} = 2 \cos^2 2t + 2 \operatorname{sen}^2 2t = 2.$$

Por lo tanto, una solución general real de (10) es

$$\text{(12)} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A\mathbf{u} + B\mathbf{v} = A \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2 \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ 2 \cos 2t \end{bmatrix}.$$

Esta ecuación representa las mismas elipses que antes ya que al realizar los cálculos y simplificar se encuentra

$$\text{(13)} \qquad y_1^2 + \tfrac{1}{4} y_2^2 = (A^2 + B^2)(\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 2t) = A^2 + B^2 = const. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Punto espiral

Encontrar la solución general de

$$\text{(14)} \qquad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 - y_2. \end{aligned}$$

Solución. Este ejemplo mostrará que los eigenvalores complejos (no imaginarios puros) llevan a un **punto espiral** (en 0) definido como un punto P en torno al cual las soluciones forman una espiral y tienden a P cuanto $t \to \infty$; ver la figura 64 (o trazar estas espirales en el sentido contrario). De hecho, de la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

se obtienen los eigenvalores $\lambda_1 = -1 + i$ y $\lambda_2 = -1 - i$. Los eigenvectores se obtiene de $(-1 - \lambda)x_1 + x_2 = 0$. Para λ_1 se tiene $-ix_1 + x_2 = 0$ y puede tomarse como eigenvector $\mathbf{x}^{(1)\mathsf{T}} = [1 \;\; i]$. Para λ_2 se tiene $ix_1 + x_2 = 0$ y puede tomarse $\mathbf{x}^{(2)} = [1 \;\; -i]$. Por tanto, la solución general (compleja) de (14) es

$$\text{(15)} \qquad \mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t}.$$

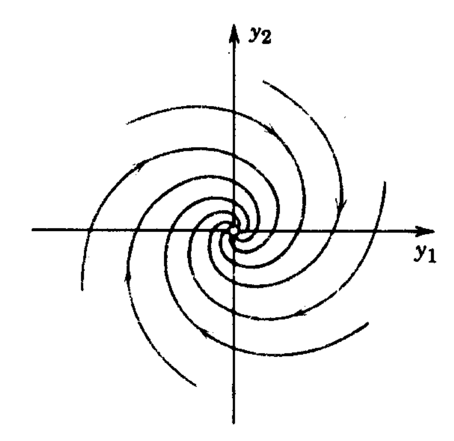


Figura 64. Soluciones del sistema (14), punto espiral en el origen.

A partir de esta ecuación se deduce una solución general *real*. Se procede en forma similar al ejemplo anterior. En (15) se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} = \begin{bmatrix} e^{-t}(\cos t + i \operatorname{sen} t) \\ ie^{-t}(\cos t + i \operatorname{sen} t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t \\ -e^{-t}\operatorname{sen} t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} e^{-t}\operatorname{sen} t \\ e^{-t}\cos t \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t} = \begin{bmatrix} e^{-t}(\cos t - i \operatorname{sen} t) \\ -ie^{-t}(\cos t - i \operatorname{sen} t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t \\ -e^{-t}\operatorname{sen} t \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} e^{-t}\operatorname{sen} t \\ e^{-t}\cos t \end{bmatrix}.$$

Las partes reales e imaginarias de la derecha son soluciones reales de (14) —llámense **u** y **v**— como puede verse por sustitución. Forman una base porque su wronskiano es diferente de cero,

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\operatorname{sen} t \\ -e^{-t}\operatorname{sen} t & e^{-t}\cos t \end{bmatrix} = e^{-2t}(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = e^{-2t}.$$

La solución general real correspondiente es

$$(16) \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A\mathbf{u} + B\mathbf{v} = A \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t \\ -e^{-t}\operatorname{sen} t \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} e^{-t}\operatorname{sen} t \\ e^{-t}\cos t \end{bmatrix};$$

en forma de componentes,

$$(16^*) \qquad y_1 = e^{-t}(A\cos t + B\operatorname{sen} t), \qquad y_2 = e^{-t}(B\cos t - A\operatorname{sen} t).$$

Representa espirales (ver la figura 64). Para ver esto, se introducen las coordenadas polares comunes $r, \bar{q}$ en el plano y_1y_2 definido por

$$r^2 = y_1^2 + y_2^2, \qquad \tan\theta = y_2/y_1.$$

Entonces al realizar directamente los cálculos y simplificar el resultado, por (16*) se obtiene

$$r^2 = (A^2 + B^2)e^{-2t}, \quad \text{por tanto} \quad r = c_0 e^{\theta} \tag{17}$$

donde $c_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $\theta = -t$. Para cada c_0 esta ecuación representa una espiral, como se afirmó. El origen es un punto espiral del sistema (14).

Para obtener las mismas espirales con las flechas invertidas, basta sustituir t por $-t$, porque entonces aparece un factor e^{+t} en lugar de e^{-t}, lo cual hace que cada espiral se trace en el sentido en que se aleja del origen ya que e^{t} se incrementa con t, en tanto que e^{-t} se decrementa (hasta cero) con t creciente, lo cual hace que las espirales tiendan al origen. ∎

Ausencia de una base de eigenvectores

Si **A** no tiene una base de eigenvectores, se obtienen menos soluciones linealmente independientes de (1) se plantea la pregunta de cómo obtener una base de soluciones en tal caso. Suponer que μ es un *eigenvalor doble* de **A** [es decir, la representación como producto de det $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ tiene un factor $(\lambda - \mu)^2$] para el que hay un solo eigenvector **x** (en lugar de dos eigenvectores linealmente independientes), por lo que se obtiene una sola solución $\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{x}e^{\mu t}$. Entonces puede obtenerse una segunda solución independiente de (1) al sustituir

$$\boxed{\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{x}te^{\mu t} + \mathbf{u}e^{\mu t}} \tag{18}$$

en (1). (El término $\mathbf{x}t$ solo, que se parece a lo que se hizo en la sección 2.2 en el caso de una raíz doble, no bastaría. Inténtese.) Se obtiene así

$$\mathbf{y}^{(2)\prime} = \mathbf{x}e^{\mu t} + \mu\mathbf{x}te^{\mu t} + \mu\mathbf{u}e^{\mu t} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{A}\mathbf{x}te^{\mu t} + \mathbf{A}\mathbf{u}e^{\mu t}.$$

Puesto que $\mu\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, se cancelan dos términos y al dividir entre $e^{\mu t}$ se obtiene

$$\mathbf{x} + \mu\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad \text{por tanto} \quad (\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{x}. \tag{19}$$

Aun cuando det $(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}) = 0$, esta expresión siempre puede resolverse para **u**, como puede demostrarse.

EJEMPLO 5 Ausencia de una base de eigenvectores

Encontrar una solución general de

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{y}.$$

Solución. La ecuación característica es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0.$$

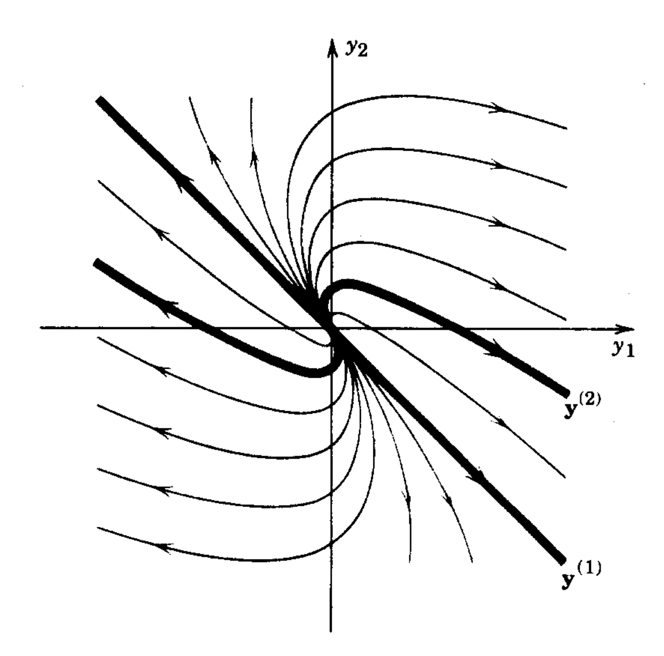


Figura 65. Nodo impropio en el ejemplo 5, p. 205.

Tiene una raíz doble $\lambda = 3$. Los eigenvectores se obtienen de $(4-\lambda)x_1 + x_2 = 0$, por tanto, a partir de $x_1 + x_2 = 0$, por ejemplo, $\mathbf{x}^{(1)\mathsf{T}} = [1 \ \ -1]$ y múltiplo de éste (que no son de ayuda). Así, (g) es

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} u_1 + u_2 &= 1 \\ -u_1 - u_2 &= -1 \end{aligned}$$

y puede tomarse simplemente $\mathbf{u}^{\mathsf{T}} = [0 \ \ 1]$. Se obtiene así la respuesta (figura 65, p. 206)

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}^{(1)} + c_2\mathbf{y}^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3t}.$$ ∎

Si **A** tiene un eigenvalor μ triple y un solo eigenvector linealmente independiente **x** que corresponde al mismo, se obtiene una segunda solución de (18) con **u** que satisface (19), como se acaba de discutir, y una tercera solución de la forma

$$\mathbf{y}^{(3)} = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}t^2 e^{\mu t} + \mathbf{u}te^{\mu t} + \mathbf{v}e^{\mu t} \tag{20}$$

con **u** que satisface (19) y **v** determinada a partir de

$$(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{u}, \tag{21}$$

la cual puede resolverse siempre.

Se menciona por último que si **A** tiene un eigenvalor triple y dos eigenvectores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ linealmente independientes que corresponden al mismo, entonces tres soluciones linealmente independientes son

$$\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)}e^{\mu t}, \qquad \mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)}e^{\mu t}, \qquad \mathbf{y}^{(3)} = \mathbf{x}te^{\mu t} + \mathbf{u}e^{\mu t} \tag{22}$$

donde $\mathbf{x}$ es una combinación lineal de $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ tal que

(23) $$(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{x}$$

puede resolverse para $\mathbf{u}$.

Problemas de la sección 4.3

Encontrar una solución general real de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales.

1. $y_1' = y_2$, $y_2' = y_1$

2. $y_1' = 4y_2$, $y_2' = 4y_1$

3. $y_1' = -2y_2$, $y_2' = 2y_1$

4. $y_1' = 5y_2$, $y_2' = -5y_1$

5. $y_1' = 2y_1 + 3y_2$, $y_2' = \frac{1}{3}y_1 + 2y_2$

6. $y_1' = y_1 + 4y_2$, $y_2' = y_1 + y_2$

7. $y_1' = -4y_1 - 6y_2$, $y_2' = y_1 + y_2$

8. $y_1' = -2y_1 + 2y_2$, $y_2' = -2y_1 - 2y_2$

9. $y_1' = y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 + y_2$

Resolver los siguientes problemas con valor inicial.

10. $y_1' = -y_2$, $y_2' = -y_1$, $y_1(0) = 3,\ y_2(0) = 1$

11. $y_1' = 2y_2$, $y_2' = 2y_1$, $y_1(0) = -9,\ y_2(0) = 15$

12. $y_1' = 6y_1 + 9y_2$, $y_2' = y_1 + 6y_2$, $y_1(0) = -3,\ y_2(0) = -3$

13. $y_1' = 2y_1 + 4y_2$, $y_2' = y_1 + 2y_2$, $y_1(0) = -4,\ y_2(0) = -4$

14. $y_1' = 5y_1 + y_2$, $y_2' = y_1 + 5y_2$, $y_1(0) = -3,\ y_2(0) = 7$

15. $y_1' = -y_1 + 4y_2$, $y_2' = 3y_1 - 2y_2$, $y_1(0) = 3,\ y_2(0) = 4$

Encontrar una solución general de los siguientes sistemas convirtiéndolos a una sola ecuación de orden superior.

16. El sistema del problema 1

17. El sistema del ejemplo 4

18. El tanque T_1 de la figura 66 contiene inicialmente 100 gal de agua pura. El tanque T_2 contiene inicialmente 100 gal de agua en la que se disolvieron 150 lb de sal. El líquido

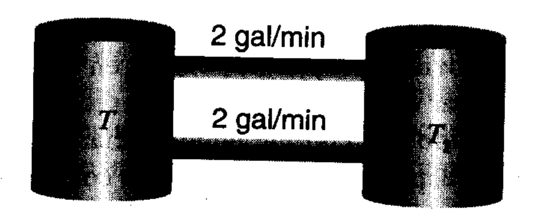


Figura 66. Tanques del problema 18.

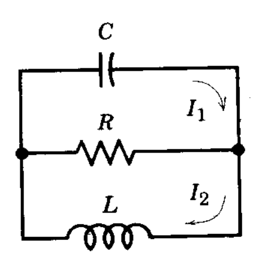


Figura 67. Red del problema 19.

circula por los tanques a una razón constante de 2 gal/min y la mezcla se mantiene uniforme por agitación. Demostrar que las cantidades de sal $y_1(t)$ lb y $y_2(t)$ lb en T_1 y T_2, respectivamente, se obtienen a partir del siguiente sistema y encontrar la solución.

$$y'_1 = \text{flujo de entrada/min} - \text{flujo de salida/min} = \frac{2}{100} y_2 - \frac{2}{100} y_1 \qquad \text{(Tanque } T1)$$

$$y'_2 = \text{flujo de entrada/min} - \text{flujo de salida/min} = \frac{2}{100} y_1 - \frac{2}{100} y_2 \qquad \text{(Tanque } T2).$$

19. Demostrar que un modelo para las corrientes $I_1(t)$ e $I_2(t)$ en la red de la figura 67 es

$$\frac{1}{C}\int I_1\,dt + R(I_1 - I_2) = 0, \qquad LI_2' + R(I_2 - I_1) = 0.$$

Encontrar una solución general, suponiendo que $R = 3$ ohms, $L = 4$ henrys y $C = 1/12$ faradios.

20. Encontrar la matriz **A** del sistema de la figura 67 para cualesquiera R, L, C. ¿Cuándo tendrá **A** eigenvalores reales? ¿Eigenvalores complejos conjugados?

4.4 PLANO FASE, PUNTOS CRÍTICOS, ESTABILIDAD

En esta sección se ofrece una discusión sistemática del **método del plano fase**. Se trata del método para presentar soluciones de sistemas

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{y} \qquad (\det \mathbf{A} \neq 0),$$

por tanto,

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$
$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2,$$

como **trayectorias** $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ en el **plano fase**, el plano y_1y_2, como se acaba de ilustrar con los ejemplos de la sección anterior. Recientemente el plano fase ha adquirido una enorme importancia, junto con los avances en las gráficas de computadora, por ejemplo, en relación con la estabilidad, como se verá. Su nombre proviene de un caso especial de la física (en el que es el plano y-(mv), m = masa, $v = y'$ = velocidad), pero se usa hoy en general, para el plano y_1y_2.

Para iniciar la discusión, se observa que a partir de (1) se obtiene

$$\text{(2)} \qquad \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{dy_2/dt}{dy_1/dt} = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}.$$

Esta ecuación asocia con cada punto P: (y_1, y_2) una dirección tangente única dy_2/dy_1 de la trayectoria que pasa por P, excepto para el punto $P = P_0$:(0, 0), donde el segundo miembro de (2) se hace 0/0. Este punto P_0, en el que dy_2/dy_1 se hace una indeterminación, se llama **punto crítico** de (1).

Un punto crítico puede ser un nodo (como en el ejemplo 1 de la sección 4.3), un punto silla (ejemplo 2), un centro (ejemplo 3) o un punto espiral (ejemplo 4). Cuál de estas posibilidades ocurrirá depende del tipo de eigenvalores de **A**, los cuales son las soluciones λ, λ_2 de la ecuación característica

$$\text{(3)} \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det \mathbf{A} = 0.$$

Usando la notación estándar

$$\text{(4)} \qquad p = a_{11} + a_{22}, \qquad q = \det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad \Delta = p^2 - 4q,$$

a partir del segundo miembro de (3) y de la representación como producto se tiene

$$\text{(5)} \qquad \lambda^2 - p\lambda + q = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2.$$

Por tanto p es la suma de los eigenvalores, q el producto y Δ el discriminante. El punto crítico P_0 de (1) es un:

(6)

(a) *nodo* si $q > 0$ y $\Delta \geq 0$,
(b) *punto silla* si $q < 0$,
(c) *centro* si $p = 0$ y $q > 0$,
(d) *punto espiral* si $p \neq 0$ y $\Delta < 0$.

Más adelante se indicará cómo se obtiene (6). Se clasifican así los puntos críticos P_0 en términos de las formas geométricas de las trayectorias en la proximidad de P_0. Otra clasificación es en términos de estabilidad. Los conceptos de estabilidad son importantes en muchas aplicaciones. Son sugeridos por la física, donde **estabilidad** significa, hablando en términos generales, que un cambio pequeño (perturbación pequeña) de un sistema físico en algún instante sólo cambia ligeramente el comportamiento del sistema en todos los tiempos futuros t. En cuanto a los puntos críticos, las siguientes definiciones resultan adecuadas.



Figura 68. Punto crítico estable P_0 de (1) (La trayectoria que se inicia en P_1 permanece en el disco de radio ¯.)

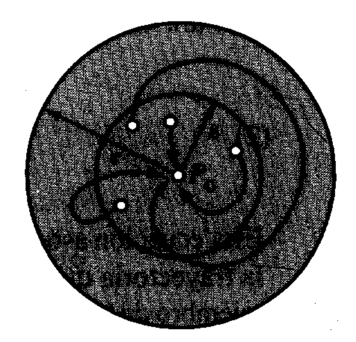


Figura 69. Punto crítico estable y atractivo P_0 de (1)

A P_0 se le llama **punto crítico estable**[2] de (1) si, en términos generales, todas las trayectorias de (1) que en algún instante están suficientemente próximas a P_0 se mantienen cerca de P_0 en todos los tiempos posteriores; precisando: si para todo disco D_ϵ de radio $\epsilon > 0$ con centro en P_0 existe un disco D_δ de radio $\delta > 0$ con centro en P_0 tal que todas las trayectorias de (1) que tienen un punto P_1 (correspondiente a $t = t_1$, por ejemplo) en D_ϵ. D_δ tienen todos sus puntos correspondientes a $t \geq t_1$ en D_ϵ.

A P_0 se le llama **punto crítico estable y atractivo**[3] de (1) si P_0 es estable y toda trayectoria que tiene un punto en D_γ tiende a P_0 cuando $t \to \infty$. Ver la figura 69.

A P_0 se le llama **inestable** si P_0 no es estable.

Un punto crítico P_0 es:

(7)

(a) *estable y atractivo* si $p < 0$ y $q > 0$,
(b) *estable* si $p \leq 0$ y $q > 0$,
(c) *inestable* si $p > 0$ o $q < 0$.

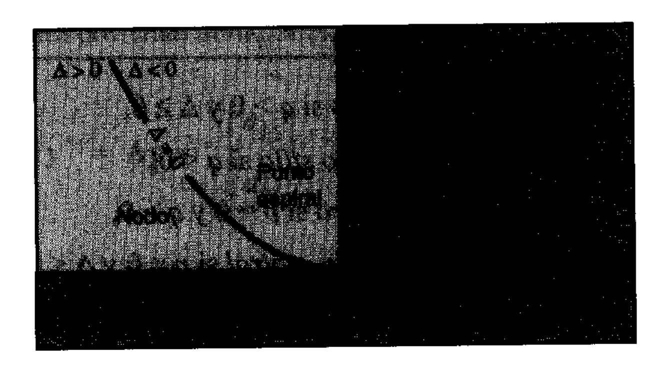


Figura 70. Diagrama de estabilidad del sistema (1) con p, q, / definidos en (4). Estable y atractivo: El segundo cuadrante sin el eje q. Estabilidad también en el eje q positivo (que corresponde a centros). Inestable: Región azul.

[2] En términos más precisos: **estable en el sentido de Liapunov**. Existen otras definiciones de estabilidad, pero la de Liapunov —la única que se considerará aquí— es probablemente la más útil.

[3] O **punto crítico asintóticamente estable**.

Los criterios de (6) y (7) se resumen en el **diagrama de estabilidad** de la figura 70. En este diagrama, la región de inestabilidad es azul.

Se indica ahora cómo se obtienen estos criterios. Si $q = \lambda_1\lambda_2 > 0$, ambos eigenvalores son positivos o ambos son negativos o complejos conjugados. Si también $p = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$, ambos son negativos o tienen una parte real negativa. Por tanto, P_0 es estable y atractivo. El razonamiento para los otros dos renglones de (7) es similar.

Si $\Delta < 0$, los eigenvalores son complejos conjugados, por ejemplo, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Si también $p = \lambda_1 + \lambda_1 = 2\alpha < 0$, se obtiene un punto espiral que es estable y atractivo.

Si $p = 0$, entonces $\lambda_2 = -\lambda_1$ y $q = \lambda_1\lambda_2 = -\lambda_1^2$. Si también $q > 0$, entonces $\lambda_1^2 = -q < 0$, de donde λ_1, y por tanto λ_2, deben ser imaginarios puros. En este caso se obtienen soluciones periódicas, siendo sus trayectorias curvas cerradas alrededor de P_0, que es un centro.

EJEMPLO 1 Aplicación de los criterios (6) y (7)

El sistema (6) de la sección anterior es

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y}. \tag{8}$$

Se observa que $p = a_{11} + a_{22} = -6$, $q = \det \mathbf{A} = 8$ y $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 8 = 4$. Por lo tanto, por (6a), el punto crítico en el origen es un nodo, el cual, por (7a), es estable y atractivo. Esto concuerda con el resultado obtenido anteriormente. Los demás ejemplos de la sección 4.3 pueden discutirse de manera similar. ∎

EJEMPLO 2 Movimientos libres de una masa en un resorte

¿Qué tipo de punto crítico tiene el modelo de una masa en un resorte elástico?

Solución. La ecuación es [ver (7) en la sección 2.5]

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0.$$

Para obtener un sistema, se hace $y_1 = y$, $y_2 = y'$ (ver la sección 4.1), obteniéndose

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2. \end{aligned}$$

Para los criterios (6) y (7) se necesitan $p = -c/m$, $q = k/m$ y $\Delta = (c/m)^2 - 4k/m$. Se obtienen así los siguientes resultados.

Ausencia de amortiguamiento. $c = 0$, $p = 0$, $q > 0$, centro.
Subamortiguamiento. $c^2 < 4mk$, $p < 0$, $q > 0$, $\Delta < 0$, punto espiral estable y atractivo.
Amortiguamiento crítico. $c^2 = 4mk$, $p < 0$, $q > 0$, $\Delta = 0$, nodo estable y atractivo.
Sobreamortiguamiento. $c^2 > 4mk$, $p < 0$, $q > 0$, $\Delta > 0$, nodo estable y atractivo. ∎

Problemas de la sección 4.4

Encontrar una solución general y determinar el tipo y estabilidad del punto crítico.

1. $y_1' = 3y_1 - y_2$, $y_2' = -y_1 + 3y_2$
2. $y_1' = -4y_2$, $y_2' = y_1 - 5y_2$
3. $y_1' = -3y_1 + y_2$, $y_2' = -4y_1 + 2y_2$
4. $y_1' = -2y_2$, $y_2' = 8y_1$
5. $y_1' = y_1 + 3y_2$, $y_2' = 4y_1 + 2y_2$
6. $y_1' = y_1 - 4y_2$, $y_2' = -3y_1 + 2y_2$
7. $y_1' = -2y_1 + 2y_2$, $y_2' = -2y_1 - 2y_2$
8. $y_1' = 4y_1 + 5y_2$, $y_2' = -5y_1 - 4y_2$
9. $y_1' = 6y_1 + 9y_2$, $y_2' = y_1 + 6y_2$
10. En (8), sea t el tiempo. ¿Qué ocurre con el punto crítico si se introduce $\tau = -t$ como nueva variable independiente? ¿Qué significa mecánicamente esta transformación?
11. Discutir los puntos críticos de (7), (8), (9) de la sección 4.3 aplicando (6) y (7) de la presente sección,
12. ¿Qué ocurre con el centro de (10) de la sección 4.3 si se reemplaza $\mathbf{A}$ por $\mathbf{A} + k\mathbf{I}$ (donde k puede representar el efecto de los errores de medición de los elementos de la diagonal principal?
13. Sea $\mathbf{A}$ la matriz del sistema del problema 12. ¿Existe k para la que se obtenga un sistema $\mathbf{y}' = (\mathbf{A} + k\mathbf{I})\mathbf{y}$ con un nodo?

¿Qué tipo de curvas son las trayectorias de las siguientes ecuaciones en el plano fase?

14. $y'' + \frac{1}{4}y = 0$
15. $y'' - k^2y = 0$
16. $y'' + 2y' = 0$
17. **(Oscilaciones armónicas)** Resolver $y'' + \omega_0^2 y = 0$ e indicar el tipo de trayectorias en el plano fase.
18. **(Oscilaciones amortiguadas)** Considérese la oscilación amortiguada $y(t) = e^{-t}$ sen t. Trazar algunos puntos de la trayectoria correspondiente en el plano fase para obtener la impresión de que debe ser una espiral.
19. **(Oscilaciones forzadas)** ¿Qué trayectorias en el plano fase corresponden a las oscilaciones forzadas de estado estacionario de un sistema amortiguado (sección 2.11) sujeto a una fuerza impulsora senoidal?
20. **(Movimientos amortiguados libres)** Por la sección 2.5 se sabe que hay tres tipos de movimientos libres de un sistema amortiguado. Usando las figuras de las curvas solución de la sección 2.5, dar una descripción cualitativa aproximada y trazar las trayectorias correspondientes en el plano fase. (Para simplificar el problema, suponer una velocidad inicial cero.)

4.5 MÉTODOS DEL PLANO FASE PARA SISTEMAS NO LINEALES

Los métodos del plano fase resultan particularmente valiosos para sistemas cuya solución por métodos analíticos es difícil o imposible, como es el caso de muchos sistemas ***no lineales*** de primer orden de importancia práctica

$$(1) \qquad \mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2), \end{aligned}$$

a los que se amplían ahora los métodos que se acaban de discutir para sistemas lineales. Se supone que (1) es un **sistema autónomo**, es decir, que la variable independiente t no se presenta explícitamente. Se verá que los métodos ampliados dan una caracterización de varias propiedades generales de las soluciones, sin resolver en realidad el sistema. Como anteriormente, se presentarán familias completas de soluciones. Esto representa en general una ventaja sobre los métodos numéricos, con los cuales sólo se obtiene una solución (aproximada) a la vez (si bien con una precisión mucho mayor).

Como antes se llama al plano y_1y_2 el *plano fase*, *trayectoria* a una curva solución de (1) en el plano fase y **punto crítico** a un punto P_0: (y_1, y_2) en el que tanto $f_1(y_1, y_2) = 0$ como $f_2(y_1, y_2) = 0$. Si (1) tiene varios puntos críticos, se discuten uno a continuación de otro. En todos los casos se pasa al origen el punto P_0: (a, b) por discutirse. Esto puede hacerse por una traslación $\tilde{y}_1 = y_1 - a$, $\tilde{y}_2 = y_2 - b$. Por tanto, puede suponerse que P_0 es el origen (0, 0) y, para simplificar, se seguirá escribiendo y_1, y_2 (en lugar de $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$). Se supone asimismo que P_0 está ***aislado***, es decir, que es el único punto crítico en el interior de un disco circular (suficientemente pequeño) con centro en el origen.

¿Cómo pueden determinarse el tipo y la propiedad de estabilidad de un punto crítico P_0: (0, 0)? En la mayoría de los casos prácticos esto puede hacerse por **linealización**, es decir, investigando cierto sistema *lineal*, de la siguiente manera, suponiendo que f_1 y f_2 en (1) son continuas y que tienen derivadas parciales continuas en una vecindad de P_0. Puesto que P_0 es un punto crítico, se tiene $f_1(0, 0) = 0$ y $f_2(0, 0) = 0$. Por tanto, f_1 y f_2 no tienen términos constantes. Sus términos lineales se escriben explícitamente. Entonces (1) queda como

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y}), \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + h_1(y_1, y_2) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + h_2(y_1, y_2). \end{aligned}$$

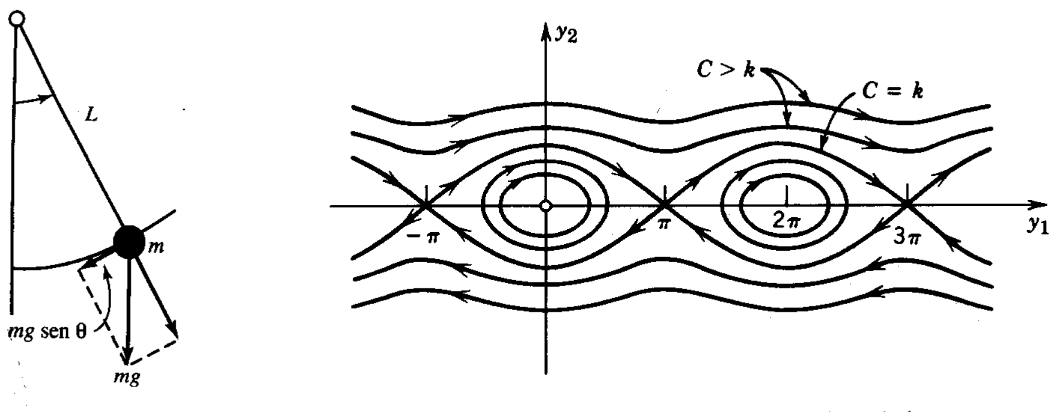
Aquí **A** es constante (independiente de t) porque (1) es autónoma. Puede demostrarse que si det $\mathbf{A} \neq 0$, entonces el tipo y la estabilidad de P_0 es la misma que la del punto crítico (0, 0) del *sistema lineal* obtenido por **linealización**, es decir, al eliminar $\mathbf{h}(\mathbf{y})$ de (2):

$$\text{(3)} \qquad \boxed{\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{aligned}}$$

De hecho, el supuesto anterior acerca de las derivadas implica que h_1 y h_2 son pequeñas cerca de P_0. Hay ***dos excepciones***: si los eigenvalores de **A** son iguales o imaginarios puros, además del tipo de puntos críticos del sistema *lineal*, el sistema no lineal puede tener un punto espiral. Para las demostraciones ver la referencia [A4], pp. 375–388.

EJEMPLO 1 Péndulo libre no amortiguado. Linealización

En la figura 71 se muestra un péndulo compuesto por un cuerpo de masa m (el disco) y una varilla de longitud L. Determinar las localizaciones y los tipos de los puntos críticos. Suponer que la masa de la varilla y la resistencia del aire son despreciables.



(a) Péndulo *(b)* Curvas solución $y_2(y_1)$ de (4) en el plano de fase

Figura 71. Ejemplos 1 y 2 (C se explicará en el ejemplo 3).

Solución. Primer paso. Establecimiento del modelo matemático. Sea θ que denota el desplazamiento angular, medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj a partir de la posición de equilibrio. El peso del disco es mg (g es la aceleración de la gravedad). Produce una fuerza de restauración mg sen θ tangente a la curva del movimiento (arco circular) del disco. Por la segunda ley de Newton, en cada instante esta fuerza está equilibrada por la fuerza de aceleración $mL\theta''$, donde $L\theta''$ es la aceleración; por tanto la resultante de estas dos fuerzas es cero y se obtiene como modelo matemático

$$mL\theta'' + mg \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Al dividir esta igualdad entre mL se tiene

(4) $$\boxed{\theta'' + k \operatorname{sen} \theta = 0} \qquad \left(k = \frac{g}{L}\right).$$

Cuando θ es muy pequeño, sen θ podría aproximarse con bastante precisión por θ y obtenerse como solución *aproximada* $A \cos \sqrt{k}t + B \operatorname{sen} \sqrt{k}t$, pero la solución *exacta* para cualquier θ no es una función elemental.

Segundo paso. Discusión de los puntos críticos por linealización. Para obtener un sistema de ecuaciones, se hace $\theta = y_1$, $\theta' = y_2$. Entonces por (4)

(4*) $$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) = y_2 \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) = -k \operatorname{sen} y_1. \end{aligned}$$

Los dos segundos miembros son cero cuando $y_2 = 0$ y sen $y_1 = 0$. Se obtiene así un número indefinido de puntos críticos $(n\pi, 0)$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Se considera (0, 0). Puesto que la serie de Maclaurin es

$$\operatorname{sen} y_1 = y_1 - \tfrac{1}{6}y_1^3 + - \cdots \approx y_1,$$

el sistema linealizado es

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -ky_1. \end{aligned}$$

En los criterios (6), (7) de la sección 4.4 se necesitan $p = a_{11} + a_{22} = 0$, $q = \det \mathbf{A} = k\ (> 0)$ y $\Delta = p^2 - 4q = -4k$. A partir de lo anterior y de (6c) de la sección 4.4 se concluye que (0, 0) es un centro, que siempre es estable. Puesto que sen θ = sen y_1 es periódica, con periodo 2π, los puntos críticos $(n\pi, 0)$, $n = \pm 2, \pm 4, \cdots$, son todos centros.

Se considera ahora el punto crítico $(\pi, 0)$, haciendo $\theta - \pi = y_1$ y $(\theta - \pi)' = \theta' = y_2$, por lo que en (4),

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(y_1 + \pi) = -\operatorname{sen} y_1 = -y_1 + \tfrac{1}{6}y_1^3 - + \cdots \approx -y_1$$

y el sistema linealizado es ahora

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix}\mathbf{y}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= ky_1. \end{aligned}$$

Se observa que $p = 0$, $q = -K$ (< 0) y $\Delta = -4q = 4k$, por lo que de (6b) de la sección 4.4 se tiene un punto silla, el cual siempre es inestable. Por la periodicidad, los puntos críticos $(n\pi, 0)$, $n = \pm 1, \pm 3, \cdots$, son todos puntos silla. Estos resultados concuerdan con la impresión que se consiguió de la figura 71. ∎

EJEMPLO 2 Linealización de la ecuación del péndulo amortiguado

A fin de aumentar la experiencia para investigar los puntos críticos, como otro importante caso práctico se verá la manera en que el ejemplo 1 cambia cuando se incorpora un término de amortiguamiento $c\theta'$ (amortiguamiento proporcional a la velocidad angular) en la ecuación (4), de modo que queda

(5) $$\boxed{\theta'' + c\theta' + k \operatorname{sen} \theta = 0,}$$

donde $k > 0$ y $c \geq 0$. Al hacer $\theta = y_1$, $\theta' = y_2$, como antes, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -k \operatorname{sen} y_1 - cy_2. \end{aligned}$$

Se observa que los puntos críticos tienen las mismas localizaciones que antes, a saber, $(0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, $\cdots$. Se considera $(0, 0)$. Al linealizar $\operatorname{sen} y_1 \approx y_1$ como en el ejemplo 1 se obtiene el sistema linealizado

(6) $$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix}\mathbf{y}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -ky_1 - cy_2. \end{aligned}$$

Esta expresión es idéntica a la del sistema del ejemplo 2 de la sección 4.4, salvo por el factor (¡positivo!) m (y excepto por el significado físico de y_1); por tanto, para $c = 0$ (sin amortiguamiento) se tiene un centro (ver la figura 71), para un amortiguamiento pequeño se tiene un punto espiral (ver la figura 72), y así sucesivamente.

Se considera ahora el punto crítico $(\pi, 0)$. Se hace $\theta - \pi = y_1$, $(\theta - \pi)' = \theta' = y_2$ y se hace la linealización

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(y_1 + \pi) = -\operatorname{sen} y_1 \approx -y_1.$$

Se obtiene así el nuevo sistema linealizado

(7) $$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & -c \end{bmatrix}\mathbf{y}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= ky_1 - cy_2. \end{aligned}$$

Para los criterios (6), (7) de la sección 4.4 se calculan $p = a_{11} + a_{22} = -c$, $q = \det \mathbf{A} = -k$ y $\Delta = p^2 - 4q = c^2 + 4k$. De lo anterior se llega a los siguientes resultados.

Sin amortiguamiento. $c = 0$, $p = 0$, $q < 0$, $\Delta > 0$, punto silla, Ver la figura 71.
Con amortiguamiento. $c > 0$, $p < 0$, $q < 0$, $\Delta > 0$, punto silla, Ver la figura 72.

Puesto que $\operatorname{sen} y_1$ es periódica con periodo 2π, los puntos críticos $(\pm 2\pi, 0)$, $(\pm 4\pi, 0)$, $\cdots$ son del mismo tipo que $(0, 0)$, y los puntos críticos $(-\pi, 0)$, $(\pm 3\pi, 0)$, $\cdots$ son del mismo tipo que $(\pi, 0)$, por lo que el problema está resuelto.

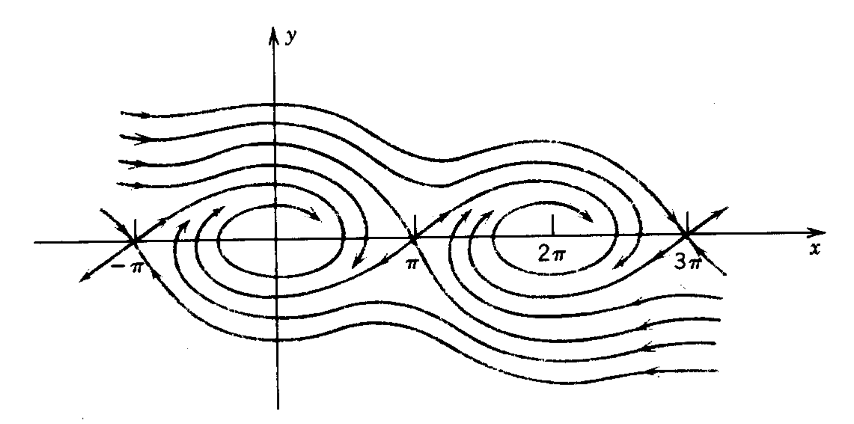


Figura 72. Trayectorias en el plano fase para el péndulo amortiguado.

En la figura 72 se muestran las trayectorias en el caso de amortiguamiento. Lo que se observa concuerda con la intuición física. De hecho, amortiguamiento significa pérdida de energía; por tanto, en lugar de las trayectorias cerradas de las soluciones periódicas de la figura 71 se tiene ahora trayectorias en espiral alrededor de uno de los puntos críticos (0, 0), $(\pm 2\pi, 0), \cdots$. Incluso las trayectorias onduladas que corresponden a movimientos giratorios al final quedan en espiral alrededor de uno de estos puntos; además, ya no hay trayectorias que conecten los puntos críticos (como ocurría en el caso sin amortiguamiento).

Transformación a una ecuación de primer orden en el plano fase

Otro método del plano fase se basa en la idea de transformar una ecuación autónoma de segundo orden

$$F(y, y', y'') = 0$$

en una de primer orden tomando $y = y_1$ como la variable independiente, haciendo $y' = y_2$ y transformando y'' por la regla de la cadena,

$$y'' = y_2' = \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1}\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} y_2.$$

Entonces la ecuación se hace de primer orden,

$$F\left(y_1, y_2, \frac{dy_2}{dy_1} y_2\right) = 0 \tag{8}$$

y en ocasiones puede resolverse o abordarse por campos direccionales. Esto se ilustra para la ecuación del ejemplo 1 obteniéndose de este modo un conocimiento más profundo del comportamiento de las soluciones.

EJEMPLO 3 Una ecuación (8) para el péndulo libre sin amortiguamiento

Si en (4) se hace $\theta = y_1$, $\theta' = y_2$ (la velocidad angular) y se usa

$$\theta'' = \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1}\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} y_2,$$

por (4) se obtiene

$$\frac{dy_2}{dy_1} y_2 = -k \operatorname{sen} y_1.$$

Ahora pueden separarse las variables, $y_2\,dy_2 = -k \operatorname{sen} y_1\,dy_1$ e integrar

(9) $$\tfrac{1}{2}y_2^2 = k \cos y_1 + C \qquad (C \text{ constante}).$$

Al multiplicar esta expresión por mL^2 se obtiene

$$\tfrac{1}{2}m(Ly_2)^2 - mL^2k \cos y_1 = mL^2C.$$

Se observa que estos tres términos son energías. De hecho, y_2 es la velocidad angular, por lo que Ly_2 es la velocidad y el primer término es la energía cinética. El segundo término (incluyendo el signo menos) es la energía potencial del péndulo, y mL^2C es la energía total, que es constante, como sería de esperarse por la ley de conservación de la energía, ya que no hay amortiguamiento (es decir, ninguna pérdida de energía). El tipo de movimiento depende de la energía total y, en consecuencia, de C como sigue.

En la figura 71*b* se muestran porciones de las curvas $y_2 = y_2(y_1)$ para varios valores de C. Estas gráficas continúan periódicamente con periodo 2π a la izquierda y a la derecha. Se observa que algunas de ellas son elipsoidales y cerradas, otras son onduladas y hay dos curvas (que pasan por los puntos silla $(n\pi, 0)$, $n = \pm 1, \pm 3, \cdots$) que separan a esos dos tipos de curvas. Por (9) se ve que la menor C posible es $C = -k$; entonces $y_2 = 0$ y $\cos y_1 = 1$, por lo que el péndulo se encuentra en reposo. El péndulo cambiará la dirección de su movimiento si hay puntos en los que $y_2 = \theta' = 0$. Entonces $k \cos y_1 + C = 0$ por (9). Si $y_1 = \pi$, entonces $\cos y_1 = -1$ y $C = k$. Por tanto, si $-k < C < k$, entonces el péndulo invierte su dirección para una $|y_1| = |\theta| < \pi$ y para estos valores de C con $|C| < k$ el péndulo oscila. Esto corresponde a las curvas cerradas de la figura. Sin embargo, si $C > k$, entonces $y_2 = 0$ es imposible y el péndulo hace un movimiento giratorio que aparece como una curva ondulada en el plano y_1y_2. Por último, el valor $C = k$ corresponde a las dos "curvas de separación" de la figura 71*b* que unen los puntos silla. ∎

El método del plano fase de deducir una ecuación sencilla de primer orden (8) puede resultar de interés práctico no sólo cuando (8) puede resolverse (como en el ejemplo 3) sino también cuando no es posible encontrar la solución y es necesario utilizar campos direccionales (sección 1.10). Esto se ilustra con un ejemplo muy famoso:

EJEMPLO 4 Oscilaciones autosostenidas, ecuación de van der Pol

Hay sistemas físicos tales que para oscilaciones pequeñas se alimenta energía al sistema, en tanto que para oscilaciones grandes, se extrae energía del mismo. En otras palabras, las oscilaciones grandes serán amortiguadas, mientras que para las oscilaciones pequeñas hay un "amortiguamiento negativo" (alimentación de energía al sistema). Por razones físicas se espera que tal sistema tienda a un comportamiento periódico, el cual aparecerá entonces como una curva cerrada en el plano fase, llamada **ciclo límite**. Una ecuación diferencial que describe estas oscilaciones es la famosa **ecuación de van der Pol**[4]

(10) $$\boxed{y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0} \qquad (\mu > 0, \text{ constante}).$$

Se presenta en el estudio de circuitos eléctricos que contienen tubos al vacío. Para $\mu = 0$ esta ecuación queda como $y'' + y = 0$ y se obtienen oscilaciones armónicas. Sea $\mu > 0$. El término de amortiguamiento tiene el coeficiente $-\mu(1 - y^2)$. Es negativo para oscilaciones pequeñas, a saber, $y^2 < 1$, por lo que se tiene un "amortiguamiento negativo". Es cero para $y^2 = 1$ (sin amortiguamiento) y es positivo si $y^2 > 1$ (amortiguamiento positivo, pérdida de energía). Si μ es pequeño, se espera un ciclo límite que es casi un círculo porqué entonces la ecuación de van der Pol difiere pero poco de $y'' + y = 0$. Si μ es grande, el ciclo límite probablemente lucirá diferente.

Al hacer $y = y_1$, $y' = y_2$ y usar $y'' = (dy_2/dy_1)y_2$ como en (8), por (10) se tiene

(11) $$\frac{dy_2}{dy_1}y_2 - \mu(1 - y_1^2)y_2 + y_1 = 0.$$

Las isoclinas en el plano y_1y_2 (el plano fase) son las curvas $dy_2/dy_1 = k = const$, es decir,

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \mu(1 - y_1^2) - \frac{y_1}{y_2} = k.$$

[4] BALTHASAR VAN DER POL (1889-1959). Físico holandés.

Ahora puede resolverse esta ecuación para y_2 en términos de y_1,

$$y_2 = \frac{y_1}{\mu(1 - y_1^2) - k} \qquad \text{(Figs. 73, 74).}$$

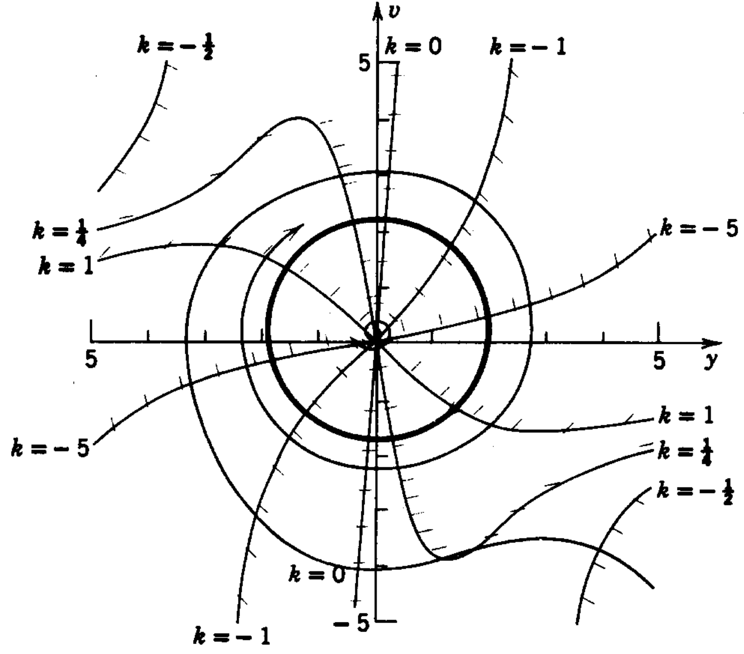


Figura 73. Diagrama de elementos lineales para la ecuación de van der Pol con $\mu = 0.1$ en el plano fase, que muestra también el ciclo límite y dos curvas solución.

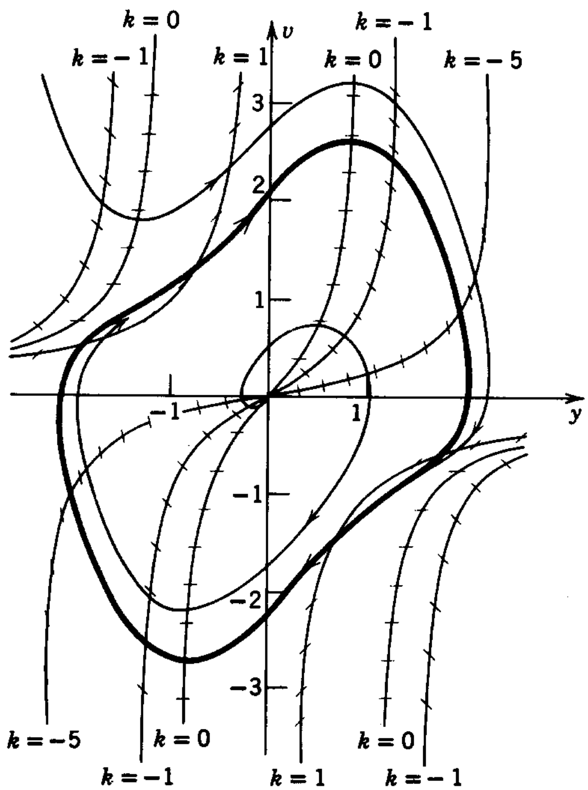


Figura 74. Diagrama de elementos lineales para la ecuación de van der Pol con $\mu = 1$ en el plano fase, que muestra también el ciclo límite y dos curvas solución que tienden a él.

Estas curvas son un tanto complicadas. La figura 73 muestra algunas de ellas para un $\mu = 0.1$ pequeña así como el ciclo límite (casi un círculo) y dos curvas solución que tienden al ciclo límite, una desde el exterior y la otra desde el interior. La última es una espiral angosta y sólo se muestra en la figura la parte inicial de ella. Para μ más grande la situación cambia y el ciclo límite deja de parecerse a un círculo. La figura 74 ilustra este hecho para $\mu = 1$. Obsérvese que las curvas solución tienden al ciclo límite de manera mucho más rápida que para $\mu = 0.1$.

∎

Problemas de la sección 4.5

1. Demostrar que $y'' - y + y^2 = 0$ tiene los puntos críticos (0, 0) y (1, 0) y determinar su tipo y estabilidad.

Determinar la localización y el tipo de todos los puntos críticos de las siguientes ecuaciones. (Usar la linealización de los sistemas correspondientes.)

2. $y'' + y - y^3 = 0$
3. $y'' - 9y + y^3 = 0$
4. $y'' + 4y - 5y^3 + y^5 = 0$
5. $y'' + \cos y = 0$
6. $y'' - 4y + y^3 = 0$
7. ¿Qué tipo de puntos críticos se obtienen en el ejemplo 1 si $k < 0$?
8. Convertir la ecuación del problema 6 a un sistema, resolverlo en el plano fase y trazar algunas de las trayectorias.
9. ¿A qué estado (posición, velocidad, dirección del movimiento) del péndulo que oscila corresponden los cuatro puntos de intersección de una curva cerrada con los ejes en la figura 71? ¿El punto de intersección de una curva ondulada con el eje y_2?
10. En el problema 8, incorporar un término de amortiguamiento lineal para obtener

$$y'' + y' - 4y + y^3 = 0.$$

Determinar de qué tipo es cada punto crítico por linealización. Empezar con una conjetura (usando argumentos mecánicos y la respuesta del problema 8), después realizar los cálculos.

11. Demostrar que si $\mu \longrightarrow 0$, las isoclinas del ejemplo 4 tienden a líneas rectas que pasan por origen, de pendiente $-1/k$. ¿Por qué sería esto de esperarse?
12. Determinar el tipo del punto crítico (0, 0) de la ecuación de Van der Pol cuando $\mu > 0$, $\mu = 0$ y $\mu < 0$.
13. La figura 73 muestra que algunas de las isoclinas tienen un máximo o un mínimo. Demostrar que estos puntos pertenecen a la hipérbola $y_1y_2 = -1/2\mu$.

¿Qué clase de curvas son las trayectorias de las siguientes ecuaciones en el plano fase?

14. $y'' + y'^2 = 0$
15. $yy'' + y'^2 = 0$

4.6 SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS

En esta sección final del capítulo 4 se discuten los métodos para resolver sistemas lineales no homogéneos. Por la sección 4.2 se recuerda que un sistema así es de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g} \tag{1}$$

donde el vector $\mathbf{g}(t)$ no es una identidad con cero. Se supone que $\mathbf{g}(t)$ y la matriz $\mathbf{A}(t)$ de $n \times n$ son continuos en algún intervalo J del eje t. A partir de una solución general $\mathbf{y}^{(h)}(t)$ del sistema homogéneo $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ en J y de una **solución particular** $\mathbf{y}^{(p)}(t)$ de (1) en J [es decir, una solución de (1) que no contiene constantes arbitrarias], se obtiene una solución de (1),

$$(2) \qquad \mathbf{y} = \mathbf{y}^{(h)} + \mathbf{y}^{(p)},$$

llamada **solución general** de (1) en J, ya que incluye a todas las soluciones de (1) en J, como puede demostrarse. Habiendo estudiado los sistemas lineales homogéneos en las secciones 4.1-4.4, el objetivo aquí será explicar los métodos para obtener soluciones particulares de (1). Se discuten el método de coeficientes indeterminados y el método de variación de parámetros; estos métodos tienen contrapartes para una ecuación sencilla, como se sabe por las secciones 2.9 y 2.10. Como tercer método de solución se considera asimismo la reducción a la forma diagonal.

Método de coeficientes indeterminados

Este método es adecuado si las componentes de $\mathbf{g}$ son potencias enteras de t, funciones exponenciales o senoidales y cosenoidales. Se explica por medio de un ejemplo.

EJEMPLO 1 Método de coeficientes indeterminados

Encontrar una solución general del sistema lineal no homogéneo

$$(3) \qquad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{y} + \begin{bmatrix} 2t^2 + 10t \\ t^2 + 9t + 3 \end{bmatrix}.$$

Solución. La forma de $\mathbf{g}$ sugiere suponer $\mathbf{y}^{(p)}$ en la forma

$$\mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{u} + \mathbf{v}t + \mathbf{w}t^2$$

y determinar los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Por sustitución,

$$\mathbf{y}^{(p)\prime} = \mathbf{v} + 2\mathbf{w}t = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v}t + \mathbf{A}\mathbf{w}t^2 + \mathbf{g}.$$

En términos de componentes se obtiene

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2w_1 t \\ 2w_2 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_1 - 4u_2 \\ u_1 - 3u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2v_1 - 4v_2 \\ v_1 - 3v_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 2w_1 - 4w_2 \\ w_1 - 3w_2 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 2t^2 + 10t \\ t^2 + 9t + 3 \end{bmatrix}.$$

Al igualar los términos en t^2 en ambos miembros, se obtiene

$$0 = 2w_1 - 4w_2 + 2, \qquad 0 = w_1 - 3w_2 + 1, \qquad \text{por tanto} \quad w_1 = -1, \quad w_2 = 0.$$

A partir de los términos en t se obtiene

$$2w_1 = 2v_1 - 4v_2 + 10, \qquad 2w_2 = v_1 - 3v_2 + 9, \qquad \text{por tanto} \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 3.$$

Por último, de los términos constantes se obtiene

$$v_1 = 2u_1 - 4u_2, \qquad v_2 = u_1 - 3u_2 + 3, \qquad \text{por tanto} \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0.$$

A partir de estas expresiones y de la solución general del sistema homogéneo del ejemplo 2 de la sección 4.3 se llega a la respuesta

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(h)} + \mathbf{y}^{(p)} = c_1\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}e^{t} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{-2t} + \begin{bmatrix}-t^2\\3t\end{bmatrix}.$$ ∎

Se requiere una **modificación** si un término **g** incluye $e^{\lambda t}$ donde λ es un eigenvalor de **A**. Entonces en vez de suponer un término $\mathbf{u}e^{\lambda t}$ en $\mathbf{y}^{(p)}$, debe empezarse con $\mathbf{u}te^{\lambda t} + \mathbf{v}e^{\lambda t}$. (El primero de estos dos términos es el análogo de la modificación de la sección 2.9. pero no será suficiente aquí. Inténtese.)

EJEMPLO 2 Modificación del método de coeficientes indeterminados

Encontrar una solución general de

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix}-3 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}\mathbf{y} + \begin{bmatrix}-6\\2\end{bmatrix}e^{-2t}. \tag{4}$$

Solución. Una ecuación general del sistema homogéneo es (ver el ejemplo 1 de la sección 4.3)

$$\mathbf{y}^{(h)} = c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-4t}. \tag{5}$$

Puesto que $\lambda = -2$ es un eigenvalor de **A**, debe suponerse $\mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{u}te^{-2t} + \mathbf{v}e^{-2t}$ (en vez de $\mathbf{u}e^{-2t}$). Por sustitución,

$$\mathbf{y}^{(p)\prime} = \mathbf{u}e^{-2t} - 2\mathbf{u}te^{-2t} - 2\mathbf{v}e^{-2t} = \mathbf{A}\mathbf{u}te^{-2t} + \mathbf{A}\mathbf{v}e^{-2t} + \mathbf{g}.$$

Al igualar los términos en te^{-2t} en ambos miembros se tiene $-2\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u}$. Por tanto, **u** es un eigenvector de **A** correspondiente a $\lambda = -2$; en consecuencia [ver (5)], $\mathbf{u}^{\mathsf{T}} = a[1 \;\; 1]$. Al igualar los otros términos se obtiene

$$\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \begin{bmatrix}-6\\2\end{bmatrix} \quad \text{o} \quad (\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{u} - \begin{bmatrix}-6\\2\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-6\\2\end{bmatrix};$$

en componentes,

$$-v_1 + v_2 = a + 6$$
$$v_1 - v_2 = a - 2.$$

Por lo tanto, $a = -2$ (para tener una solución) y entonces $v_2 = v_1 + 4$, por ejemplo, $v_1 = k$ y $v_2 = k + 4$; por consiguiente

$$\mathbf{v} = k\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$$

y simplemente puede escogerse $k = 0$. Se obtiene así la respuesta

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(h)} + \mathbf{y}^{(p)} = c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-4t} - 2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}te^{-2t} + \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}e^{-2t}. \tag{6}$$

Para otra k se obtiene otra $\mathbf{v}$; por ejemplo, de $k = -2$ se obtiene $\mathbf{v}^T = [-2 \quad 2]$, por lo que la respuesta queda como

$$(6^*) \qquad \mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t},$$

y así sucesivamente. ∎

Método de variación de parámetros

Este método puede aplicarse a sistemas lineales no homogéneos

$$(7) \qquad \boxed{\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)}$$

con $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ variable y $\mathbf{g}(t)$ general. De el se obtiene una solución particular $\mathbf{y}^{(p)}$ de (7) en algún intervalo J del eje t si se conoce una solución general

$$(8) \qquad \mathbf{y}^{(h)} = c_1\mathbf{y}^{(1)} + \cdots + c_n\mathbf{y}^{(n)}$$

del sistema homogéneo en J. En componentes, (8) es

$$\mathbf{y}^{(h)} = \begin{bmatrix} c_1y_1^{(1)} + \cdots + c_ny_1^{(n)} \\ \vdots \\ c_1y_n^{(1)} + \cdots + c_ny_n^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} & \cdots & y_1^{(n)} \\ & \vdots & \\ y_n^{(1)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c},$$

donde $\mathbf{Y}(t)$ es la matriz con columnas $\mathbf{y}^{(1)}, \cdots, \mathbf{y}^{(n)}$, los vectores de la base en (8), y $\mathbf{c}^T = [c_1 \cdots c_n]$ es constante. Como en la sección 2.10, el método consiste en sustituir el vector constante $\mathbf{c}$ por un vector variable $\mathbf{u}(t)$,

$$(9) \qquad \mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{u}(t)$$

y determinar $\mathbf{u}(t)$ sustituyendo $y^{(p)}$ en (7). Se obtiene así

$$(10) \qquad \mathbf{Y}'\mathbf{u} + \mathbf{Y}\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{u} + \mathbf{g}.$$

Ahora

$$\mathbf{y}^{(1)\prime} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(1)}, \qquad \mathbf{y}^{(2)\prime} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(2)}, \qquad \cdots, \qquad \mathbf{y}^{(n)\prime} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(n)}$$

ya que éstas son soluciones del sistema homogéneo. Estas n ecuaciones vectoriales pueden escribirse como una ecuación matricial sencilla $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$. En consecuencia, (10) se reduce a $\mathbf{Y}\mathbf{u}' = \mathbf{g}$. Ahora, $\mathbf{Y}$ es no singular porque las n soluciones de una base son linealmente independientes. Por lo tanto, $\mathbf{Y}^{-1}$ existe y puede resolverse

$$\mathbf{Y}\mathbf{u}' = \mathbf{g} \qquad \text{para obtener} \qquad \mathbf{u}' = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{g}.$$

Al integrar desde alguna t_0 en J hasta una t variable, se obtiene

$$\mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}^{-1}(\tilde{t})\mathbf{g}(\tilde{t})\, d\tilde{t} + \mathbf{C}.$$

Al dejar el vector constante $\mathbf{C}$ general se obtiene una solución general

$$\text{(11)} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{Yu} = \mathbf{YC} + \mathbf{Y}\int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}^{-1}(\tilde{t})\mathbf{g}(\tilde{t})\, d\tilde{t},$$

y para $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ esta es una solución particular (9) de (7).

EJEMPLO 3 Solución por el método de variación de parámetros

Para el sistema (4) del ejemplo 2, por (5) y (4) se tiene

$$\text{(12)} \qquad \mathbf{Y} = [\mathbf{y}^{(1)} \quad \mathbf{y}^{(2)}] = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

A partir estas expresiones y de (10) de la sección 4.0, se obtiene la inversa

$$\mathbf{Y}^{-1} = \frac{1}{-2e^{-6t}} \begin{bmatrix} -e^{-4t} & -e^{-4t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Esta expresión se multiplica por $\mathbf{g}$, obteniéndose

$$\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{g} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 \\ -8e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Ahora se integra. Al elegir el vector constante de integración como el vector cero, se obtiene

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} -2 \\ -4e^{2\tilde{t}} \end{bmatrix} d\tilde{t} = \begin{bmatrix} -2t \\ -2e^{2t} + 2 \end{bmatrix}.$$

A partir de esta expresión y de (12) se obtiene

$$\mathbf{Yu} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2t \\ -2e^{2t} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2te^{-2t} - 2e^{-2t} + 2e^{-4t} \\ -2te^{-2t} + 2e^{-2t} - 2e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2te^{-2t} - 2e^{-2t} \\ -2te^{-2t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-4t}.$$

El último término es una solución del sistema homogéneo, por lo que puede incorporarse en $\mathbf{y}^{(h)}$ y obtenerse como una solución general del sistema (4)

$$\text{(13)} \qquad \mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t},$$

resultado que concuerda con (6*). ∎

Método de diagonalización

La idea de este método es "desaparear" las n ecuaciones de un sistema lineal de tal modo que cada ecuación contenga solamente una de las funciones desconocidas y_1, $\cdots y_n$ y en consecuencia pueda resolverse independientemente de las otras ecuaciones. Esto funciona para sistemas

(14) $$\boxed{\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)}$$

para los cuales $\mathbf{A}$ tiene una base de eigenvectores $\mathbf{x}^{(1)}, \cdots, \mathbf{x}^{(n)}$. Puede demostrarse que entonces

(15) $$\boxed{\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}}$$

es una matriz diagonal con los eigenvalores $\lambda, \cdots, \lambda_n$ de $\mathbf{A}$ en la diagonal principal; aquí $\mathbf{X}$ es la matriz de $n \times n$ con columnas $\mathbf{x}^{(1)}, \cdots, \mathbf{x}^{(n)}$. (La demostración se encuentra en la sección 7.14.) Obsérvese que $\mathbf{X}^{-1}$ existe porque estas columnas son linealmente independientes. Así, en el ejemplo 2,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

(16) $$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$

como el lector puede comprobar.

Para aplicar la diagonalización a (14), se define la nueva función desconocida

(17) (a) $\mathbf{z} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{y}$. Entonces (b) $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{z}$.

Al sustituir esta expresión en (14) se tiene (¡nótese que $\mathbf{X}$ es constante!)

$$\mathbf{X}\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{z} + \mathbf{g}.$$

Esta ecuación se multiplica por la izquierda por $\mathbf{X}^{-1}$, obteniéndose

$$\mathbf{z}' = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{z} + \mathbf{h} \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{h} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{g}.$$

En virtud de (15), esta expresión puede escribirse

(18) $\mathbf{z}' = \mathbf{D}\mathbf{z} + \mathbf{h}$; en componentes, $z_j' = \lambda_j z_j + h_j$,

donde $j = 1, \cdots, n$. Ahora puede resolverse cada una de estas n ecuaciones lineales como en la sección 1.7 para obtener

$$z_j(t) = c_j e^{\lambda_j t} + e^{\lambda_j t}\int e^{-\lambda_j t} h_j(t)\, dt. \tag{19}$$

Estas son las componentes de $\mathbf{z}(t)$ y a partir de ellas se llega a la respuesta $\mathbf{y} = \mathbf{Xz}$ por (17b).

EJEMPLO 4 Método de diagonalización

Para el sistema (4) del ejemplo 2, por (5) y (4) [ver también (16)] se obtiene

$$\mathbf{h} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} \\ -4e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Puesto que los eigenvalores son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -4$, el sistema diagonalizado es

$$\mathbf{z}' = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \mathbf{h}, \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} z_1' &= -2z_1 - 2e^{-2t} \\ z_2' &= -4z_2 - 4e^{-2t}. \end{aligned}$$

Por (19) se obtienen las soluciones

$$z_1 = c_1 e^{-2t} - 2te^{-2t}, \qquad z_2 = c_2 e^{-4t} - 2e^{-2t}.$$

A partir de estas expresiones y de (17b) se obtiene la respuesta

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xz} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{-2t} - 2te^{-2t} \\ c_2 e^{-4t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-2t} - 2te^{-2t} + c_2 e^{-4t} - 2e^{-2t} \\ c_1 e^{-2t} - 2te^{-2t} - c_2 e^{-4t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Esta expresión es idéntica a (13) y (6*). ∎

Problemas de la sección 4.6

Encontrar una solución general de los siguientes sistemas lineales no homogéneos.

1. $y_1' = y_2 + 6e^{2t}$
$y_2' = y_1 - 3e^{2t}$

2. $y_1' = 4y_2$
$y_2' = 4y_1 + 2 - 16t^2$

3. $y_1' = -3y_1 + y_2 + 3\cos t$
$y_2' = y_1 - 3y_2 - 2\cos t - 3\,\mathrm{sen}\, t$

4. $y_1' = 4y_1 - 8y_2 + 2\cosh t$
$y_2' = 2y_1 - 6y_2 + \cosh t + 2\,\mathrm{senh}\, t$

5. $y_1' = y_2 - 5\,\mathrm{sen}\, t$
$y_2' = -4y_1 + 17\cos t$

6. $y_1' = -3y_1 - 4y_2 + 5e^t$
$y_2' = 5y_1 + 6y_2 - 6e^t$

Resolver los siguientes problemas con valor inicial.

7. $y_1' = 5y_2 + 23$, $y_2' = -5y_1 + 15t$ $\quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -2$

8. $y_1' = y_1 + 4y_2 - t^2 + 6t$, $y_2' = y_1 + y_2 - t^2 + t - 1$ $\quad y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = -1$

9. $y_1' = 4y_1 + 8y_2 + 2\cos t - 16\,\mathrm{sen}\,t$, $y_2' = 6y_1 + 2y_2 + \cos t - 14\,\mathrm{sen}\,t$ $\quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1.75$

10. $y_1' = -y_2 + \cos t - \mathrm{sen}\,t$, $y_2' = -y_1 + \cos t + \mathrm{sen}\,t$ $\quad y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = -6$

11. $y_1' = 5y_1 + 4y_2 - 5t^2 + 6t + 25$, $y_2' = y_1 + 2y_2 - t^2 + 2t + 4$ $\quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0$

12. $y_1' = 2y_1 + 3y_2 + 2e^{2t}$, $y_2' = y_1 + 4y_2 + 3e^{2t}$ $\quad y_1(0) = -2/3, \quad y_2(0) = 1/3$

Encontrar una solución general (corrientes) de la red de la figura 75, donde:

13. $R_1 = 1$ ohm, $R_2 = 4$ ohms, $L = 0.5$ henrys, $C = 1$ faradio, $E = 100$ volts.
14. $E = 220\,\mathrm{sen}\,t$ volts, los datos restantes como en el problema 13.
15. En el problema 13, encontrar la solución particular correspondiente a las corrientes y cargas cero cuando $t = 0$.
16. Encontrar las corrientes de la figura 76, donde $R_1 = 1$ ohm, $R_2 = 1.4$ ohms, $L_1 = 0.8$ henrys, $L_2 = 1$ henry, $E = 100$ volts e $I_1(0) = I_2(0) = 0$.

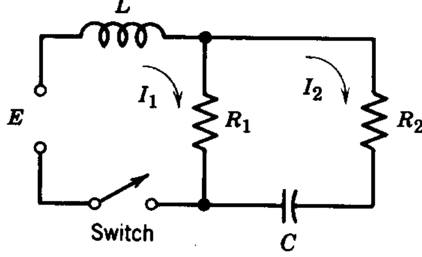


Figura 75. Problemas 13-15.

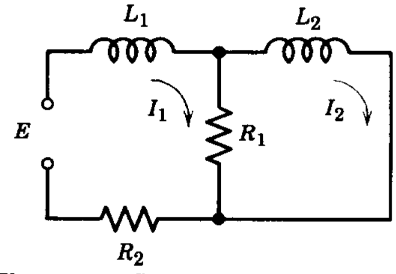


Figura 76. Problema 16.

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 4

1. Sin consultar el texto, escribir un sistema lineal general de primer orden de n ecuaciones diferenciales en n funciones desconocidas (i) en forma matricial y (ii) desarrollado.
2. Sin consultar el texto, convertir la ecuación de segundo orden $y'' + p(t)y' + g(t)y = 0$ en un sistema de ecuaciones de primer orden. Dar un ejemplo.
3. ¿Qué es el wronskiano de dos soluciones y qué papel desempeñó en este capítulo?
4. ¿Qué son los eigenvalores y los eigenvectores de una matriz? ¿Por qué fueron importantes en este capítulo?
5. ¿Qué es una base de eigenvectores? ¿Cómo se usó en una base de soluciones? ¿Qué puede hacerse si una matriz no tiene una base de eigenvectores?

6. ¿Qué se entiende por plano fase? ¿Por trayectoria en el plano fase? ¿Por punto crítico de un sistema?
7. ¿Qué forma tienen las trayectorias de un sistema cerca de un punto silla? ¿Cerca de un punto espiral? ¿Cerca de un centro? ¿Cerca de un nodo?
8. ¿Qué se entiende por linealización de un sistema y qué finalidad tiene?
9. ¿Qué son las oscilaciones autosostenidas? Escribir una ecuación diferencial correspondiente (tan simple como sea posible).
10. Hacer una lista y explicar los métodos para obtener soluciones particulares de sistemas lineales no homogéneos.

Encontrar una solución general de los siguientes sistemas y determinar el tipo y la estabilidad de los puntos críticos.

11. $y_1' = 2y_1 + 4y_2$, $y_2' = 3y_1 + y_2$
12. $y_1' = y_1 + 4y_2$, $y_2' = y_1 + y_2$
13. $y_1' = 4y_1 - 2y_2$, $y_2' = 13y_1 - 6y_2$
14. $y_1' = y_1 + y_2$, $y_2' = -6y_1 - 4y_2$

Determinar la localización y el tipo de todos los puntos críticos de las siguientes ecuaciones. (Linealizar los sistemas correspondientes.)

15. $y'' - y + y^3 = 0$
16. $y'' + \tan y = 0$
17. Resolver el problema 11 convirtiéndolo a una ecuación sencilla.
18. Si $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ tiene un punto silla en (0, 0), demostrar que $\mathbf{y}' = \mathbf{A}^2\mathbf{y}$ tiene un nodo inestable en (0, 0).
19. Si $\mathbf{A}$ en $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ tiene los eigenvalores –5 y 3, ¿qué tipo de punto crítico es (0, 0)?
20. Encontrar las corrientes de la figura 77, suponiendo que $R = 1$ ohm, $L = 1.25$ henrys, $C = 0.2$ faradios e $I_1(0) = I_2(0) = 1$ ampere.
21. Encontrar las corrientes de la figura 78, suponiendo que $R = 2.5$ ohms, $L = 1$ henry, $C = 0.04$ faradios, $E(t) = 169 \text{ sen } t$ volts e $I_1(0) = I_2(0) = 0$.
22. Encontrar las corrientes de la figura 78, suponiendo que $R = 1$ ohm, $L = 10$ henrys, $C = 1$ faradio, $E(t) = 100$ volts e $I_1(0) = I_2(0) = 0$.

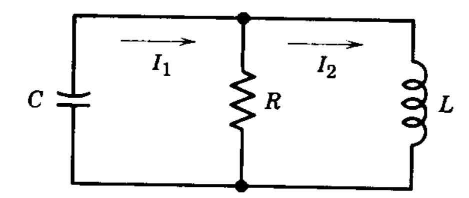


Figura 77. Red del problema 20.

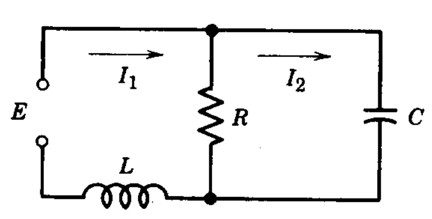


Figura 78. Red de los problemas 21 y 22.

23. El tanque T_1 de la figura 79 contiene inicialmente 100 gal de agua pura. El tanque T_2 contiene inicialmente 100 gal de agua en la que se disolvieron 90 lb de sal. El líquido se

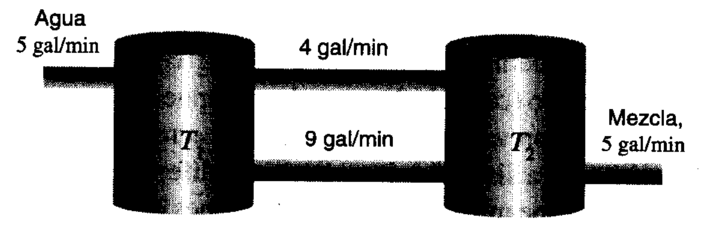


Figura 79. Tanques del problema 23

bombea por un sistema según se ilustra y las mezclas se mantienen uniformes por agitación. Encontrar las cantidades de sal $y_1(t)$ y $y_2(t)$ en T_1 y T_2, respectivamente.

24. Considérese una generalización de la ecuación de van der Pol, a saber,

$$y'' - \mu(1 - y^2 - \gamma^2 y'^2)y' + y = 0 \qquad (\gamma \text{ constante}).$$

Demostrar que esta ecuación describe oscilaciones autosostenidas. Encontrar la ecuación de las isoclinas. Comprobar que para $\gamma = 1$ la ecuación dada tiene la solución periódica $y = \text{sen } t$.

25. **(Ecuación de Rayleigh)** Demostrar que la llamada *ecuación de Rayleigh*

$$Y'' - \mu(1 - \tfrac{1}{3}Y'^2)Y' + Y = 0 \qquad (\mu > 0)$$

también describe oscilaciones autosostenidas y que al derivarla y hacer $y = Y'$ se obtiene la ecuación de van der Pol.

26. **(Ecuación de Duffing)** La ecuación de Duffing es

$$y'' + \omega_0^2 y + \beta y^3 = 0$$

donde $|\beta|$ por lo general es pequeño, caracterizando de este modo una desviación pequeña de la linealidad de la fuerza de restauración. $\beta > 0$ y $\beta < 0$ se conocen como los casos de un *resorte duro* y uno *suave*, respectivamente. Encontrar la ecuación de las curvas solución en el plano fase. (Para $\beta > 0$ todas estas curvas son cerradas.)

Encontrar una solución general de los siguientes sistemas no homogéneos.

27. $y_1' = 2y_1 + 3y_2 - 2e^{-t}$
$y_2' = -y_1 - 2y_2$

28. $y_1' = 2y_1 + 2y_2 + e^t$
$y_2' = -2y_1 - 3y_2 + e^t$

29. Resolver el problema con valor inicial

$$y_1' = -y_1 + 4y_2 + 6e^t - t + 11, \qquad y_1(0) = 4, \quad y_2(0) = 0.$$
$$y_2' = 3y_1 - 2y_2 - 6e^t + 3t - 6,$$

30. Encontrar una solución general de $y_1' = y_2 + t$, $y_2' = -y_1$ aplicando cada uno de los tres métodos discutidos en la sección 4.6.

Resumen del capítulo 4

Sistemas de ecuaciones diferenciales, plano fase, estabilidad

En tanto que los circuitos eléctricos sencillos o los sistemas masa-resorte sencillos están gobernados por ecuaciones diferenciales sencillas en calidad de modelo matemático (capítulo 2), las redes compuestas por varios circuitos, los sistemas mecánicos con varias masas y resortes y otros problemas de interés para la ingeniería llevan a **sistemas de ecuaciones diferenciales** (sección 4.1) en los que se trata simultáneamente con varias funciones desconocidas, las cuales representan

las corrientes en los diferentes circuitos, los desplazamientos de esas masas, etc. De interés central son los sistemas de primer orden (sección 4.2)

$$y_1' = f_1(t, y_1, \cdots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$y_n' = f_n(t, y_1, \cdots, y_n),$$

a los cuales pueden reducirse las ecuaciones y los sistemas de órdenes superiores. Para simplificar, en este resumen se hace $n = 2$; por tanto,

(1) $$y_1' = f_1(t, y_1, y_2)$$
$$y_2' = f_2(t, y_1, y_2).$$

(Las fórmulas correspondientes para n general y algunas ideas y conceptos teóricos se incluyen en las secciones 4.2 y 4.3.) Un **sistema lineal** es de la forma

(2') $$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1$$
$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2;$$

en forma vectorial

(2) $$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \text{donde} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}.$$

Un **sistema lineal homogéneo** es de la forma

(3) $$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad \text{desarrollada} \qquad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{aligned}$$

Los sistemas (3) con $a_{11}, \cdots, a_{22}$ tienen soluciones $\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\lambda t} \neq \mathbf{0}$ donde λ son las soluciones de la ecuación cuadrática (sección 4.3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

y vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ con componentes x_1, x_2 determinadas en una constante multiplicativa por

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0$$

(las matrices de 2×2 que se necesitan aquí se explican en la sección 4.0.)

Al plano y_1y_2 se le llama el **plano fase**. Una **trayectoria** es la curva de una solución $y_1(t)$, $y_2(t)$ en el plano fase. Un **punto crítico** P: (y_1, y_2) de un sistema (1) [o (2)] es aquél en el que los segundos miembros del sistema son ambos cero. Dependiendo del comportamiento de las trayectorias cerca de P éste recibe el nombre de **nodo, punto silla, centro** o **punto espiral** y los puntos críticos se clasifican también en términos de **estabilidad** (secciones 4.3, 4.4). Para sistemas no lineales esto se hace por linealización (sección 4.5). Los métodos del plano fase se aplican principalmente a **sistemas autónomos**, es decir, a sistemas en los que t no está presente explícitamente. Son cualitativos y revelan una cantidad sorprendentemente grande de información, en particular sobre ecuaciones y sistemas no lineales que no pueden resolverse analíticamente. Aplicaciones al famoso péndulo y las ecuaciones de van der Pol se presentan en la sección 4.5.

Los métodos para resolver los sistemas lineales no homogéneos se discuten en la sección 4.6.

Capítulo

5

Soluciones en series de potencias de las ecuaciones diferenciales. Funciones especiales

En el capítulo 2 se vio que una ecuación diferencial lineal homogénea cuyos coeficientes son *constantes* puede resolverse por métodos algebraicos y que las soluciones son funciones elementales conocidas por cálculo diferencial e integral. Sin embargo, si dichos coeficientes no son constantes sino que dependen de x, la situación es más complicada y las soluciones pueden ser funciones no elementales. La **ecuación de Legendre** (sección 5.3), la **ecuación hipergeométrica** (sección 5.4) y la **ecuación de Bessel** (sección 5.5) son de este tipo. Puesto que estas y otras ecuaciones y sus soluciones desempeñan un papel importante en las matemáticas aplicadas, se dedica un capítulo completo a dos métodos estándares para encontrar las soluciones y a sus aplicaciones: el **método de las series de potencias** (secciones 5.1, 5.2), con el que se obtienen soluciones en la forma de series de potencias, y una ampliación del mismo, conocido como el **método de Frobenius** (sección 5.4).

Esto ofrecerá asimismo al estudiante la oportunidad de familiarizarse con los métodos y las técnicas sobre **funciones especiales**, es decir, las "funciones trascendentes superiores" (de gran importancia práctica, pero no consideradas en los cursos de cálculo elemental), y algunas de sus propiedades. Entre éstas se incluirá la **teoría de Sturm-Liouville** (secciones 5.8, 5.9) basada en la **ortogonalidad de las funciones**, una idea cuya importancia para la física matemática y sus aplicaciones en la ingeniería difícilmente puede sobreestimarse.

COMENTARIO. Este capítulo también puede estudiarse inmediatamente después del capítulo 2 pues no hace uso del material estudiado en los capítulos 3 y 4.

Prerrequisitos para este capítulo: Capítulo 2.
Secciones que pueden omitirse en un curso más corto: 5.2, 5.6-5.9.
Bibliografía: Apéndice 1, parte A.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

5.1 MÉTODO DE LAS SERIES DE POTENCIAS

El **método de las series de potencias** es el procedimiento básico estándar usado para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes ***variables***. Da las soluciones en la forma de series de potencias; de ahí su nombre. Estas series pueden usarse para calcular valores de las soluciones, para explorar sus propiedades y para deducir otro tipo de representaciones de dichas soluciones, como se verá más adelante. En esta sección se empieza explicando e ilustrando la idea básica del método.

Series de potencias

Se recuerda primero del cálculo que una **serie de potencias**[1] (en potencias de $x - x_0$) es una serie infinita de la forma

$$(1) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots .$$

$a_0, a_1, a_2, \cdots$ son constantes, llamadas los **coeficientes** de la serie. x_0 es una constante, llamada el **centro** de la serie y x es una variable.

Si en particular $x_0 = 0$, se obtiene una *serie de potencias en potencias de x*

$$(2) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots .$$

En esta sección se supondrá que todas las variables y las constantes son reales.

Ejemplos conocidos de series de potencias son las series de Maclaurin

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \cdots \qquad (|x| <, \textit{ serie geométrica}),$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots ,$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots ,$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots .$$

---

[1] El término "series de potencias" sólo se refiere generalmente a series de la forma (1), pero no incluye series de potencias negativas de x tales como $a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \cdots$ o series en las que intervienen potencias fraccionarias de x. Obsérvese que en (1) se escribió, por conveniencia $(x - x_0)^0 = 1$, aun cuando $x = x_0$.

Se usa la letra *m* para denotar la suma, reservando *n* como una notación estándar para los parámetros en las ecuaciones de Legendre y Bessel para valores enteros.

Idea del método de las series de potencias

La idea del método de las series de potencias para resolver ecuaciones diferenciales es simple y natural. Se empieza describiendo el procedimiento práctico y se ilustra con ecuaciones simples cuyas soluciones ya se conocen, con el fin de ver lo que está ocurriendo. La justificación matemática del método se presenta en la siguiente sección.

Para una ecuación dada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

se representan primero $p(x)$ y $q(x)$ por series de potencias en potencias de x (o de $x - x_0$ si se desea obtener soluciones en potencias de $x - x_0$). En muchas ocasiones, $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y entonces no es necesario hacer nada en el primer paso. Después se supone una solución en la forma de una serie de potencias con coeficientes desconocidos

$$(3) \qquad y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

y esta serie y la obtenida al derivar término a término,

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad y' = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \\ &\text{(b)} \quad y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \cdots \end{aligned}$$

se introducen en la ecuación. A continuación se agrupan las potencias semejantes de x y la suma de los coeficientes de cada potencia de x que se presente se iguala a cero, empezando con los términos constantes, los términos que incluyen a x, los términos que incluyen a x^2, etc. Se obtienen así relaciones a partir de las cuales es posible determinar de manera sucesiva los coeficientes desconocidos en (3).

El procedimiento se ilustra para algunas ecuaciones simples que también pueden resolverse por métodos elementales.

EJEMPLO 1 Resolver

$$y' - y = 0.$$

Solución. En el primer paso, se insertan (3) y (4a) en la ecuación:

$$(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = 0.$$

Después se agrupan las potencias iguales de x, encontrándose

$$(a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots = 0.$$

Al igualar a cero el coeficiente de cada potencia de x se tiene

$$a_1 - a_0 = 0, \qquad 2a_2 - a_1 = 0, \qquad 3a_3 - a_2 = 0, \cdots .$$

Al resolver estas ecuaciones, $a_1, a_2, \cdots$ pueden expresarse en términos de a_0, la cual sigue siendo arbitraria:

$$a_1 = a_0, \qquad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2!}, \qquad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!}, \cdots .$$

Con estos coeficientes la serie (3) queda como

$$y = a_0 + a_0 x + \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0}{3!}x^3 + \cdots,$$

y se ve que se ha llegado a la conocida solución general

$$y = a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = a_0 e^x.$$

EJEMPLO 2 Resolver

$$y' = 2xy.$$

Solución. Se introducen (3) y (4a) en la ecuación:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = 2x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots).$$

Es necesario hacer la multiplicación por $2x$ en el segundo miembro y se escribe la ecuación resultante en la forma conveniente

$$\begin{aligned} &a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + \cdots \\ = \quad &2a_0 x + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + 2a_3 x^4 + 2a_4 x^5 + \cdots . \end{aligned}$$

A partir de esta expresión se ve que

$$a_1 = 0, \qquad 2a_2 = 2a_0, \qquad 3a_3 = 2a_1, \qquad 4a_4 = 2a_2, \qquad 5a_5 = 2a_3, \qquad \cdots .$$

Por tanto, $a_3 = 0$, $a_5 = 0, \cdots$ y para los coeficientes con subíndice par,

$$a_2 = a_0, \qquad a_4 = \frac{a_2}{2} = \frac{a_0}{2!}, \qquad a_6 = \frac{a_4}{3} = \frac{a_0}{3!}, \cdots ;$$

donde a_0 sigue siendo arbitraria. Con estos coeficientes la serie (3) queda como

$$y = a_0\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots\right) = a_0 e^{x^2}.$$

Comprobar esta solución aplicando el método de separación de variables. ∎

EJEMPLO 3 Resolver

$$y'' + y = 0.$$

Solución. Al introducir (3) y (4b) en la ecuación se obtiene

$$(2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \cdots) + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = 0.$$

Al agrupar las potencias iguales de x se encuentra

$$(2a_2 + a_0) + (3 \cdot 2a_3 + a_1)x + (4 \cdot 3a_4 + a_2)x^2 + \cdots = 0.$$

Al igualar a cero el coeficiente de cada potencia de x se encuentra

$$2a_2 + a_0 = 0 \qquad \text{coeficiente de } x^0$$
$$3 \cdot 2a_3 + a_1 = 0 \qquad \text{coeficiente de } x^1$$
$$4 \cdot 3a_4 + a_2 = 0 \qquad \text{coeficiente de } x^2$$

etc. Al resolver estas ecuaciones se ve que $a_2, a_4, \cdots$ pueden expresarse en términos de a_0 y que $a_3, a_5, \cdots$ pueden expresarse en términos de a_1:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2!}, \qquad a_3 = -\frac{a_1}{3!}, \qquad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4!}, \cdots;$$

a_0 y a_1 son arbitrarias. Con estos coeficientes la serie (3) queda como

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 + \cdots.$$

Esta expresión puede escribirse

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots\right)$$

y se reconoce la conocida solución general

$$y = a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x.$$ ∎

¿Se necesita el método de las series de potencias para ecuaciones como éstas y similares? Desde luego que no; se usó tan sólo para explicar el método. Pero, ¿qué ocurre cuando se aplica el método a una ecuación de un tipo diferente a las consideradas en el capítulo 2, incluso a una de apariencia inocente como $y'' + xy = 0$ ("ecuación de Airy")? Seguramente se terminaría con nuevas funciones dadas por series de potencias. Y si una ecuación como ésta y sus soluciones son de interés práctico (o teórico), reciben nombres particulares y se investigan en profundidad. Así sucedió con las ecuaciones hipergeométricas de Legendre, de Bessel y de Gauss, por citar sólo las más destacadas. Sin embargo, antes de discutir estas ecuaciones de suma importancia deberá explicarse en mayor detalle el método de las series de potencias (y una extensión del mismo).

Problemas de la sección 5.1

Aplicar el método de las series de potencias a las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $y' = 2y$ **2.** $y' + y = 0$ **3.** $y' = ky$
4. $(1 - x)y' = y$ **5.** $(x + 1)y' = 3y$ **6.** $(1 + x)y' + y = 0$
7. $y' + 2xy = 0$ **8.** $y' = 3x^2y$ **9.** $y'' - y = 0$
10. $y'' + 4y = 0$ **11.** $y'' - y' = 0$ **12.** $y'' - 9y = 0$

(En los problemas de la sección 5.2 se incluyen más ecuaciones de este tipo.)

5.2 TEORÍA DEL MÉTODO DE LAS SERIES DE POTENCIAS

En la sección anterior se vio que con el método de las series de potencias se obtienen soluciones de ecuaciones diferenciales en la forma de series de potencias. En esta sección primero se hace un repaso del cálculo en cuanto a algunos hechos importantes sobre las series de potencias, después se enlistan las operaciones con series de potencias que se necesitan en el método (derivación, adición, multiplicación, etc.) y se termina con algunos comentarios acerca de la existencia de soluciones de las series de potencias.

Conceptos básicos

Se recuerda del cálculo que una **serie de potencias** es una serie infinita de la forma

$$(1) \qquad \boxed{\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots .}$$

Como anteriormente, se supone que la variable x, el **centro** x_0 y los **coeficientes** $a_0, a_1, \cdots$ son reales. La ***n*-ésima suma parcial** de (1) es

$$(2) \qquad s_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n,$$

donde $n = 0, 1, \cdots$. Evidentemente, si se omiten los términos de s_n de (1), la expresión que queda es

$$(3) \qquad R_n(x) = a_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x-x_0)^{n+2} + \cdots .$$

Esta expresión recibe el nombre de **residuo** *de* (1) *después del término* $a_n(x-x_0)^n$.

Por ejemplo, en el caso de la serie geométrica

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

se tiene

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, & R_0 &= x + x^2 + x^3 + \cdots, \\ s_1 &= 1 + x, & R_1 &= x^2 + x^3 + x^4 + \cdots, \\ s_2 &= 1 + x + x^2, & R_2 &= x^3 + x^4 + x^5 + \cdots, \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

De este modo se tiene ahora a (1) asociada con la sucesión de las sumas parciales $s_0(x), s_1(x), s_2(x), \cdots$. Si para alguna $x = x_1$ esta sucesión converge, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_1) = s(x_1),$$

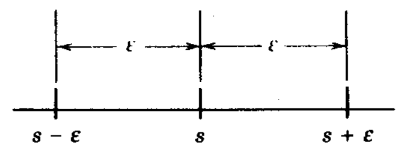


Figura 80. Desigualdad (5).

entonces se dice que la serie (1) es **convergente** *en* $x = x_1$ y que el número $s(x_1)$ es el **valor** o *suma* de (1) en x_1, y se escribe

$$s(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x_1 - x_0)^m.$$

Entonces para cada n se tiene

$$(4) \qquad s(x_1) = s_n(x_1) + R_n(x_1).$$

Si la sucesión diverge en $x = x_1$, se dice que la serie (1) es **divergente** en $x = x_1$.

En el caso de convergencia, para cualquier ϵ positivo existe N (que depende de ϵ) tal que, por (4),

$$(5) \qquad |R_n(x_1)| = |s(x_1) - s_n(x_1)| < \epsilon \qquad \text{para toda } n > N.$$

Geométricamente, esto significa que toda $s_n(x_1)$ con $n > N$ está entre $s - \epsilon$ y $s + \epsilon$ (figura 80). En términos prácticos, esto significa que en el caso de convergencia es posible aproximar la suma $s(x_1)$ de (1) mediante $s_n(x_1)$, con la precisión que se desee, tomando una n suficientemente grande.

Intervalo de convergencia. Radio de convergencia

1. La serie (1) converge siempre en $x = x_0$ porque entonces todos sus términos salvo el primero, a_0, son cero. En casos excepcionales ésta puede ser la única x para la que (1) converge. Tales series no son de interés práctico.

2. Si hay más valores de x para los que la serie converge, estos valores forman un intervalo, llamado el **intervalo de convergencia**. Si este intervalo es finito, tiene el punto medio x_0, por lo que es de la forma

$$(6) \qquad |x - x_0| < R \qquad \text{(Figura 81)}$$

Divergencia — Convergencia — Divergencia
R R
$x_0 - R$ x_0 $x_0 + R$

Figura 81. Intervalo de convergencia (6) de una serie de potencias con centro x_0.

y la serie (1) converge para toda x tal que $|x - x_0| < R$ y diverge para toda x tal que $|x - x_0| > R$. El número R se llama el **radio**[2] **de convergencia** de (1). Puede obtenerse con cualquiera de las fórmulas

$$(7) \qquad \text{(a)} \quad R = 1 \Big/ \lim_{m \to \infty} \sqrt[m]{|a_m|} \qquad \qquad \text{(b)} \quad R = 1 \Big/ \lim_{m \to \infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|$$

siempre que estos límites existan y sean diferentes de cero. [Si son infinitos, entonces (1) sólo converge en el centro x_0.]

3. En ocasiones el intervalo de convergencia puede ser infinito, es decir, (1) converge para toda x. Por ejemplo, si el límite en (7a) o (7b) es cero, se presenta este caso. Entonces se escribe $R = \infty$, por conveniencia. (Las demostraciones de los hechos citados pueden encontrarse en la sección 14.2.)

Para cada x para la que (1) converge, tiene un valor específico $s(x)$. Se dice que (1) **representa** a la función $s(x)$ en el intervalo de convergencia y se escribe

$$s(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \qquad (|x - x_0| < R).$$

Se ilustran a continuación las tres posibilidades mediante ejemplos típicos.

EJEMPLO 1 El inservible Caso 1 de convergencia sólo en el centro

En el caso de la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} m!\, x^m = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \cdots$$

se tiene $a_m = m!$, y en (7b),

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{(m+1)!}{m!} = m + 1 \to \infty \qquad \text{cuando } m \to \infty.$$

Por tanto, esta serie sólo converge en el centro $x = 0$. Una serie como ésta carece de utilidad. ∎

EJEMPLO 2 Caso 2. La serie geométrica

Para la **serie geométrica** se tiene

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \cdots \qquad (|x| < 1).$$

De hecho, $a_m = 1$ para toda m y por (7) se obtiene $R = 1$, es decir, la serie geométrica converge y representa $1/(1-x)$ cuando $|x| < 1$. ∎

[2] Porque para una serie de potencias *compleja* se tiene la convergencia en un disco abierto de *radio R*. Cuando $x - x_0 = R$ o $-R$ no es posible hacer una afirmación general en cuanto a la convergencia o divergencia de la serie.

EJEMPLO 3 Caso 3

En el caso de la serie

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

se tiene $a_m = 1/m!$. Por tanto en (7b),

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{1/(m+1)!}{1/m!} = \frac{1}{m+1} \rightarrow 0 \qquad \text{cuando } m \rightarrow \infty,$$

por lo que la serie converge para toda x. ∎

EJEMPLO 4 Sugerencia para algunos de los problemas

Encontrar el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{8^m} x^{3m} = 1 - \frac{x^3}{8} + \frac{x^6}{64} - \frac{x^9}{512} + - \cdots .$$

Solución. Esta es una serie en potencias de $t = x^3$ con coeficientes $a_m = (-1)^m/8^m$, de donde en (7b),

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \frac{8^m}{8^{m+1}} = \frac{1}{8}.$$

En consecuencia, $R = 8$. Por tanto, la serie converge para $|t| < 8$, es decir, para $|x| < 2$. ∎

Operaciones con series de potencias

En el método de las series de potencias se derivan, suman y multiplican series de potencias. Estas tres operaciones son permisibles, en el sentido explicado a continuación. Se cita asimismo una condición relacionada con la cancelación de todos los coeficientes de una serie de potencias, la cual constituye una herramienta básica del método de las series de potencias. (Las demostraciones pueden encontrarse en la sección 14.3.)

Derivación término a término

Una serie de potencias puede derivarse término a término. De modo más preciso: si

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$$

converge para $|x - x_0| < R$, donde $R > 0$, entonces la serie obtenida al derivar término a término también converge para esas x y representa la derivada y' de y para esas x, es decir,

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (x - x_0)^{m-1} \qquad (|x - x_0| < R).$$

De manera similar,

$$y''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m(x-x_0)^{m-2} \qquad (|x-x_0|<R),$$

y así sucesivamente.

Adición término a término

Dos series de potencias pueden sumarse término a término. De modo más preciso: si las series

$$(8) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m \qquad \text{y} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-x_0)^m$$

tienen radios de convergencia positivos y sus sumas son $f(x)$ y $g(x)$, entonces la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_m)(x-x_0)^m$$

converge y representa $f(x) + g(x)$ para toda x que esté en el interior del intervalo de convergencia de cada una de las series dadas.

Multiplicación término a término

Dos series de potencias pueden multiplicarse término a término. De modo más preciso: Suponer que las series (8) tienen radios de convergencia positivos y sean $f(x)$ y $g(x)$ sus sumas. Entonces la serie obtenida al multiplicar cada término de la primera serie por cada término de la segunda serie y al agrupar las potencias iguales de $x - x_0$, es decir,

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_0b_m + a_1b_{m-1} + \cdots + a_mb_0)(x-x_0)^m$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(x-x_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)(x-x_0)^2 + \cdots$$

converge y representa $f(x)g(x)$ para toda x en el interior del intervalo de convergencia de cada una de las series dadas.

Cancelación de todos los coeficientes

Si una serie de potencias tiene un radio de convergencia positivo y una suma que sea una identidad con cero en todo el intervalo de convergencia, entonces cada coeficiente de la serie es cero.

Cambio de los índices de la sumatoria

Es este un recurso que técnicamente se explica mejor en términos de ejemplos típicos. El índice de una sumatoria es una variable muda y puede cambiarse; por ejemplo,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{3^m m^2}{m!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k^2}{k!} = 3 + 18 + \frac{81}{2} + \cdots .$$

Es posible "cambiar" el índice de la sumatoria; por ejemplo, si se hace $m = s + 2$, entonces $s = m - 2$ y

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} = \sum_{s=0}^{\infty} (s+2)(s+1)a_{s+2}x^s$$
$$= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots .$$

Esto es necesario, por ejemplo, para expresar la suma de dos series como una sola. Por ejemplo, la suma

$$x^2 \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} + 2\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1}$$
$$= x^2(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots) + 2(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots)$$

se expresa como una sola serie introduciendo primero x^2 en la sumatoria

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)x^m + \sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m x^{m-1},$$

y haciendo $m = s$ y $m - 1 = s$, respectivamente, para obtener

$$\sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)a_s x^s + \sum_{s=0}^{\infty} 2(s+1)a_{s+1}x^s,$$

donde $s = 2$ puede sustituirse por $s = 0$ (¿por qué?), por lo que se tiene

$$\sum_{s=0}^{\infty} [s(s-1)a_s + 2(s+1)a_{s+1}]x^s$$
$$= 2a_1 + 4a_2 x + (2a_2 + 6a_3)x^2 + (6a_3 + 8a_4)x^3 + \cdots .$$

Existencia de las soluciones en series de potencias. Funciones analíticas reales

Las propiedades de las series de potencias que acaban de discutirse constituyen la base del método del mismo nombre. La pregunta que queda por responder es si una

ecuación puede tener soluciones en series de potencias. La respuesta es simple: Si los coeficientes p y q y la función r del segundo miembro de

$$(9) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

tienen representaciones en series de potencias, entonces (9) tiene soluciones en series de potencias. Se cumple lo mismo si $\tilde{h}$, $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ y $\tilde{r}$ en

$$(10) \qquad \tilde{h}(x)y'' + \tilde{p}(x)y' + \tilde{q}(x)y = \tilde{r}(x)$$

tienen representaciones en series de potencias y $\tilde{h}(x_0) \neq 0$ (donde x_0 es el centro de la serie). En la práctica, casi todas las ecuaciones tienen polinomios como coeficientes (reducibles por tanto a series de potencias), por lo que (cuando $r(x) \equiv 0$ o es a su vez una serie de potencias) dichas condiciones se satisfacen, con la posible excepción de $\tilde{h}(x_0) \neq 0$, un hecho que será considerado en secciones posteriores.

Para formular lo anterior de una manera simple y precisa, se usa el siguiente concepto (que es de interés general).

Definición de función analítica real

Una función real $f(x)$ se llama **analítica** *en un punto* $x = x_0$ si puede representarse por una serie de potencias en potencias de $x - x_0$ con radio de convergencia $R > 0$.

Con esto se tiene el ∎

Teorema 1 (Existencia de las soluciones en series de potencias)

Si p, q y r en (9) *son analíticas en $x = x_0$, entonces toda solución de* (9) *es analítica en $x = x_0$ y en consecuencia puede representarse por una serie de potencias en potencias de $x - x_0$ con radio de convergencia*[3] $R > 0$.

Por tanto, se cumple lo mismo si $\tilde{h}$, $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ y $\tilde{r}$ en (10) *son analíticas en $x = x_0$ y* $\tilde{h}(x_0) \neq 0$.

La demostración de este teorema requiere de métodos avanzados de análisis complejo y puede encontrarse en la referencia [A6] del apéndice 1.

Problemas de la sección 5.2

Aplicar el método de las series de potencias a las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $xy' = 3y + 3$

2. $(x - 3)y' - xy = 0$

3. $y' = 2xy$

4. $(1 - x^4)y' = 4x^3y$

5. $(x + 1)y' - (2x + 3)y = 0$

6. $y'' - y = x$

7. $y'' - 3y' + 2y = 0$

8. $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$

9. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

10. $y'' - xy' + y = 0$

---

[3] R es al menos igual a la distancia entre el punto $x = x_0$ y el punto (o puntos) más próximos a $x = x_0$ en el (los) que una de las funciones p, q, r, *como funciones de una variable compleja*, no es analítica. (Obsérvese que ese punto puede no estar en el eje x, sino en algún sitio del plano complejo.)

11. Demostrar que $y' = (y/x) + 1$ no puede resolverse para y como una serie de potencias en x. Resolver esta ecuación para y como una serie de potencias en potencias de $x - 1$. (*Sugerencia.* Introducir $t = x - 1$ como nueva variable independiente y resolver la ecuación resultante para y como una serie de potencias en t.) Comparar el resultado con el obtenido con el método elemental apropiado.

Resolver para y como una serie de potencias en potencias de $x - 1$:

12. $y' = ky$ **13.** $y'' + y = 0$ **14.** $y'' - y = 0$

Radio de convergencia. Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series.

15. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{3^m}$ **16.** $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m}$ **17.** $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$

18. $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{m(m-1)}{3^m} x^m$ **19.** $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{k^m} x^{2m}$ **20.** $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$

21. $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{7}{5}\right)^m x^{2m}$ **22.** $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{5^m} (x-5)^m$ **23.** $\sum_{m=0}^{\infty} m^{2m} x^m$

24. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^m m^2} (x+1)^m$ **25.** $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} (x-1)^{2m}$ **26.** $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(3m)!}{(m!)^3} x^m$

27. **(Cambio del índice de la sumatoria)** Demostrar que

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} = \sum_{j=1}^{\infty} (j+1)ja_{j+1}x^{j-1} = \sum_{s=0}^{\infty} (s+2)(s+1)a_{s+2}x^s.$$

Cambio del índice de la sumatoria. Cambiar el índice de tal modo que la potencia dentro del signo de sumatoria sea x^m. Comprobar el resultado escribiendo explícitamente los primeros términos. Determinar también el radio de convergencia.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n} x^{n+2}$ **29.** $\sum_{s=2}^{\infty} \frac{s(s+1)}{s^2+1} x^{s-1}$ **30.** $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{6^k} x^{k-3}$

5.3 ECUACIÓN DE LEGENDRE. POLINOMIOS DE LEGENDRE $P_n(X)$

Los ejemplos y problemas considerados hasta este punto se incluyeron con la intención de adquirir confianza con el método de las series de potencias así como para obtener habilidad en la aplicación práctica del mismo, pero, desde luego, esas ecuaciones podrían resolverse por otros métodos (para hacer posible la comparación de los resultados). Se considera ahora la primera "gran" ecuación de la física, la **ecuación diferencial de Legendre**[4]

$$(1) \qquad \boxed{(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0}$$

[4] ADRIEN MARIE LEGENDRE (1752-1833), matemático francés, fue nombrado profesor en París en 1775 y realizó importantes aportaciones en las funciones especiales, las integrales elípticas, la teoría de números y el cálculo de variaciones. Su libro *Éléments de géométrie* (1794) fue muy famoso y tuvo 12 ediciones en menos de 30 años.

Las fórmulas de las funciones de Legendre se incluyen en las referencias [1], [6] y [10].

que ocurre en numerosos problemas, principalmente en los que presentan simetría esférica (por ejemplo, en electrostática —léanse las primeras líneas de la sección 11.12). El parámetro n en (1) es un número real dado. A las soluciones de (1) se les llama **funciones de Legendre**. Se trata de funciones nuevas; pertenecen a lo que se conoce como **"funciones especiales"**, que quiere decir funciones superiores, por oposición a las funciones senoidales, cosenoidales, logarítmicas, etc., estudiadas en el cálculo elemental. (En las secciones siguientes se presentan otras funciones especiales.)

Se observa que los coeficientes de (1) son analíticos en $x = 0$ (se trata de polinomios muy especiales) y que $\tilde{h}(x) = 1 - x^2 \neq 0$ en $x = 0$. Por tanto, por el teorema 1 de la sección 5.2, toda solución de (1) es alguna serie de potencias

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m. \tag{2}$$

Al sustituir (2) y sus derivadas en (1) y al denotar por k la constante $n(n + 1)$, se obtiene

$$(1 - x^2) \sum_{m=2}^{\infty} m(m - 1)a_m x^{m-2} - 2x \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + k \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0.$$

Al escribir la primera expresión como dos series separadas, se llega a la ecuación

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{\infty} m(m - 1)a_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m - 1)a_m x^m \\ - 2 \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^m + k \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0, \end{aligned} \tag{1*}$$

que al desarrollarse queda como

$$\begin{aligned} &2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \cdots + (s + 2)(s + 1)a_{s+2}x^s + \cdots \\ &\qquad\qquad - 2 \cdot 1a_2x^2 - \cdots \qquad\qquad - s(s - 1)a_sx^s - \cdots \\ &\qquad - 2 \cdot 1a_1x - 2 \cdot 2a_2x^2 - \cdots \qquad\qquad - 2sa_sx^s - \cdots \\ &+ ka_0 + \quad ka_1x + \quad ka_2x^2 + \cdots \qquad\qquad + ka_sx^s + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Puesto que esta expresión debe formar una identidad en x para que (2) sea una solución de (1), la suma de los coeficientes de cada potencia de x debe ser cero; como $k = n(n + 1)$, se obtiene así

$$\begin{aligned} 2a_2 + n(n + 1)a_0 &= 0, \qquad \text{coeficientes de } x^0 \\ 6a_3 + [-2 + n(n + 1)]a_1 &= 0, \qquad \text{coeficientes de } x^1 \end{aligned} \tag{3a}$$

y en general, cuando $s = 2, 3, \cdots$,

(3b) $$(s+2)(s+1)a_{s+2} + [-s(s-1) - 2s + n(n+1)]a_s = 0.$$

Ahora la expresión de los corchetes $[\cdots]$ puede escribirse $(n-s)(n+s+1)$, como el estudiante puede comprobar con facilidad. Así, de (3) se obtiene

(4) $$a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}a_s \qquad (s = 0, 1, \cdots).$$

Esta ecuación se conoce como **relación o fórmula de recurrencia**. Con ella se obtiene cada coeficiente en términos del segundo que lo precede, con excepción de a_0 y a_1, los cuales se dejan como constantes arbitrarias. Se encuentra sucesivamente

$$a_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}a_0 \qquad a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1$$

$$a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{4\cdot 3}a_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0 \qquad a_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{5\cdot 4}a_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1$$

etc. Al insertar estos valores de los coeficientes en (2) se obtiene

(5) $$y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x)$$

donde

(6) $$y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - + \cdots$$

y

(7) $$y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - + \cdots.$$

Estas series convergen para $|x| < 1$ (ver el problema 5; o pueden no ser finitas; ver más adelante). Puesto que (6) sólo contiene potencias pares de x, en tanto que (7) sólo contiene potencias impares de x, el cociente y_1/y_2 no es una constante, por lo que y_1 y y_2 no son proporcionales y, por lo tanto, son soluciones linealmente independientes. En consecuencia, (5) es una solución general de (1) en el intervalo $-1 < x < 1$.

Si n es un entero no negativo, entonces y_1 o y_2 se reduce a un polinomio (y el otro polinomio de las dos soluciones queda como un polinomio multiplicado por $\ln[(1+x)/(1-x)]$, como puede demostrarse). Se ilustra lo anterior para los casos más sencillos.

EJEMPLO 1 Funciones de Legendre para $n = 0$

Si $n = 0$, entonces de (6) se obtiene $y_1(x) = 1$, el "polinomio de Legendre" más simple (ver más adelante) y de (7) se obtiene

$$y_2(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{(-3)(-1)\cdot 2\cdot 4}{5!}x^5 + \cdots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

El estudiante puede comprobar el resultado resolviendo la ecuación de Legendre $(1-x^2)z' - 2xz = 0$, $z = y'$ por separación de variables.

EJEMPLO 2 Funciones de Legendre para $n = 1$

Si $n = 1$, entonces de (7) se obtiene $y_2(x) = x$, el siguiente "polinomio de Legendre" y de (6) se obtiene

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{5} - \cdots$$

$$= 1 - x\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) = 1 - \frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x}.$$ ■

Polinomios de Legendre

En muchas aplicaciones el parámetro n de la ecuación de Legendre será un entero no negativo. Entonces el segundo miembro de (4) es cero cuando $s = n$ y, por lo tanto, $a_{n+2} = 0$, $a_{n+4} = 0$, $a_{n+6} = 0, \cdots$. Por consiguiente, si n es par, $y_1(x)$ se reduce a un polinomio de grado n. Si n es impar, se cumple lo mismo para $y_2(x)$. Estos polinomios, multiplicados por algunas constantes, se llaman **polinomios de Legendre**. Puesto que son de gran importancia práctica se consideran en mayor detalle. Para ello se resuelve (4) para a_s, obteniéndose

$$a_s = -\frac{(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)}a_{s+2} \qquad (s \leqq n-2) \tag{8}$$

y entonces todos los coeficientes que no se cancelan pueden expresarse en términos de los coeficientes a_n de la mayor potencia de x en el polinomio. El coeficiente a_n en un principio sigue siendo arbitrario. Se acostumbra escoger $a_n = 1$ cuando $n = 0$ y

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}, \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{9}$$

Esto se debe a que para esta elección de a_n todos esos polinomios tendrán el valor 1 cuando $x = 1$; esto se sigue de (14) en el problema 10. Entonces de (8) y (9) se obtiene

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}a_n = -\frac{n(n-1)(2n)!}{2(2n-1)2^n(n!)^2} \\ &= -\frac{n(n-1)2n(2n-1)(2n-2)!}{2(2n-1)2^n n(n-1)!\, n(n-1)(n-2)!}, \end{aligned} \tag{9*}$$

esto es,

$$a_{n-2} = -\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!\,(n-2)!}.$$

De manera similar,

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}a_{n-2} = \frac{(2n-4)!}{2^n 2!\,(n-2)!\,(n-4)!}$$

etc., y en general, cuando $n - 2m \geq 0$,

$$a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!\,(n-m)!\,(n-2m)!}. \tag{10}$$

A la solución resultante de la ecuación diferencial de Legendre (1) se le llama el **polinomio de Legendre** *de grado n* y se denota por $P_n(x)$. A partir de (10) se obtiene

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!\,(n-m)!\,(n-2m)!} x^{n-2m} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!\,(n-1)!\,(n-2)!}x^{n-2} + - \cdots, \end{aligned} \tag{11}$$

donde $M = n/2$ o $(n-1)/2$, cualquiera de los dos que sea un entero. En particular (figura 82),

$$\begin{aligned} &P_0(x) = 1, && P_1(x) = x, \\ &P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1), && P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ &P_4(x) = \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), && P_5(x) = \tfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \end{aligned} \tag{11'}$$

etc.

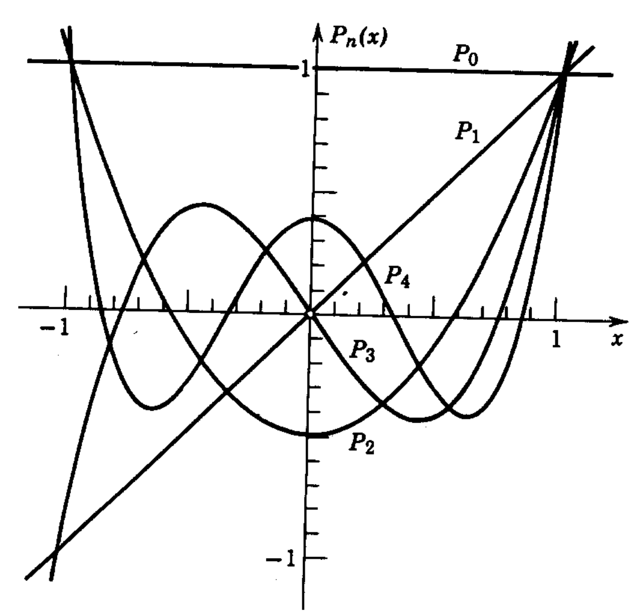


Figura 82. Polinomios de Legendre.

La llamada ***ortogonalidad*** de los polinomios de Legendre se considerará en las secciones 5.8 y 5.9.

Problemas de la sección 5.3

1. Usando (11'), comprobar por sustitución que $P_0, \cdots, P_5$ satisfacen la ecuación de Legendre.
2. Encontrar y graficar $P_6(x)$.
3. Deducir (11') a partir de (11).
4. Demostrar que la ecuación (3) puede obtenerse más rápido a partir de (1*) si se escribe $m - 2 = s$ en la primera suma de (1*) y $m = s$ en las demás sumas, obteniéndose

$$\sum_{s=0}^{\infty} \{(s+2)(s+1)a_{s+2} - [s(s-1) + 2s - k]a_s\}x^s = 0.$$

5. Demostrar que para cualquier n para la que las series (6) o (7) no se reducen a un polinomio, estas series tienen radio de convergencia 1.
6. Resolver (1) con $n = 0$ como se indica en el ejemplo 1.
7. Usando (11), demostrar que $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ y que $P_n'(-x) = (-1)^{n+1} P_n'(x)$.
8. **(Fórmula de Rodrigues[5])** Aplicando el teorema del binomio a $(x^2 - 1)^n$, derivando n veces término a término y haciendo la comparación con (11), demostrar que

$$\text{(12)} \qquad \boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]} \qquad \textit{(fórmula de Rodrigues)}$$

9. Usando (12) e integrando por partes n veces, demostrar que

$$\text{(13)} \qquad \boxed{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}} \qquad (n = 0, 1, \cdots).$$

10. **(Función generadora)** Demostrar que

$$\text{(14)} \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - 2xu + u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)u^n.$$

A la función del primer miembro se le llama *función generadora* de los polinomios de Legendre. *Sugerencia.* Empezar con el desarrollo binomial de $1/\sqrt{1-v}$, hacer después $v = 2xu - u^2$, multiplicar las potencias de $2xu - u^2$, agrupar todos los términos que incluyan u^n y comprobar que la suma de estos términos es $P_n(x)u^n$.

11. Sean A_1 y A_2 dos puntos en el espacio (figura 83, $r_2 > 0$). Usando (14), demostrar que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta}} = \frac{1}{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\cos\theta) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m.$$

Esta fórmula tiene aplicaciones en la teoría del potencial.

---

[5] OLINDE RODRIGUES (1794-1851), matemático y economista francés.

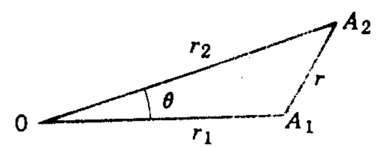


Figura 83. Problema 11.

Usando (14), demostrar que

12. $P_n(1) = 1$
13. $P_n(-1) = (-1)^n$
14. $P_{2n+1}(0) = 0$
15. $P_{2n}(0) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)/2 \cdot 4 \cdots (2n)$.
16. **(Recurrencia de Bonnet[6])** Derivando (14) con respecto a u, usando (14) en la fórmula resultante y comparando los coeficientes de u^n, se obtiene la *recurrencia de Bonnet*

$$(15) \qquad (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

17. **(Realización de cálculos)** La fórmula (15) es útil en la realización de cálculos, siendo reducida la pérdida de cifras significativas (salvo en los ceros). Usando (15), calcular $P_2(2.6)$ y $P_3(2.6)$.
18. Usando (15) y (11'), encontrar P_6.
19. **(Funciones asociadas de Legendre)** Considérese

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right] y = 0.$$

Sustituyendo $y(x) = (1 - x^2)^{m/2}u(x)$, demostrar que u satisface

$$(16) \qquad (1 - x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0.$$

Empezando con (1) y derivando m veces, demostrar que una solución de (16) es

$$u = \frac{d^mP_n}{dx^m}.$$

La función $y(x)$ correspondiente se denota por $P_n^m(x)$. Se conoce como una *función asociada de Legendre* e interviene en la física cuántica. Por tanto,

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^mP_n}{dx^m}.$$

20. Encontrar $P_1^1(x)$, $P_2^1(x)$, $P_2^2(x)$, $P_4^2(x)$.

5.4 MÉTODO DE FROBENIUS

Al igual que el método de las series de potencias, el **método de Frobenius**[7] es un procedimiento para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes varia-

---

[6] OSSIAN BONNET (1819-1892), matemático francés, quien trabajó principalmente en la geometría diferencial de superficies.

[7] GEORG FROBENIUS (1849-1917), matemático alemán, quien realizó también importantes aportaciones a la teoría de matrices y grupos.

bles; sin embargo, el método de Frobenius se aplica a ecuaciones más generales para las que el método de series de las potencias deja de ser aplicable, algunas de ellas fundamentales (la ecuación de Bessel, en particular; ver las secciones 5.5–5.7). Así, el método de Frobenius posee una gran importancia práctica.

Se empieza explicando a qué clase de ecuaciones se aplica el método de Frobenius. Un punto $x = x_0$ en el que los coeficientes p y q de una ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

son analíticos (ver la sección 5.3) se llama **punto regular** de la ecuación. De manera similar, un **punto regular** $x = x_0$ de

$$\tilde{h}(x)y'' + \tilde{p}(x)y' + \tilde{q}(x)y = 0$$

es aquel en el que $\tilde{h}$, $\tilde{p}$, y $\tilde{q}$ son analíticos y $\tilde{h}(x_0) \neq 0$ (por lo que al dividir entre $\tilde{h}$, puede obtenerse la forma estándar con y'' como primer término y coeficientes *analíticos* $p = \tilde{p}/\tilde{h}$ y $q = \tilde{q}/\tilde{h}$). Un punto que no es regular se llama **punto singular** de la ecuación.

Por ejemplo, la famosa ecuación de Bessel (ver la sección 5.5)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \qquad (\nu \text{ número dado})$$

como se ve tiene a $x = 0$ como punto singular. (Dividir entre x^2 si esto ayuda.)

Ahora bien, si x_0 es un punto regular de una ecuación, el método de las series de potencias se hace cargo de la misma, como ya se vio, y da soluciones en series de potencias en potencias de $x - x_0$. Sin embargo, si x_0 es un punto singular, deja de ser éste el caso, simplemente porque la ecuación puede no tener una solución en serie de potencias en potencias de $x - x_0$. Por fortuna, el comportamiento de los coeficientes de una ecuación en un punto singular es con frecuencia "no muy malo", aunque es tal que se aplica el siguiente teorema.

Teorema 1 (Método de Frobenius)

Toda ecuación diferencial de la forma

$$(1) \qquad \boxed{y'' + \frac{b(x)}{x}y' + \frac{c(x)}{x^2}y = 0,}$$

donde las funciones $b(x)$ y $c(x)$ son analíticas en $x = 0$, tiene al menos una solución que puede representarse en la forma

$$(2) \qquad y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \qquad (a_0 \neq 0)$$

donde el exponente r puede ser un número cualquiera (real o complejo y r se elige de tal modo que $a_0 \neq 0$).[8]

[8] En este teorema, x puede sustituirse por $x - x_0$, donde x_0 es un número cualquiera. Obsérvese que la condición $a_0 \neq 0$ no restringe el carácter general del teorema; significa tan sólo que se saca como factor la potencia más alta posible de x.

El punto singular de (1) en $x = 0$ en ocasiones recibe el nombre de **punto singular regular**, término confuso para el estudiante que no se usará aquí.

La ecuación también tiene una segunda solución (tal que estas dos soluciones son linealmente independientes) que puede ser similar a (2) *(con una r diferente y coeficientes diferentes) o puede contener un término logarítmico* (los detalles se ofrecen en el teorema 2 siguiente).

Por ejemplo, la ecuación de Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\frac{x^2 - \nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

es de la forma (1) con $b(x) = 1$ y $c(x) = x^2 - \nu^2$ analítica en $x = 0$, por lo que el teorema es aplicable.

El punto es que en (2) se tiene una serie de potencias multiplicando una sola potencia de x cuyo exponente r no está restringido a ser un entero no negativo. (Esta última restricción haría la expresión completa una serie de potencias, por definición; ver la nota de pie página 232 de la sección 5.1.)

La demostración del teorema requiere métodos avanzados del análisis complejo y puede encontrarse en la referencia [A6] del apéndice 1.

El método siguiente para resolver (1) se basa en este teorema y se conoce como el **método de Frobenius** o **método extendido de las series de potencias**.

Ecuación indicial, que indica la forma de las soluciones

Para resolver (1), ésta se escribe en la forma un tanto más conveniente

$$(1') \qquad x^2y'' + xb(x)y' + c(x)y = 0.$$

Primero se desarrollan $b(x)$ y $c(x)$ en series de potencias,

$$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots, \qquad c(x) + c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots.$$

Después se deriva (2) término a término, encontrándose

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m + r)a_m x^{m+r-1} = x^{r-1}[ra_0 + (r + 1)a_1x + \cdots],$$

$$(2^*) \qquad y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m + r)(m + r - 1)a_m x^{m+r-2}$$

$$= x^{r-2}[r(r - 1)a_0 + (r + 1)ra_1x + \cdots].$$

Al insertar estas series en (1') se obtiene de inmediato

$$(3) \qquad x^r[r(r - 1)a_0 + \cdots] + (b_0 + b_1x + \cdots)x^r(ra_0 + \cdots)$$
$$+ (c_0 + c_1x + \cdots)x^r(a_0 + a_1x + \cdots) = 0.$$

Ahora, se iguala a cero la suma de los coeficientes de cada potencia de x, como anteriormente. Se obtiene así un sistema de ecuaciones que incluyen los coeficientes desconocidos a_m. La menor potencia es x^r y la ecuación correspondiente es

$$[r(r-1)+b_0r+c_0]a_0 = 0.$$

Puesto que por hipótesis $a_0 \neq 0$, la expresión dentro de los corchetes debe ser cero. Se obtiene así

$$r(r-1)+b_0r+c_0 = 0. \tag{4}$$

Esta importante ecuación cuadrática se conoce como la **ecuación indicial** de la ecuación diferencial (1). Su papel es el siguiente.

El método tratado llevará a una base de soluciones. Una de las dos soluciones será siempre de la forma (2), donde r es una raíz de (4). La forma de la otra solución la indicará la ecuación indicial; dependiendo de las raíces, hay tres casos posibles, como se verá a continuación. Dos de ellos son de esperarse por la ecuación de Euler-Cauchy (sección 2.6). Quizás el tercero no sea anticipable, pero también puede verse a partir de una ecuación simple. Para ver lo que deberá esperarse, primero se consideran algunos ejemplos.

EJEMPLO 1 Caso 1. Raíces diferentes que no difieren por un entero

Al sustituir $y = x^r$ en la ecuación de Euler-Cauchy

$$x^2y'' - \tfrac{1}{2}xy' + \tfrac{1}{2}y = 0$$

se obtiene la ecuación auxiliar, que es la ecuación indicial,

$$r(r-1) - \tfrac{1}{2}r + \tfrac{1}{2} = 0$$

con raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = \frac{1}{2}$. Una base es $y_1 = x, y_2 = \sqrt{x}$. ∎

EJEMPLO 2 Caso 2. Raíz doble

Para la ecuación de Euler-Cauchy

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

la ecuación indicial

$$r(r-1) - r + 1 = (r-1)^2 = 0$$

tiene una raíz doble $r = r_1 = r_2 = 1$ y produce la base $y_1 = x, y_2 = x \ln x$ (ver la sección 2.6). ∎

EJEMPLO 3A

Caso 3. Raíces que difieren por un entero, sin término logarítmico

Para la ecuación de Euler-Cauchy

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

la ecuación indicial

$$r(r-1)+r-1=0$$

tiene las raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$ y produce la base $y_1 = x$, $y_2 = 1/x$. ▮

EJEMPLO 3B

Caso 3. Raíces que difieren por un entero, con término logarítmico

Para la ecuación

$$(x^2-x)y''-xy'+y=0$$

la ecuación indicial puede obtenerse pasando primero la ecuación dada a la forma (1),

$$y''+\frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{x^2-x}\right)y'+\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2-x}\right)y=0,$$

la cual indica que en (1),

$$b(x)=-c(x)=-\frac{x^2}{x^2-x}=\frac{x}{1-x}=x(1+x+\cdots),\qquad \text{por tanto } b_0=c_0=0.$$

Por tanto (4) es $r(r-1)=0$ y sus raíces $r_1 = 1$, $r_2 = 0$ difieren por un entero. El estudiante puede comprobar por sustitución que una base de soluciones para toda x positiva es

$$y_1=x,\qquad y_2=x\ln x+1.$$

En el ejemplo 7 se presentan los detalles. ▮

Para una ecuación general (1) se necesitan series infinitas para las soluciones, no un solo término (como en los ejemplos) o unos cuantos; y el teorema 2 presenta ahora la forma general de una base de soluciones en cada caso.[9]

Teorema 2 (Método de Frobenius. Base de soluciones)

Suponer que la ecuación diferencial (1) satisface los supuestos del teorema 1. Sean r_1 y r_2 las raíces de la ecuación indicial (4). Entonces se tienen los tres casos siguientes.

Caso 1. Raíces distintas que no difieren por un entero.[10] *Una base es*

$$y_1(x)=x^{r_1}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots) \tag{5}$$

y

$$y_2(x)=x^{r_2}(A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots) \tag{6}$$

con coeficientes obtenidos sucesivamente a partir de (3) con $r = r_1$ y $r = r_2$, respectivamente.

---

[9] No se presentará aquí una teoría general de la convergencia de las series que ocurren, pero en cada caso individual la convergencia puede probarse de la manera usual.

[10] Obsérvese que este caso incluye raíces complejas conjugadas r_1 y $r_2 = \bar{r}_1$, ya que se tiene $r_1 - r_2 = r_1 - \bar{r}_1 = 2i \operatorname{Im} r_1$, que es imaginario y, en consecuencia, no puede ser un entero *real*.

Caso 2. Raíz doble $r_1 = r_2 = r$. *Una base es*

(7) $$y_1(x) = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \qquad [r = \tfrac{1}{2}(1 - b_0)]$$

(de la misma forma general que antes) y

(8) $$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^r(A_1x + A_2x^2 + \cdots) \qquad (x > 0).$$

Caso 3. Raíces que difieren por un entero. *Una base es*

(9) $$y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$

(de la misma forma general que antes) y

(10) $$y_2(x) = ky_1(x)\ln x + x^{r_2}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots),$$

donde las raíces se denotan de tal modo que $r_1 - r_2 > 0$ y k puede ser cero.

Las demostraciones se presentan en el apéndice 4. Obsérvese que en el caso 2 ***debe*** tenerse un logaritmo, mientras que en el caso 3 puede haberlo o no.

Aplicaciones típicas

Técnicamente, el método de Frobenius es similar al de las series de potencias, una vez que se han determinado las raíces de la ecuación indicial. Sin embargo, las expresiones (5) - (10) se limitan a indicar la forma general de una base, y los ejemplos 6 y 7 (siguientes) muestran que en muchas ocasiones se cuenta con formas más convenientes de determinar las soluciones.

EJEMPLO 4 Ecuación de Euler-Cauchy

Para la ecuación de Euler-Cauchy

$$x^2y'' + b_0xy' + c_0y = 0 \qquad (b_0, c_0 \text{ constantes})$$

de la sustitución de $y = x^r$ se obtiene la ecuación auxiliar

$$\boxed{r(r-1) + b_0r + c_0 = 0,}$$

que es la ecuación indicial [y $y = x^r$ es una forma muy especial de (2)]. Para raíces r_1, r_2 diferentes se obtiene una base $y_1 = x^{r_1}$, $y_2 = x^{r_2}$, y para una raíz r doble se obtiene una base x^r, $x^r \ln x$. Por consiguiente, para esta ecuación simple, el caso 3 sin un término logarítmico no desempeña un papel adicional y el caso 3 con un término logarítmico no es posible. ∎

EJEMPLO 5 Una ecuación que lleva al caso 1

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{4x}y = 0.$$

Solución. Esta ecuación satisface los supuestos de los teoremas 1 y 2, por lo que puede aplicarse el método de Frobenius. Se escribe la ecuación en la forma más conveniente

$$4xy'' + 2y' + y = 0.$$

De la sustitución de (2) y de sus derivadas (2*) se obtiene

$$(11) \qquad 4\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1} + 2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0.$$

Si el estudiante se siente más cómodo desarrollando esta expresión, adelante:

$$\begin{aligned} &4r(r-1)a_0x^{r-1} + 4(r+1)ra_1x^r + 4(r+2)(r+1)a_2x^{r+1} + \cdots \\ &+ 2ra_0x^{r-1} + 2(r+1)\,a_1x^r + \quad 2(r+2)\,a_2x^{r+1} + \cdots \\ &+ \qquad a_0x^r + \qquad a_1x^{r+1} + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Al igualar a cero la suma de los coeficientes de x^{r-1} se obtiene la ecuación indicial

$$4r(r-1) + 2r = 0, \qquad \text{por tanto} \qquad r^2 - \tfrac{1}{2}r = 0.$$

Las raíces son $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = 0$. Se trata del caso 1.

Al igualar a cero la suma de los coeficientes de x^{r+s} se obtiene (tomar $m + r - 1 = r + s$, por tanto $m = s + 1$ en las dos primeras series y $m = s$ en la última)

$$4(s+r+1)(s+r)a_{s+1} + 2(s+r+1)a_{s+1} + a_s = 0.$$

Por simplificación se encuentra que esta expresión puede escribirse como

$$4(s+r+1)(s+r+\tfrac{1}{2})a_{s+1} + a_s = 0.$$

Se resuelve para a_{s+1} en términos de a_s:

$$(12) \qquad a_{s+1} = -\frac{a_s}{(2s+2r+2)(2s+2r+1)} \qquad (s = 0, 1, \cdots).$$

Primera solución. Se determina una primera solución $y_1(x)$ correspondiente a $r_1 = \frac{1}{2}$. Para $r = r_1$, la fórmula (12) queda como

$$a_{s+1} = -\frac{a_s}{(2s+3)(2s+2)} \qquad (s = 0, 1, \cdots).$$

A partir de esta expresión se obtiene sucesivamente

$$a_1 = -\frac{a_0}{3\cdot 2}, \qquad a_2 = -\frac{a_1}{5\cdot 4}, \qquad a_3 = -\frac{a_2}{7\cdot 6}, \qquad \text{etc.}$$

En muchas situaciones prácticas una fórmula explícita para a_m resultará muy complicada. Aquí es simple: por sustituciones sucesivas se obtiene

$$a_1 = -\frac{a_0}{3!}, \qquad a_2 = \frac{a_0}{5!}, \qquad a_3 = -\frac{a_0}{7!}, \qquad \cdots$$

y en general, tomando $a_0 = 1$,

$$a_m = \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \qquad (m = 0, 1, \cdots).$$

Por tanto, la primera solución es

$$y_1(x) = x^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^m = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{120}x^2 - + \cdots\right).$$

Segunda solución. Si y_1 se identifica como una función conocida, se aplica la reducción de orden (ver la sección 2.7). De no ser así, se empieza a partir de (6) con $r_2 = 0$. Para $r = r_2 = 0$, la fórmula (12) [con A_{s+1} y A_s en lugar de a_{s+1} y a_s] queda como

$$A_{s+1} = -\frac{A_s}{(2s+2)(2s+1)} \qquad (s = 0, 1, \cdots).$$

A partir de esta expresión se obtiene sucesivamente

$$A_1 = -\frac{A_0}{2 \cdot 1}, \qquad A_2 = -\frac{A_1}{4 \cdot 3}, \qquad A_3 = -\frac{A_2}{6 \cdot 5},$$

y por sustituciones sucesivas se tiene

$$A_1 = -\frac{A_0}{2!}, \qquad A_2 = \frac{A_0}{4!}, \qquad A_3 = -\frac{A_0}{6!}, \qquad \cdots$$

y en general, tomando $A_0 = 1$,

$$A_m = \frac{(-1)^m}{(2m)!}.$$

Por tanto, la segunda solución, de la forma (6) con $r_2 = 0$, es

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^m = 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{24}x^2 - + \cdots.$$

y_1 y y_2 son linealmente independientes sobre el eje x positivo ya que su cociente no es constante. Por consiguiente, estas soluciones forman una base para toda $x > 0$. ▮

EJEMPLO 6 Ilustración del caso 2 (raíz doble)

Resolver la ecuación diferencial

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0. \tag{13}$$

(Esta es una ecuación diferencial hipergeométrica especial, como se verá en los problemas de la sección.)

Solución. Al escribir esta ecuación en la forma estándar (1) se observa que satisface los supuestos del teorema 1. Al insertar (2) y sus derivadas (2*) en (13) se obtiene

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1} \\ &\quad + 3\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)a_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)a_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

La menor potencia es x^{r-1}; al igualar con cero la suma de sus coeficientes se tiene

$$[-r(r-1) - r]a_0 = 0, \qquad \text{por tanto,} \qquad r^2 = 0.$$

Por tanto, esta ecuación indicial tiene la raíz doble $r = 0$.

Primera solución. Se inserta este valor en (14) y se iguala a cero la suma de los coeficientes de la potencia x^s, encontrándose

$$s(s-1)a_s - (s+1)sa_{s+1} + 3sa_s - (s+1)a_{s+1} + a_s = 0,$$

de donde $a_{s+1} = a_s$. Por tanto $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots$ y al elegir $a_0 = 1$ se obtiene la solución

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}.$$

Segunda solución. Una segunda solución independiente y_2 se obtiene por el método de reducción de orden (sección 2.7), sustituyendo $y_2 = uy_1$ y sus derivadas en la ecuación. Esto lleva a (10), sección 2.7, que se usará en este ejemplo, en lugar de empezar de cero (como se hará en el siguiente ejemplo). En (10) de la sección 2.7 se tiene $p = (3x-1)/(x^2-x)$, el coeficiente de y' en (13) ***en la forma estándar***. Por fracciones parciales,

$$-\int p\,dx = -\int \frac{3x-1}{x(x-1)}\,dx = -\int\left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x}\right)dx = -2\ln(x-1) - \ln x.$$

Por tanto (10) de la sección 2.7 queda como

$$u' = U = y_1^{-2}e^{-\int p\,dx} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 x}, \qquad u = \ln x, \qquad y_2 = uy_1 = \frac{\ln x}{1-x}.$$

y_1 y y_2 son linealmente independientes y en consecuencia forman una base en el intervalo $0 < x < 1$ así como en $1 < x < \infty$. ∎

EJEMPLO 7 Caso 3, segunda solución con término logarítmico

Resolver

$$(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0. \tag{15}$$

Solución. La respuesta se dio en el ejemplo 3B y se indica ahora cómo llegar a ella. Al sustituir (2) y (2*) en (15) se tiene

$$(x^2 - x)\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-2} - x\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0.$$

Se meten ahora x^2, x y x en las sumatorias, se agrupan todos los términos con potencias x^{m+r} y se la simplifica algebraicamente, obteniéndose

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r-1)^2 a_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1} = 0.$$

En la primera serie se hace $m = s$ y en la segunda $m = s+1$, de donde $s = m-1$. Entonces

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+r-1)^2 a_s x^{s+r} - \sum_{s=-1}^{\infty}(s+r+1)(s+r)a_{s+1}x^{s+r} = 0. \tag{16}$$

La menor potencia es x^{r-1} (se toma $s = -1$ en la segunda serie), obteniéndose la ecuación indicial

$$r(r-1) = 0.$$

Las raíces son $r_1 = 1$ y $r_2 = 0$, las cuales difieren por un entero. Se trata del caso 3.

Primera solución. Por (16) con $r = r_1 = 1$ se tiene

$$\sum_{s=0}^{\infty}[s^2 a_s - (s+2)(s+1)a_{s+1}]x^{s+1} = 0.$$

A partir de esta expresión se llega a la relación de recurrencia

$$a_{s+1} = \frac{s^2}{(s+2)(s+1)} a_s \qquad (s = 0, 1, \cdots).$$

Por tanto, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $\cdots$ sucesivamente. Al tomar $a_0 = 1$ se obtiene como primera solución $y_1 = x^r a_0 = x$.

Segunda solución. Aplicando reducción de orden (sección 2.7), se sustituyen $y_2 = y_1 u = xu$, $y_2' = xu' + u$ y $y_2'' = xu'' + 2u'$ en la ecuación, obteniéndose

$$(x^2 - x)(xu'' + 2u') - x(xu' + u) + xu = 0.$$

xu se cancela. Al dividir entre x y simplificar se obtiene

$$(x^2 - x)u'' + (x - 2)u' = 0.$$

A partir de esta expresión, usando fracciones parciales e integrando, se obtiene

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{x-2}{x^2 - x} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1}, \qquad \ln u' = \ln \frac{x-1}{x^2}.$$

Al tomar exponentes e integrar (tomando de nuevo como cero a la constante de integración), se obtiene

$$u' = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, \qquad u = \ln x + \frac{1}{x}, \qquad y_2 = xu = x \ln x + 1.$$

y_1 y y_2 son linealmente independientes y y_2 tiene un término logarítmico. ∎

Con el método de Frobenius se resuelve la **ecuación hipergeométrica**, cuyas soluciones incluyen muchas funciones conocidas como casos especiales (ver los problemas de la sección). En la siguiente sección se usa este método para resolver la ecuación de Bessel.

Problemas de la sección 5.4

Encontrar una base de soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales. Tratar de identificar las series obtenidas con el método de Frobenius como desarrollos de funciones conocidas.

1. $xy'' + 2y' + xy = 0$

2. $xy'' + 2y' + 4xy = 0$

3. $x^2y'' + 6xy' + (6 - x^2)y = 0$

4. $16x^2y'' + 3y = 0$

5. $x^2y'' + 6xy' + (x^2 + 6)y = 0$

6. $(x + 2)^2y'' + (x + 2)y' - y = 0$

7. $2x^2y'' + xy' - 3y = 0$

8. $x^2y'' + x^3y' + (x^2 - 2)y = 0$

9. $x^2y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = 0$

10. $(x + 1)^2y'' + (x + 1)y' - y = 0$

11. $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$

12. $xy'' + (2 - 2x)y' + (x - 2)y = 0$

13. $xy'' + 3y' + 4x^3y = 0$

14. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

15. $(x - 1)^2y'' + (x - 1)y' - 4y = 0$

16. $xy'' + y' - xy = 0$

17. $(1 + x)x^2y'' - (1 + 2x)xy' + (1 + 2x)y = 0$

18. $(1 + \frac{1}{2}x)x^2y'' - (1 + x)xy' + (1 + x)y = 0$

19. $2x(x - 1)y'' - (4x^2 - 3x + 1)y' + (2x^2 - x + 2)y = 0$

20. $(x^2 - 1)x^2y'' - (x^2 + 1)xy' + (x^2 + 1)y = 0$

Ecuación hipergeométrica, serie hipergeométrica, funciones hipergeométricas

21. La **ecuación diferencial hipergeométrica de Gauss**[11] es

$$x(1 - x)y'' + [c - (a + b + 1)x]y' - aby = 0 \tag{17}$$

donde a, b, c son constantes. Demostrar que la ecuación indicial correspondiente tiene las raíces $r_1 = 0$ y $r_2 = 1 - c$. Demostrar que para $r_1 = 0$ con el método de Frobenius se obtiene

$$\begin{aligned} y_1(x) = 1 &+ \frac{ab}{1!\,c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!\,c(c+1)}x^2 \\ &+ \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!\,c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots \end{aligned} \tag{18}$$

donde $c \neq 0, -1, -2, \cdots$. Esta serie se conoce como **serie hipergeométrica**. Su suma $y_1(x)$ se denota por $F(a, b, c; x)$ y se conoce como la **función hipergeométrica**.

Usando (18), demostrar que:

22. La serie (18) converge para $|x| < 1$.

23. $F(1, b, b; x) = 1 + x + x^2 + \cdots$, la serie geométrica.

24. Si a o b es un entero negativo, (18) se reduce a un polinomio.

25. $\dfrac{dF(a, b, c; x)}{dx} = \dfrac{ab}{c}F(a + 1, b + 1, c + 1; x)$,

$\dfrac{d^2F(a, b, c; x)}{dx^2} = \dfrac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}F(a + 2, b + 2, c + 2; x)$, etc.

Muchas funciones elementales son casos especiales de $F(a, b, c; x)$. Demostrar que

26. $\dfrac{1}{1 - x} = F(1, 1, 1; x) = F(1, b, b; x) = F(a, 1, a; x)$

27. $(1 + x)^n = F(-n, b, b; -x)$, $\quad (1 - x)^n = 1 - nxF(1 - n, 1, 2; x)$

28. $\arctan x = xF(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}; -x^2)$, $\quad \operatorname{arc\,sen} x = xF(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; x^2)$

29. $\ln(1 + x) = xF(1, 1, 2; -x)$, $\quad \ln\dfrac{1 + x}{1 - x} = 2xF(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}; x^2)$

[11] CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855), brillante matemático alemán. Siendo estudiante en Helmstedt y Göttingen realizó el primero de sus grandes descubrimientos. En 1807 fue nombrado profesor y director del Observatorio de Göttingen. Su obra fue de importancia fundamental en álgebra, teoría de números, ecuaciones diferenciales, geometría diferencial, geometría no euclidiana, análisis complejo, análisis numérico, astronomía, geodesia, electromagnetismo y mecánica teórica. También abrió el camino para el uso general y sistemático de los números complejos.

30. **(Segunda solución)** Demostrar que para $r_2 = 1 - c$ en el problema 21, el método de Frobenius produce la siguiente solución (donde $c \neq 2, 3, 4, \cdots$):

$$y_2(x) = x^{1-c}\left(1 + \frac{(a-c+1)(b-c+1)}{1!(-c+2)}x + \frac{(a-c+1)(a-c+2)(b-c+1)(b-c+2)}{2!(-c+2)(-c+3)}x^2 + \cdots\right) \tag{19}$$

31. Demostrar que en el problema 30

$$y_2(x) = x^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c; x).$$

32. Demostrar que si $c \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, entonces las funciones (18) y (19) constituyen una base de soluciones de (17).

33. Considerar la ecuación diferencial

$$(t^2 + At + B)\ddot{y} + (Ct + D)\dot{y} + Ky = 0 \tag{20}$$

donde A, B, C, D, K son constantes, $\dot{y} = dy/dt$ y $t^2 + At + B$ tiene las raíces diferentes t_1 y t_2. Demostrar que al introducir la nueva variable independiente

$$x = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

la ecuación (20) se reduce a la ecuación hipergeométrica, donde los parámetros se relacionan por $Ct_1 + D = -c(t_2 - t_1)$, $C = a + b + 1$, $K = ab$.

Resolver las ecuaciones siguientes en términos de funciones hipergeométricas.

34. $x(1-x)y'' + (3-5x)y' - 4y = 0$
35. $8x(1-x)y'' + (4-14x)y' - y = 0$
36. $x(1-x)y'' + (\frac{1}{2} + 2x)y' - 2y = 0$
37. $5x(1-x)y'' + (4-x)y' + y = 0$
38. $4x(1-x)y'' + (1-10x)y' - 2y = 0$
39. $4x(1-x)y'' + y' + 8y = 0$
40. $2x(1-x)y'' + (7+2x)y' - 2y = 0$
41. $4x(1-x)y'' + (2+12x)y' - 15y = 0$
42. $3x(1-x)y'' + (1-5x)y' + y = 0$
43. $4(t^2 - 3t + 2)\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0$
44. $2(t^2 - 5t + 6)\ddot{y} + (2t-3)\dot{y} - 8y = 0$
45. $3t(1+t)\ddot{y} + t\dot{y} - y = 0$

5.5 ECUACIÓN DE BESSEL. FUNCIONES DE BESSEL $J_\nu(X)$

En esta sección se usa el método de Frobenius para resolver una de las ecuaciones de mayor importancia en las matemáticas aplicadas, la **ecuación diferencial de Bessel**[12]

$$\boxed{x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0} \tag{1}$$

[12] FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784-1846), astrónomo y matemático alemán, se inició como aprendiz en una empresa comercial, estudiando astronomía por su cuenta en su tiempo libre, más tarde llegaría a ser asistente en un pequeño observatorio particular y finalmente director del nuevo observatorio de Königsberg. Su ensayo sobre las funciones de Bessel (fechado en 1824) se publicó en 1826.
Las fórmulas se presentan en las referencias [1], [6], [10] y en el tratado estándar [A9].

o, en la forma estándar,

$$(1^*) \qquad \boxed{y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.}$$

Aquí, el parámetro ν es un número real no negativo dado. Esta ecuación aparece en problemas sobre oscilaciones, campos eléctricos, conducción de calor, dinámica de fluidos, etc., en la mayoría de los casos cuando el problema muestra simetría cilíndrica (así como los problemas que presentan simetría *esférica* pueden llevar a la ecuación de Legendre). Si el estudiante lo desea, puede echar una mirada rápida a la sección 11.10, donde las vibraciones de una membrana circular llevan a la ecuación de Bessel.

La fórmula (1*) muestra que la ecuación de Bessel es del tipo caracterizado en el teorema 1 de la sección 5.4. En consecuencia, puede resolverse por el método de Frobenius (sección 5.4), al sustituir una serie de la forma

$$(2) \qquad y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \qquad (a_0 \neq 0).$$

con coeficientes indeterminados y sus derivadas en la ecuación de Bessel (1). Se obtiene así

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m + r)(m + r - 1)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m + r)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0.$$

Se iguala a cero la suma de los coeficientes de x^{s+r}. Obsérvese que esta potencia x^{s+r} corresponde a $m = s$ en las series primera, segunda y cuarta y a $m = s - 2$ en la tercera serie. Por tanto, para $s = 0$ y $s = 1$, la tercera serie no participa ya que $m \geq 0$. Para $s = 2, 3, \cdots$ las cuatro series intervienen, por lo que se obtiene una fórmula general para todas estas s. Se encuentra

$$\text{(a)} \qquad r(r - 1)a_0 + ra_0 - \nu^2 a_0 = 0 \qquad (s = 0)$$

$$\text{(3) (b)} \qquad (r + 1)ra_1 + (r + 1)a_1 - \nu^2 a_1 = 0 \qquad (s = 1)$$

$$\text{(c)} \qquad (s + r)(s + r - 1)a_s + (s + r)a_s + a_{s-2} - \nu^2 a_s = 0 \qquad (s = 2, 3, \cdots).$$

De (3a) se obtiene la **ecuación indicial**

$$(4) \qquad \boxed{(r + \nu)(r - \nu) = 0.}$$

Las raíces son $r_1 = \nu\ (\geq 0)$ y $r_2 = -\nu$.

Recurrencia de coeficientes en el caso de $r = r_1 = \nu$

Para $r = r_1 = \nu$, de la ecuación (3b) se obtiene $a_1 = 0$. La ecuación (3c) puede escribirse

$$(s + r + \nu)(s + r - \nu)a_s + a_{s-2} = 0,$$

y para $r = \nu$ esta expresión asume la forma

$$(s + 2\nu)sa_s + a_{s-2} = 0. \tag{5}$$

Puesto que a_1 y $\nu \geq 0$, se sigue que $a_3 = 0$, $a_5 = 0$, sucesivamente. Si se hace $s = 2m$ en (5), para los demás coeficientes se obtiene

$$a_{2m} = -\frac{1}{2^2 m(\nu + m)} a_{2m-2}, \qquad m = 1, 2, \cdots, \tag{6}$$

y es posible determinar sucesivamente estos coeficientes a_2, a_4, $\cdots$. Se obtiene así

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu + 1)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 2(\nu + 2)} = \frac{a_0}{2^4 2!\,(\nu + 1)(\nu + 2)}$$

y así sucesivamente, y en general

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!\,(\nu + 1)(\nu + 2)\cdots(\nu + m)}, \qquad m = 1, 2, \cdots. \tag{7}$$

Función de Bessel $J_n(x)$ para $V = n$ entero

Los valores enteros de ν se denotan por n. Esta es la norma. Para $\nu = n$ la relación (7) queda como

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!\,(n + 1)(n + 2)\cdots(n + m)}, \qquad m = 1, 2, \cdots. \tag{8}$$

a_0 sigue siendo arbitraria, por lo que la serie (2) con estos coeficientes incluirá a este factor arbitrario a_0, una situación en alto grado desventajosa en la práctica para desarrollar fórmulas o calcular valores de esta nueva función. En consecuencia, es necesario hacer una elección: $a_0 = 1$ sería posible, pero más práctico es

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!} \tag{9}$$

porque entonces $n!(n+1)\cdots(n+m) = (m+n)!$ en (8), de donde

$$(10) \qquad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n}m!(n+m)!}, \qquad m = 1, 2, \cdots .$$

Con estos coeficientes y $r_1 = \nu = n$ se obtiene a partir de (2) una solución particular de (1), denotada por $J_n(x)$, dada por

$$(11) \qquad \boxed{J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n}m!\,(n+m)!}}$$

y llamada la **función de Bessel de primera clase** *de orden n*. Esta serie converge para toda x, como lo indica la prueba de la razón, y de hecho converge con mucha rapidez debido a los factoriales del denominador.

EJEMPLO 1 Funciones de Bessel $J_0(x)$ y $J_1(x)$

Para $n = 0$ de (11) se obtiene la función de Bessel de orden 0

$$(12) \qquad J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + - \cdots,$$

que es similar al coseno (figura 84). Para $n = 1$ se obtiene la función de Bessel de orden 1

$$(13) \qquad J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1}m!\,(m+1)!} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 1!\,2!} + \frac{x^5}{2^5 2!\,3!} - \frac{x^7}{2^7 3!\,4!} + - \cdots,$$

que es similar al seno (figura 84). Pero los ceros de estas funciones no están separados por distancias completamente regulares (ver también la tabla A1 del apéndice 5) y la altura de las "ondas" disminuye cuando x se incrementa. Heurísticamente, el cociente n^2/x^2 en (1*) es cero (si $n = 0$) o pequeño en valor absoluto para x grande, como lo es y'/x, por lo que entonces la ecuación de Bessel se acerca a $y'' + y = 0$, la ecuación de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$; asimismo, y'/x actúa como un "término de amortiguación", responsable en parte de la disminución de la altura. Puede demostrarse que para x grande,

$$(14) \qquad J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \qquad ∎$$

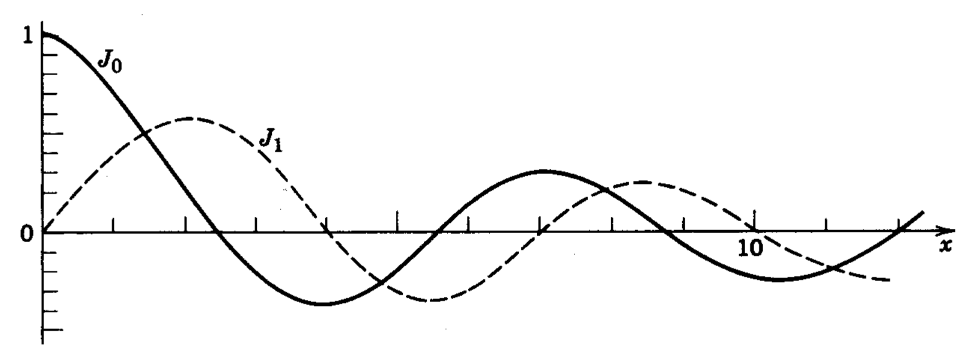


Figura 84. Funciones de Bessel de primera clase.

Funciones de Bessel $J_\nu(x)$ para cualquier $\nu \geq 0$. Función gamma

Se amplía ahora la discusión en que se obtuvo (11) a partir de $\nu = n$ para cualquier $\nu \geq 0$. Lo único que se necesita es una ampliación de los factoriales de (9) y (11) para cualquier ν. Esto se consigue con la **función gamma** $\Gamma(\nu)$ definida por la integral

(15) $$\boxed{\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1}\,dt} \qquad (\nu > 0).$$

Al integrar por partes se obtiene

$$\Gamma(\nu + 1) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\nu}\,dt = -e^{-t}t^{\nu}\Big|_0^\infty + \nu\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1}\,dt.$$

La primera expresión del segundo miembro es cero y la integral de la derecha es $\Gamma(\nu)$. De lo anterior se obtiene la relación básica

(16) $$\boxed{\Gamma(\nu + 1) = \nu\Gamma(\nu).}$$

Puesto que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1,$$

por (16) se concluye que

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1!, \qquad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!, \cdots$$

y en general

(17) $$\boxed{\Gamma(n + 1) = n!} \qquad (n = 0, 1, \cdots).$$

Se demuestra así que la función gamma en realidad generaliza la función factorial conocida en el cálculo elemental.

Ahora en (9) se tiene $a_0 = 1/2^n n!$, que por (17) es $1/2^n\Gamma(n + 1)$ y sugiere la elección, para cualquier ν,

(18) $$a_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu + 1)}.$$

Entonces (7) queda como

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}m!\,(\nu + 1)(\nu + 2)\cdots(\nu + m)\Gamma(\nu + 1)}$$

Pero (16) da en el denominador

$$(\nu + 1)\Gamma(\nu + 1) = \Gamma(\nu + 2), \qquad (\nu + 2)\Gamma(\nu + 2) = \Gamma(\nu + 3)$$

y así sucesivamente, por lo que

$$(\nu + 1)(\nu + 2) \cdots (\nu + m)\Gamma(\nu + 1) = \Gamma(\nu + m + 1).$$

Por lo tanto, los coeficientes son

(19) $$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m!\, \Gamma(\nu + m + 1)}.$$

Con estos coeficientes y $r = r_1 = \nu$ por (2) se obtiene una solución particular de (1), denotada por $J_\nu(x)$, dada por

(20) $$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m!\, \Gamma(\nu + m + 1)}$$

y llamada la **función de Bessel de primera clase de orden ν**. Esta serie converge para toda x, como puede comprobarse con la prueba de la razón. (En el apéndice 3 se presentan más fórmulas para la función gamma, pero no se necesitan aquí.)

Solución $J_{-\nu}$ de la ecuación de Bessel

Hasta este punto se tiene una solución, J_ν, y la siguiente tarea será motivada por el objetivo de obtener una solución general de la ecuación de Bessel. Para ello debe deducirse una segunda solución independiente. Si ν no es un entero, esto resultará sencillo. Si ν es un entero n, esto requerirá un esfuerzo mayor, como se muestra en la sección 5.7. Los detalles son los siguientes.

Al sustituir ν por $-\nu$ en (20) se tiene

(21) $$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m!\, \Gamma(m - \nu + 1)}.$$

Puesto que la ecuación de Bessel incluye ν^2, las funciones J_ν y $J_{-\nu}$ son soluciones de la ecuación para el mismo ν. Si ν no es un entero, estas soluciones son linealmente independientes, ya que el primer término de (20) y el primero de (21) son múltiplos finitos diferentes de cero de x^ν y $x^{-\nu}$, respectivamente. De lo anterior se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 1 (Solución general de la ecuación de Bessel)

Si ν no es un entero, una solución general de la ecuación de Bessel para toda $x \neq 0$ es

(22) $$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x).$$

Pero si ν es un entero, entonces (22) no es una solución general. De hecho, en este caso las dos soluciones de (22) se vuelven linealmente dependientes, como se demuestra a continuación.

Teorema 2 (Dependencia lineal de las funciones de Bessel J_n y J_{-n})

Para $\nu = n$ entero las funciones de Bessel $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son linealmente dependientes, ya que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{23}$$

Demostración. Se usa (21) y se hace que ν tienda a un entero positivo n. Entonces las funciones gamma en los coeficientes de los n primeros términos se hacen infinitas (ver la figura 527 en el apéndice 3), los coeficientes se hacen cero y la sumatoria empieza con $m = n$. Puesto que en este caso $\Gamma(m - n + 1) = (m - n)!$ por (17), se obtiene

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n} m!\,(m-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} x^{2s+n}}{2^{2s+n}(n+s)!\,s!}$$

donde $m = n + s$ y $s = m - n$. Por (11) se ve que la última serie representa $(-1)^n J_n(x)$. Con esto se termina la demostración. ∎

En la sección 5.7 se obtendrá una solución general de la ecuación de Bessel con $\nu = n$ entero.

Problemas de la sección 5.5

1. Demostrar que las series de (11) convergen para toda x.
2. Las series (11)-(13) convergen muy rápido (¿por qué?), por lo que resultan de utilidad en los cálculos. A modo de ilustración, encontrar cuántos términos de (12) se necesitan para calcular $J_0(1)$ con un error menor que 1 unidad de la quinta cifra decimal. (*Sugerencia.* Usar la prueba de Leibniz del apéndice 3.) ¿Cuántos términos se necesitarían para calcular ln 2 a partir de la serie de Maclaurin de $\ln(1 + x)$ con la misma precisión?
3. Demostrar que $J_n(x)$ para n par es una función par y para n impar es una función impar.
4. Demostrar que para $|x|$ pequeño se tiene $J_0(x) \approx 1 - 0.25x^2$. Usando esta fórmula, calcular $J_0(x)$ para $x = 0.1, 0.2, \cdots, 1.0$ y determinar el error relativo comparando el resultado con la tabla A1 del apéndice 5.
5. **(Comportamiento para x grande)** Puede demostrarse que para x grande,

$$\begin{aligned} J_{2n}(x) &\approx (-1)^n (\pi x)^{-1/2}(\cos x + \operatorname{sen} x) \\ J_{2n+1}(x) &\approx (-1)^{n+1}(\pi x)^{-1/2}(\cos x - \operatorname{sen} x). \end{aligned} \tag{24}$$

   Usando (24), trazar $J_0(x)$ para x grande, calcular los valores aproximados de los cinco primeros ceros positivos de $J_0(x)$ y compararlos con los valores más exactos 2.405, 5.520, 8.654, 11.792, 14.931.
6. Usando (12) y la prueba de Leibniz del apéndice 3, ¿puede el estudiante pensar en un argumento de por qué $2 < x_0 < \sqrt{8}$, donde $x_0 \approx 2.405$ es el menor cero positivo de $J_0(x)$?
7. Usando (24), calcular valores aproximados de los cuatro primeros ceros positivos de $J_1(x)$ y determinar el error relativo, usando los valores más exactos 3.832, 7.016, 10.173, 13.324.
8. Usando (12) y (13), demostrar que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

9. Con referencia al problema 8, ¿la figura 84 da la impresión de que $J_1(x) = 0$ cuando $J_0(x)$ tiene una tangente horizontal?
10. Usando (12) y (13), demostrar que $J_1'(x) = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x)$.

Ecuaciones diferenciales reducibles a la ecuación de Bessel

Varias ecuaciones diferenciales pueden reducirse a la ecuación de Bessel. Para verlo, usar las sustituciones indicadas y encontrar una solución general en términos de J_ν y $J_{-\nu}$, o indicar por qué estas funciones no dan una solución general. (***En los problemas de la sección 5.7 se presentan más ecuaciones como éstas.***)

11. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$
12. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 16)y = 0$
13. $4x^2y'' + 4xy' + (100x^2 - 9)y = 0 \quad (5x = z)$
14. $4x^2y'' + 4xy' + (x - \frac{1}{36})y = 0 \quad (\sqrt{x} = z)$
15. $9x^2y'' + 9xy' + (36x^4 - 16)y = 0 \quad (x^2 = z)$
16. $xy'' + 2y' + xy = 0 \quad (y = u/\sqrt{x})$
17. $xy'' + 5y' + xy = 0 \quad (y = u/x^2)$
18. $xy'' - 5y' + xy = 0 \quad (y = x^3u)$
19. $81x^2y'' + 27xy' + (9x^{2/3} + 8)y = 0 \quad (y = x^{1/3}u, \quad x^{1/3} = z)$
20. $x^2y'' + \frac{1}{2}xy' + \frac{1}{16}(x^{1/2} + \frac{15}{16})y = 0 \quad (y = x^{1/4}u, \quad x^{1/4} = z)$

5.6 PROPIEDADES ADICIONALES DE $J_\nu(X)$

En la referencia [A9] del apéndice 1 se muestra que las funciones de Bessel $J_\nu(x)$ satisfacen un número increíblemente alto de relaciones. Se discuten cuatro de las más elementales, debido a su importancia y para mostrar cómo es posible descubrir propiedades de funciones especiales a partir de sus series (un hecho que se ilustró asimismo con la demostración del teorema 2 de la sección 5.5).

Al multiplicar (20), sección 5.5, por x^ν se tiene

$$x^\nu J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2\nu}}{2^{2m+\nu} m!\, \Gamma(\nu + m + 1)} .$$

Al derivar esta expresión y usando después (16), sección 5.5, se obtiene

$$(x^\nu J_\nu)' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2(m + \nu) x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu} m!\, \Gamma(\nu + m + 1)}$$

$$= x^\nu x^{\nu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu-1} m!\, \Gamma(\nu + m)} .$$

Por (20) de la sección 5.5 se observa que el segundo miembro es $x^\nu J_{\nu-1}(x)$. Con esto se demuestra que

$$\text{(1)} \qquad \boxed{\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x).}$$

De manera similar, por (20) de la sección 5.5, multiplicada por $x^{-\nu}$, se obtiene por derivación y un cambio de índice

$$(x^{-\nu}J_\nu)' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu-1}(m-1)!\,\Gamma(\nu+m+1)}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1} x^{2s+1}}{2^{2s+\nu+1} s!\,\Gamma(\nu+s+2)}$$

donde $m = s + 1$. Por (20), sección 5.5, la expresión del segundo miembro es $-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$. Con esto se demuestra que

(2) $$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x).$$

Al desarrollar las fórmulas (1) y (2) y multiplicar (2) por $x^{2\nu}$ se obtiene

(1*) $$\nu x^{\nu-1}J_\nu + x^\nu J_\nu' = x^\nu J_{\nu-1}$$

y

(2*) $$-\nu x^{\nu-1}J_\nu + x^\nu J_\nu' = -x^\nu J_{\nu+1}.$$

Al restar (2*) de (1*) y dividir el resultado entre x^ν se obtiene la primera relación de recurrencia

(3) $$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x).$$

Al sumar (1*) y (2*) y dividir el resultado entre x^ν se obtiene la segunda relación de recurrencia

(4) $$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J_\nu'(x).$$

Estas relaciones poseen una considerable importancia práctica, por ejemplo, en el trabajo numérico, donde (3) puede usarse para expresar funciones de Bessel de órdenes superiores en términos de funciones de Bessel de órdenes inferiores que permiten el uso de tablas.

EJEMPLO 1 Cálculo de $J_3(x)$

Encontrar una fórmula para calcular $J_3(1)$ y $J_3(2)$ con la tabla A1 del apéndice 5.

Solución. De la fórmula (3) con $\nu = 1$ y $\nu = 2$ se obtiene

$$J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x),$$

$$J_3(x) = \frac{4}{x} J_2(x) - J_1(x) = \left(\frac{8}{x^2} - 1\right) J_1(x) - \frac{4}{x} J_0(x).$$

Por tanto $J_3(1) = 7J_1(1) - 4J_0(1) = 0.0199$ (en realidad 0.0196, debiéndose la discrepancia al redondeo) y $J_3(2) = J_1(2) - 2J_0(2) = 0.1289$ (con una precisión de cuatro dígitos). ∎

Las fórmulas (1) y (2) son útiles en integrales que incluyen funciones de Bessel.

EJEMPLO 2 Integral que incluye una función de Bessel

Integrar

$$I = \int_1^2 x^{-3} J_4(x)\, dx.$$

Solución. De (2) con $\nu = 3$ y del ejemplo 1 se obtiene

$$I = -x^{-3} J_3(x)\Big|_1^2 = -\tfrac{1}{8} J_3(2) + J_3(1) = 0.0038$$

[0.0035 si se usa el valor 4D anterior 0.0196 de $J_3(1)$]. ∎

EJEMPLO 3 Integral que incluye una función de Bessel

Expresar la siguiente integral en términos de funciones de Bessel

$$\int x^{-2} J_2(x)\, dx.$$

Solución. Al integrar por partes y usar (1) con $\nu = 2$, se obtiene

$$\int x^{-2} J_2\, dx = \int x^{-4}(x^2 J_2)\, dx = -\frac{x^{-3}}{3} x^2 J_2 + \int \frac{x^{-3}}{3} x^2 J_1\, dx = -\frac{J_2}{3x} + \frac{1}{3} \int x^{-1} J_1\, dx.$$

A la derecha, integrando por partes otra vez y usando (1) con $\nu = 1$, se obtiene

$$\int x^{-1} J_1\, dx = \int x^{-2}(x J_1)\, dx = -x^{-1} x J_1 + \int x^{-1} x J_0\, dx.$$

En conjunto,

$$\int x^{-2} J_2(x)\, dx = -\frac{J_2(x)}{3x} - \frac{J_1(x)}{3} + \frac{1}{3} \int J_0(x)\, dx.$$

La integral que queda no puede evaluarse en forma finita sino que se ha tabulado; ver la referencia [A9] en el apéndice 1. ∎

$J_\nu(x)$ con $\nu = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \cdots$ son elementales

Ocurre con frecuencia que en casos especiales las funciones superiores se reducen a funciones conocidas del cálculo. Se estudia este hecho para $J_\nu(x)$.

Cuando $\nu = \frac{1}{2}$, entonces (20), sección 5.5, es

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+1/2}m!\,\Gamma(m+\frac{3}{2})} = \sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1}m!\,\Gamma(m+\frac{3}{2})}.$$

Ahora se usa sin demostración el hecho de que

$$\text{(5)} \qquad \boxed{\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.}$$

A partir de esta expresión y de (16), sección 5.5, en el denominador se tiene

$$\begin{aligned}\Gamma(m+\tfrac{3}{2}) &= (m+\tfrac{1}{2})(m-\tfrac{1}{2})\cdots\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})\\ &= 2^{-(m+1)}(2m+1)(2m-1)\cdots 3\cdot 1\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

En el denominador se tiene además

$$2^{2m+1}m! = 2^{2m+1}m(m-1)\cdots 2\cdot 1 = 2^{m+1}2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2.$$

En conjunto, el denominador queda como $(2m+1)!\sqrt{\pi}$, de donde

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Esta serie es la conocida serie de Maclaurin de sen x. Por tanto,

$$\text{(6)} \qquad \boxed{J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \operatorname{sen} x.}$$

Derivando y por (1) con $\nu = \frac{1}{2}$ de esta expresión se llega a

$$[\sqrt{x}\,J_{1/2}(x)]' = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x = x^{1/2}J_{-1/2}(x)$$

y el siguiente resultado es

$$\text{(7)} \qquad \boxed{J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.}$$

A partir de esta expresión y de (3) se llega así al interesante resultado siguiente.

Teorema 1 (Funciones de Bessel elementales)

Las funciones de Bessel J_ν de órdenes $\nu = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \cdots$ son elementales; pueden expresarse por un número finito de cosenos y senos y potencias de x.

EJEMPLO 4 Más funciones elementales de Bessel

A partir de (3), (6) y (7) se obtiene

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x \right)$$

$$J_{-3/2}(x) = -\frac{1}{x} J_{-1/2}(x) - J_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\cos x}{x} + \operatorname{sen} x \right)$$

y así sucesivamente. ∎

Ojalá esta discusión no sólo haya ayudado al estudiante a familiarizarse con las funciones de Bessel, sino que también lo haya convencido de que las series pueden ser muy útiles para obtener diferentes propiedades de las funciones correspondientes.

Problemas de la sección 5.6

Usando (1)-(4), demostrar que

1. $J_0'(x) = -J_1(x)$
2. $J_1'(x) = J_0(x) - x^{-1}J_1(x)$
3. $J_2'(x) = \frac{1}{2}[J_1(x) - J_3(x)]$
4. $J_2'(x) = (1 - 4x^{-2})J_1(x) + 2x^{-1}J_0(x)$
5. Usando la tabla A1 del apéndice 5 y (3), calcular $J_2(x)$ para los valores $x = 0, 0.1, 0.2, \cdots, 1.0$.
6. Calcular $J_3(x)$ para los valores $x = 2.0, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8$ utilizando (3) y la tabla A1 del apéndice 5.
7. Deducir la ecuación de Bessel a partir de (1) y (2).
8. **(Entremezcla de ceros)** Usando (1), (2) y el teorema de Rolle, demostrar que entre dos ceros consecutivos de $J_0(x)$ hay precisamente un cero de $J_1(x)$.
9. Demostrar que entre dos ceros positivos consecutivos cualesquiera de $J_n(x)$ hay precisamente un cero de $J_{n+1}(x)$.

Las **integrales que incluyen funciones de Bessel** con frecuencia pueden evaluarse o al menos simplificarse mediante el uso de (1) - (4). Demostrar que

10. $\int x^\nu J_{\nu-1}(x)\,dx = x^\nu J_\nu(x) + c$
11. $\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\,dx = -x^{-\nu} J_\nu(x) + c$
12. $\int J_{\nu+1}(x)\,dx = \int J_{\nu-1}(x)\,dx - 2J_\nu(x)$

Usando las fórmulas de los problemas 10-12 y, de ser necesario, la integración por partes, evaluar

13. $\int J_3(x)\,dx$
14. $\int x^3 J_0(x)\,dx$
15. $\int J_5(x)\,dx$
16. Deducir las fórmulas del ejemplo 4 del texto.
17. **(Función gamma)** Usando (5) y $\sqrt{\pi} = 1.772\,454$, calcular $\Gamma(1.5)$, $\Gamma(2.5)$ y $\Gamma(3.5)$.
18. Calcular $\Gamma(4.6)$ usando la tabla A2 del apéndice 5.

Eliminación de la primera derivada

19. Sustituir $y(x) = u(x)v(x)$ en $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ y demostrar que para obtener una ecuación diferencial de segundo orden para u que no contenga u' debe tomarse

$$v(x) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\int p(x)\,dx\right).$$

20. Demostrar que para la ecuación de Bessel la sustitución del problema 19 es $y = ux^{-1/2}$ y que se obtiene

$$x^2u'' + (x^2 + \tfrac{1}{4} - \nu^2)u = 0. \tag{8}$$

Resolver esta ecuación con $\nu = \frac{1}{2}$ y comparar el resultado con (6) y (7). Comentar.

5.7 FUNCIONES DE BESSEL DE SEGUNDA CLASE

Lo que resta es la tarea de obtener una solución general de la ecuación de Bessel para $\nu = n$ entero; recuérdese por la sección 5.5 que para ν no entero se tiene ya una base J_ν, $J_{-\nu}$, pero para $\nu = n$ estas dos soluciones se vuelven linealmente dependientes, por lo que se necesita una segunda solución independiente, la cual se denotará por Y_n.

$n = 0$: Función de Bessel de segunda clase $Y_0(x)$

Se considera primero el caso $n = 0$. Entonces la ecuación de Bessel puede escribirse

$$\boxed{xy'' + y' + xy = 0,} \tag{1}$$

y la ecuación indicial (4), sección 5.5, tiene la raíz doble $r = 0$. Se trata del caso 2 de la sección 5.4. En este caso se tiene al principio una sola solución, $J_0(x)$. A partir de (8) de la sección 5.4 se ve que la segunda solución buscada debe ser de la forma

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m. \tag{2}$$

Se sustituye y_2 y sus derivadas

$$y_2' = J_0'\ln x + \frac{J_0}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} mA_m x^{m-1}$$

$$y_2'' = J_0''\ln x + \frac{2J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)A_m x^{m-2}$$

en (1). Entonces los términos logarítmicos se cancelan ya que J_0 es una solución de (1), al igual que los otros términos que contienen a J_0, y queda

$$2J_0' + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} mA_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0.$$

Por (12) de la sección 5.5 se obtiene la serie de potencias de J_0' en la forma

$$J_0'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m x^{2m-1}}{2^{2m}(m!)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1} m!\,(m-1)!}.$$

Al insertar esta serie se tiene

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-2} m!\,(m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0.$$

Se demuestra primero que todas las A_m con subíndices impares son cero. El coeficiente de la potencia x^0 es A_1 y en consecuencia $A_1 = 0$. Al igualar a cero la suma de los coeficientes de la potencia x^{2s} se tiene

$$(2s+1)^2 A_{2s+1} + A_{2s-1} = 0, \qquad s = 1, 2, \cdots.$$

Puesto que $A_1 = 0$, se obtiene así $A_3 = 0$, $A_5 = 0, \cdots$, sucesivamente.

Ahora se iguala a cero la suma de los coeficientes de x^{2s+1}. Se obtiene así

$$-1 + 4A_2 = 0 \qquad \text{o} \qquad A_2 = \tfrac{1}{4} \qquad (s = 0)$$

y para los demás valores $s = 1, 2, \cdots$

$$\frac{(-1)^{s+1}}{2^{2s}(s+1)!\,s!} + (2s+2)^2 A_{2s+2} + A_{2s} = 0.$$

Para $s = 1$ de esta expresión se obtiene

$$\tfrac{1}{8} + 16A_4 + A_2 = 0 \qquad \text{o} \qquad A_4 = -\tfrac{3}{128}$$

y en general

$$(3) \qquad A_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\right), \qquad m = 1, 2, \cdots.$$

Utilizando la notación abreviada

$$(4) \qquad h_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$$

e insertando (3) y $A_1 = A_3 = \cdots = 0$ en (2), se llega al resultado

$$(5) \qquad \begin{aligned} y_2(x) &= J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m} \\ &= J_0(x)\ln x + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{3}{128}x^4 + - \cdots. \end{aligned}$$

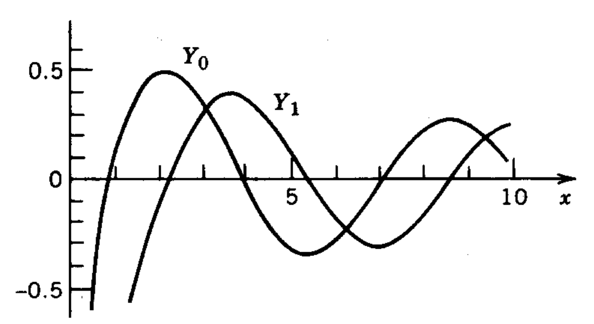


Figura 85. Funciones de Bessel de segunda clase. (Para una tabla pequeña, ver el apéndice 5.)

Puesto que J_0 y y_2 son funciones linealmente independientes, forman una base de soluciones de (1). Desde luego, se obtiene otra base si se sustituye y_2 por una solución particular independiente de la forma $a(y_2 + bJ_0)$ donde a ($\neq 0$) y b son constantes. Se acostumbra elegir $a = 2/\pi$ y $b = \gamma - \ln 2$, donde el número $\gamma = 0.577\,215\,664\,90 \cdots$ es la llamada **constante de Euler**, la cual se define como el límite de

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{s} - \ln s$$

cuando s tiende a infinito. La solución particular estándar así obtenida se denomina la **función de Bessel de segunda clase** *de orden cero* (figura 85) o **función de Neumann**[13] *de orden cero* y se denota por $Y_0(x)$. Por tanto [ver (4)]

$$(6) \qquad \boxed{Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}\, x^{2m}\right].}$$

Para $x > 0$ pequeña la función $Y_0(x)$ tiene un comportamiento similar al de $\ln x$ (ver la figura 85; ¿por qué?), y $Y_0(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0$.

Funciones de Bessel de segunda clase $Y_n(x)$

Para $\nu = n = 1, 2, \cdots$ puede obtenerse una segunda solución mediante manipulaciones similares a las empleadas en el caso $n = 0$, empezando con (10), sección 5.4. Resulta que en estos casos la solución también contiene un término logarítmico.

La situación aún no es del todo satisfactoria, ya que la segunda solución se define de manera diferente, dependiendo de si el orden de ν es un entero o no. A fin de

[13] CARL NEUMANN (1832-1925), matemático y físico alemán, nombrado profesor en Leipzig en 1868. Sus trabajos sobre la teoría del potencial motivaron el desarrollo en el campo de las ecuaciones integrales por VITO VOLTERRA (1860-1940) de Roma, ERIC IVAR FREDHOLM (1866-1927) de Estocolmo, cuyos famosos escritos de 1901-1903 causaron sensación en el mundo matemático de la época, y DAVID HILBERT (1862-1943) de Göttingen (ver la nota de pie de página sobre Hilbert de la sección 7.15 página 464).

conseguir uniformidad en el formalismo y la tabulación numérica, es conveniente adoptar una forma de la segunda solución que sea válida para todos los valores del orden. Esta es la razón para introducir una segunda solución estándar $Y_\nu(x)$ definida para toda ν mediante la fórmula

(7)
$$\text{(a)} \quad Y_\nu(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} \nu\pi}\left[J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)\right]$$
$$\text{(b)} \quad Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(x).$$

Esta función recibe el nombre de **función de Bessel de segunda clase** *de orden* ν o **función de Neumann**[14] *de orden* ν. En la figura 85 se ilustran $Y_0(x)$ y $Y_1(x)$.

Se discute la independencia lineal de J_ν y Y_ν.

Para un orden ν no entero la función $Y_\nu(x)$ es evidentemente una solución de la ecuación de Bessel ya que $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son soluciones de esa ecuación. Puesto que para esos ν las soluciones J_ν y $J_{-\nu}$ son linealmente independientes y Y_ν incluye a $J_{-\nu}$, las funciones J_ν y Y_ν son linealmente independientes. Además, puede demostrarse que el límite de (7b) existe y que Y_n es una solución de la ecuación de Bessel para un orden entero; ver la referencia [A9] en el apéndice 1. Se verá que el desarrollo de la serie de $Y_n(x)$ contiene un término logarítmico. Por tanto, $J_n(x)$ y $Y_n(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel. El desarrollo de la serie de $Y_n(x)$ puede obtenerse si las series (20) y (21), sección 5.5, para $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ se insertan en (7a) y después se hace que ν tienda a n; ver la referencia [A9] para los detalles; el resultado es

(8)
$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma\right) + \frac{x^n}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(h_m + h_{m+n})}{2^{2m+n}m!\,(m+n)!}x^{2m} - \frac{x^{-n}}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n}m!}x^{2m}$$

donde $x > 0$, $n = 0, 1, \cdots$, y

$$h_0 = 0, \qquad h_s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s} \qquad (s = 1, 2, \cdots),$$

y cuando $n = 0$ la última suma de (8) debe sustituirse por cero. Para $n = 0$ la representación (8) asume la forma (6). Además, puede demostrarse que

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x).$$

El resultado principal puede formularse como sigue.

---

[14] Ver la nota de pie de página 13. Las soluciones $Y_\nu(x)$ en ocasiones se denotan por $N_\nu(x)$; en la referencia [A9] se llaman **funciones de Weber**; la constante de Euler de (6) suele denotarse por C o $\ln\gamma$.

Teorema 1 (Solución general de la ecuación de Bessel)

Una solución general de la ecuación de Bessel para todos los valores de ν es

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x). \tag{9}$$

Por último, se menciona que existe la necesidad práctica de contar con soluciones de la ecuación de Bessel que sean complejas para valores reales de x. Para ello, es frecuente usar las soluciones

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iY_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iY_\nu(x) \end{aligned} \tag{10}$$

Estas funciones linealmente independientes se llaman **funciones de Bessel de tercera clase** *de orden* ν o *primera y segunda* **funciones de Hankel**[15] *de orden* ν.

Se termina así la discusión de las funciones de Bessel, salvo por su "ortogonalidad", que se explica en la sección 5.8. En la sección 11.10 se presentan aplicaciones en las oscilaciones.

Problemas de la sección 5.7

Algunas ecuaciones diferenciales más reducibles a la ecuación de Bessel (Ver también la sección 5.5.) Usando las sustituciones indicadas, reducir las siguientes ecuaciones a la ecuación diferencial de Bessel y encontrar una solución general en términos de funciones de Bessel.

1. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$
2. $x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (\lambda x = z)$
3. $xy'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \quad (\sqrt{x} = z)$
4. $4x^2y'' + 4xy' + (x - n^2)y = 0 \quad (\sqrt{x} = z)$
5. $x^2y'' + xy' + (4x^4 - \frac{1}{4})y = 0 \quad (x^2 = z)$
6. $xy'' + (1 + 2n)y' + xy = 0 \quad (y = x^{-n}u)$
7. $x^2y'' - 3xy' + 4(x^4 - 3)y = 0 \quad (y = x^2u,\ x^2 = z)$
8. $x^2y'' + (1 - 2\nu)xy' + \nu^2(x^{2\nu} + 1 - \nu^2)y = 0 \quad (y = x^\nu u,\ x^\nu = z)$
9. $x^2y'' + \frac{1}{4}(x + \frac{3}{4})y = 0 \quad (y = u\sqrt{x},\ \sqrt{x} = z)$
10. $y'' + xy = 0 \quad (y = u\sqrt{x},\ \frac{2}{3}x^{3/2} = z)$
11. $y'' + x^2y = 0 \quad (y = u\sqrt{x},\ \frac{1}{2}x^2 = z)$
12. $y'' + k^2xy = 0 \quad (y = u\sqrt{x},\ \frac{2}{3}kx^{3/2} = z)$
13. $y'' + k^2x^2y = 0 \quad (y = u\sqrt{x},\ \frac{1}{2}kx^2 = z)$
14. $y'' + k^2x^4y = 0 \quad (y = u\sqrt{x},\ \frac{1}{3}kx^3 = z)$
15. Demostrar que para $x > 0$ pequeña se tiene $Y_0(x) \approx 2\pi^{-1}(\ln \frac{1}{2}x + \gamma)$. Utilizando esta fórmula, calcular un valor aproximado del menor cero positivo de $Y_0(x)$ y compararlo con el valor más preciso 0.9.

[15] HERMANN HANKEL (1839-1873), matemático alemán.

16. Puede demostrarse que para x grande,

$$Y_n(x) \approx \sqrt{2/(\pi x)}\ \text{sen}\,(x - \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi). \tag{11}$$

Usando (11), trazar $Y_0(x)$ y $Y_1(x)$ para $0 < x \leq 15$. Usando (11), calcular los valores aproximados de los tres primeros ceros positivos de $Y_0(x)$ y compararlos con los valores más precisos 0.89, 3.96 y 7.09.

17. Demostrar que las funciones de Hankel (10) constituyen una base de soluciones de la ecuación de Bessel para cualquier ν.

Funciones de Bessel modificadas

18. La función $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$, $i = \sqrt{-1}$, se llama la *función modificada de Bessel de primera clase de orden* ν. Demostrar que $I_\nu(x)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0 \tag{12}$$

y que tiene la representación

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m!\, \Gamma(m + \nu + 1)}. \tag{13}$$

19. Demostrar que $I_\nu(x)$ es real para toda x real (y ν real), que $I_\nu(x) \neq 0$ para toda $x \neq 0$ real y que $I_{-n}(x) = I_n(x)$, donde n es cualquier entero.

20. Demostrar que otra solución de la ecuación diferencial (12) es la llamada *función de Bessel modificada de tercera clase* (en ocasiones: *de segunda clase*)

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\ \text{sen}\ \nu\pi}[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]. \tag{14}$$

5.8 PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE. ORTOGONALIDAD

Sturm y Liouville[16] demostraron que las ecuaciones de Bessel, Legendre y otras ecuaciones importantes en la ingeniería pueden considerarse desde un punto de vista común, con el resultado de que se obtienen familias de soluciones que resultan muy convenientes para la representación en series de funciones dadas que se presentan en mecánica, conducción de calor, electricidad y otras aplicaciones físicas. Se empieza con dos ejemplos de motivación, las ecuaciones de Bessel y de Legendre.

La ecuación de Bessel (con la variable independiente escrita como $\tilde{x}$ y $\dot{y} = dy/d\tilde{x}$, $\ddot{y} = d^2y/d\tilde{x}^2$)

$$\tilde{x}^2\ddot{y} + \tilde{x}\dot{y} + (\tilde{x}^2 - n^2)y = 0$$

[16] JACQUES CHARLES FRANÇOIS STURM (1803-1855), nació y estudió en Suiza y después se mudó a París, donde más tarde fue el sucesor de Poisson en la cátedra de mecánica de la Sorbona.

JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882), matemático francés y profesor en París, realizó aportaciones a diferentes campos de las matemáticas y se le conoce en particular por sus importantes trabajos en análisis complejo (teorema de Liouville: sección 13.6), funciones especiales, geometría diferencial y teoría de números.

puede transformarse haciendo $\tilde{x} = kx$; entonces $\dot{y} = y'/k$, $\ddot{y} = y''/k^2$ y se obtiene (al cancelarse k^2 y k en los dos primeros términos)

$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - n^2)y = 0$$

y al dividir entre x,

$$[xy']' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda x\right) y = 0 \qquad (\lambda = k^2).$$

De manera similar, la ecuación de Legendre (sección 5.3)

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

puede escribirse

$$[(1 - x^2)y']' + \lambda y = 0 \qquad [\lambda = n(n + 1)].$$

Ambas ecuaciones obtenidas son de la forma

(1)
$$\boxed{[r(x)y']' + [q(x) + \lambda p(x)]y = 0,}$$

que se conoce como **ecuación de Sturm-Liouville** y hay otras ecuaciones que pueden escribirse en la forma (1). La ecuación (1) más simple es

$$y'' + \lambda y = 0$$

(con $r = p = 1$ y $q = 0$).

La ecuación (1) se considera en un intervalo dado $a \leq x \leq b$ y se supone continuidad de p, q, r, r' así como

$$\boxed{p(x) > 0}$$

en este intervalo. En los puntos extremos (puntos frontera) a y b se imponen las **condiciones en la frontera**

(2)
$$\text{(a)} \quad \boxed{k_1y(a) + k_2y'(a) = 0}$$
$$\text{(b)} \quad \boxed{l_1y(b) + l_2y'(b) = 0}$$

con las constantes k_1, k_2 dadas, sin ser ambas cero, y las constantes l_1, l_2 dadas, sin ser ambas cero. El **problema con valores en la frontera** compuesto por (1) y (2) se llama **problema de Sturm-Liouville.**

Evidentemente, $y \approx 0$ es siempre una solución del problema, pero carece de uso práctico. Lo que quiere encontrarse son soluciones de (1) que satisfagan (2) sin ser una identidad con cero. A tal solución $y(x)$ —si existe— se le llama **eigenfunción** y al número λ para el que existe una eigenfunción se le llama **eigenvalor** del problema.

EJEMPLO 1 Cuerda elástica vibratoria

Encontrar los eigenvalores y las eigenfunciones del problema de Sturm-Liouville

$$\text{(3)} \qquad \text{(a)} \quad y'' + \lambda y = 0 \qquad \text{(b)} \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$$

Este problema surge, por ejemplo, si una cuerda elástica (una cuerda de violín, por ejemplo) se estira un poco y luego se fija en sus extremos $x = 0$ y $x = \pi$ y se la hace vibrar. Entonces $y(x)$ es la "función espacial" de la desviación $u(x, t)$ de la cuerda, la cual se supone de la forma $u(x, t) = y(x)w(t)$, donde t es el tiempo. (Este modelo se discutirá en las secciones 11.2-11.4.)

Solución. Para $\lambda = -\nu^2$ negativo una solución general de la ecuación es

$$y(x) = c_1 e^{\nu x} + c_2 e^{-\nu x}.$$

Por (3b) se obtiene $c_1 = c_2 = 0$, y $y \equiv 0$, de donde $y \equiv 0$, que no es una eigenfunción. Para $\lambda = 0$ la situación es similar. Para $\lambda = \nu^2$ positivo una solución general es

$$y(x) = A \cos \nu x + B \operatorname{sen} \nu x.$$

De la primera condición en la frontera se obtiene $y(0) = A = 0$. Entonces de la segunda condición en la frontera se obtiene

$$y(\pi) = B \operatorname{sen} \nu\pi = 0, \qquad \text{por tanto,} \qquad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Para $\nu = 0$ se tiene $y \equiv 0$. Para $\lambda = \nu^2 = 1, 4, 9, 16, \cdots$, al tomar $B = 1$, se obtiene

$$y(x) = \operatorname{sen} \nu x \qquad (\nu = 1, 2, \cdots).$$

En consecuencia, los eigenvalores del problema son $\lambda = \nu^2$, donde $\nu = 1, 2, \cdots$; y las eigenfunciones correspondientes son $y(x) = \operatorname{sen} \nu x$, donde $\nu = 1, 2, \cdots$. ∎

Existencia de eigenvalores

Eigenvalores de un problema de Sturm-Liouville (1), (2), incluso en número indefinido, existen bajo condiciones bastante generales sobre p, q, r en (1). (Condiciones suficientes son las del teorema 1 siguiente, junto con $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en $a < x < b$. Las demostraciones son complicadas; ver las referencias [A1] o [A6]en el apéndice 1.)

Naturaleza real de los eigenvalores

Además, si p, q, r y r' en (1) son funciones con valores reales y continuas en el intervalo $a \leq x \leq b$ y p es positiva en ese intervalo (o negativa en ese intervalo), entonces todos los eigenvalores del problema de Sturm-Liouville (1), (2) son reales. (En el apéndice 4 se incluye una demostración.)

Esto es lo que esperaría un ingeniero ya que los eigenvalores muchas veces se relacionan con frecuencias, energías u otras cantidades físicas que deben ser reales.

Ortogonalidad

Las eigenfunciones de los problemas de Sturm-Liouville poseen notables propiedades generales —ante todo, la ortogonalidad, que se define como sigue.

Definición de ortogonalidad

Las funciones $y_1, y_2, \cdots$ definidas en un intervalo $a \leq x \leq b$ se llaman **ortogonales** en $a \leq x \leq b$ con respecto a una **función peso** $p(x) > 0$ si

$$\int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x)\,dx = 0 \qquad \text{para } m \neq n. \tag{4}$$

La **norma** $\|y_m\|$ de y_m se define por

$$\|y_m\| = \sqrt{\int_a^b p(x)y_m^2(x)\,dx}. \tag{5}$$

Las funciones se llaman **ortonormales** en $a \leq x \leq b$ si son ortogonales en $a \leq x \leq b$ y todas tienen norma 1.

En lugar de "ortogonal con respecto a $p(x) = 1$" se dice simplemente "ortogonal". Así, las funciones $y_1, y_2, \cdots$ son **ortogonales** en un intervalo $a \leq x \leq b$ si

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\,dx = 0 \qquad \text{para } m \neq n. \tag{4'}$$

La **norma** $\|y_m\|$ de y_m se define entonces por

$$\|y_m\| = \sqrt{\int_a^b y_m^2(x)\,dx}. \tag{5'}$$

Y las funciones se llaman **ortonormales** en $a \leq x \leq b$ si todas son ortogonales ahí y todas tienen norma (5') igual a 1. ∎

EJEMPLO 2 Conjunto ortogonal, conjunto ortonormal

Las funciones $y_m(x) = \operatorname{sen} mx$, $m = 1, 2, \cdots$ forman un conjunto ortogonal en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, porque para $m \neq n$ se obtiene [ver (11) en el apéndice 3]

$$\int_{-\pi}^{\pi} y_m(x)y_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\,dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\,dx = 0.$$

La norma $\|y_m\|$ es igual a $\sqrt{\pi}$, ya que

$$\|y_m\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 mx\,dx = \pi \qquad (m = 1, 2, \cdots).$$

Por tanto, el conjunto ortonormal correspondiente, obtenido al dividir entre la norma, es

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\operatorname{sen} 3x}{\sqrt{\pi}}, \quad \cdots.$$ ∎

Ortogonalidad de las eigenfunciones

Teorema 1 (Ortogonalidad de las eigenfunciones)

Suponer que las funciones p, q, r y r' en la ecuación de Sturm-Liouville (1) *tienen valores reales y son continuas y que $p(x) > 0$ en el intervalo $a \le x \le b$. Sean $y_m(x)$ y $y_n(x)$ eigenfunciones del problema de Sturm-Liouville* (1), (2) *que corresponden a los eigenvalores diferentes λ_m y λ_n, respectivamente. Entonces y_m, y_n son ortogonales en ese intervalo con respecto a la función peso p.*

Si $r(a) = 0$, entonces (2a) *puede eliminarse del problema. Si $r(b) = 0$, entonces* (2b) *puede eliminarse.* [Entonces se requiere que y y y' permanezcan acotadas en tal punto y el problema se llama **singular**, por oposición a un **problema regular** en el que se usa (2).]

Si $r(a) = r(b)$, entonces (2) *puede sustituirse por las* **"condiciones periódicas en la frontera"**

$$y(a) = y(b), \qquad y'(a) = y'(b). \tag{6}$$

Nota. El problema con valores en la frontera compuesto por la ecuación de Sturm-Liouville (1) y las condiciones periódicas en la frontera (6) se conoce como **problema periódico de Sturm-Liouville.**

Demostración del teorema 1. Por hipótesis, y_m satisface

$$(ry_m')' + (q + \lambda_m p)y_m = 0,$$

y y_n satisface

$$(ry_n')' + (q + \lambda_n p)y_n = 0.$$

Al multiplicar la primera ecuación por y_n, la segunda por $-y_m$ y sumando, se obtiene

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n)py_m y_n &= y_m(ry_n')' - y_n(ry_m')' \\ &= [(ry_n')y_m - (ry_m')y_n]'\end{aligned}$$

donde es inmediata la comprobación de la última igualdad al efectuar la derivación indicada de la última expresión entre corchetes. Esta expresión es continua en $a \le x \le b$ ya que por hipótesis r y r' son continuas y y_m, y_n son soluciones de (1). Al integrar con respecto a x de a a b se obtiene así

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b py_m y_n\,dx = \Big[r(y_n'y_m - y_m'y_n)\Big]_a^b. \tag{7}$$

La expresión del segundo miembro es igual a

$$(8) \qquad \begin{aligned} &r(b)[y_n'(b)y_m(b) - y_m'(b)y_n(b)] \\ &-r(a)[y_n'(a)y_m(a) - y_m'(a)y_n(a)]. \end{aligned}$$

Será necesario ahora considerar varios casos, dependiendo de si r se cancela o no en a o en b.

Caso 1. Si $r(a) = 0$ y $r(b) = 0$, entonces la expresión en (8) es cero. En consecuencia, la expresión del primer miembro de (7) debe ser cero, ya que y_m, y_m', y_n, y_n' en el segundo miembro siguen siendo continuas en a y b (por hipótesis) y y son diferentes. Se obtiene así la ortogonalidad deseada

$$(9) \qquad \int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x)\,dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

sin usar las condiciones en la frontera (2).

Caso 2. Sea $r(b) = 0$, pero $r(a) \neq 0$. Entonces el primer renglón de (8) es cero. Se considera la expresión que queda en (8). Por (2a) se tiene

$$k_1 y_n(a) + k_2 y_n'(a) = 0,$$

$$k_1 y_m(a) + k_2 y_m'(a) = 0.$$

Sea $k_2 \neq 0$. Entonces al multiplicar la primera ecuación por $y_m(a)$ y la última por $-y_n(a)$ y sumar, se tiene

$$k_2[y_n'(a)y_m(a) - y_m'(a)y_n(a)] = 0.$$

Puesto que $k_2 \neq 0$, la expresión entre corchetes debe ser cero. Esta expresión es idéntica a la del último renglón de (8). Por tanto, (8) es cero y por (7) se obtiene (9), como antes. Si $k_2 = 0$, entonces por hipótesis $k_1 \neq 0$ y el razonamiento de la demostración es similar.

Caso 3. Si $r(a) = 0$, pero $r(b) \neq 0$, la demostración es similar a la del caso 2, pero en vez de (2a) tiene que usarse ahora (2b).

Caso 4. Si $r(a) \neq 0$ y $r(b) \neq 0$, es necesario usar ambas condiciones en la frontera (2) y proceder como en los casos 2 y 3.

Caso 5. Sea $r(a) = r(b)$. Entonces (8) asume la forma

$$r(b)[y_n'(b)y_m(b) - y_m'(b)y_n(b) - y_n'(a)y_m(a) + y_m'(a)y_n(a)].$$

Puede usarse (2) como antes y concluir que la expresión entre corchetes es cero. Sin embargo, se ve de inmediato que esto también se sigue de (6), por lo que puede reemplazarse (2) por (6). En consecuencia, de (7) se obtiene (9), como antes. Se termina así la demostración del teorema 1. ∎

EJEMPLO 3 Cuerda elástica vibratoria

La ecuación diferencial del ejemplo 1 es de la forma (1) donde $r = 1$, $q = 0$ y $p = 1$. Por el teorema 1 se sigue que las eigenfunciones son ortogonales en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$. ∎

EJEMPLO 4 Otra aplicación del teorema 1

Para el problema periódico de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(\pi) = y(-\pi), \qquad y'(\pi) = y'(-\pi)$$

a partir de la solución general $y = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx$, donde $k = \sqrt{\lambda}$, y de las condiciones en la frontera se obtienen las dos ecuaciones

$$A \cos k\pi + B \operatorname{sen} k\pi = A \cos(-k\pi) + B \operatorname{sen}(-k\pi)$$

$$-kA \operatorname{sen} k\pi + kB \cos k\pi = -kA \operatorname{sen}(-k\pi) + kB \cos(-k\pi).$$

Puesto que $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ y $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$, se obtiene

$$\operatorname{sen} k\pi = 0, \qquad \lambda = k^2 = n^2 = 0, 1, 4, 9, \cdots.$$

Por tanto, las eigenfunciones son

$$1, \qquad \cos x, \qquad \operatorname{sen} x, \qquad \cos 2x, \qquad \operatorname{sen} 2x, \qquad \cdots.$$

Por el teorema 1, cualesquiera dos de estas funciones que pertenezcan a eigenvalores diferentes son ortogonales en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ (obsérvese que $p(x) = 1$ para la ecuación presente), y la ortogonalidad de $\cos mx$ y $\operatorname{sen} mx$ para la misma m se sigue por integración,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \operatorname{sen} mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2mx \, dx = 0.$$

Para las normas se obtiene $\|1\| = \sqrt{2\pi}$ y $\sqrt{\pi}$ para todas las demás, como el estudiante puede comprobar al integrar 1, $\cos^2 x$, $\operatorname{sen}^2 x$, etc., de $-\pi$ a π. Por consiguiente, un conjunto ortonormal de eigenfunciones del problema presente es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\pi}}, \qquad \cdots.$$ ∎

EJEMPLO 5 Ortogonalidad de los polinomios de Legendre

La ecuación de Legendre es una ecuación de Sturm-Liouville (ver el principio de esta sección)

$$[(1 - x^2)y']' + \lambda y = 0, \qquad \lambda = n(n + 1),$$

con $r = 1 - x^2$, $q = 0$ y $p = 1$. Puesto que $r(-1) = r(1) = 0$, no se necesitan condiciones en la frontera, pero se tiene un ***problema singular de Sturm-Liouville*** en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Se sabe que para $n = 0, 1, \cdots$, de donde $\lambda = 0, 1 \cdot 2, 2 \cdot 3, \cdots$, los polinomios de Legendre $P_n(x)$ son soluciones del problema. Por tanto éstas son las eigenfunciones. Por el teorema 1 se sigue que son ortogonales en ese intervalo, es decir,

(10) $$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x) \, dx = 0 \qquad (m \neq n).$$

La norma es (ver el problema 9 de la sección 5.3)

(11) $$\|P_m\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} P_m(x)^2 \, dx} = \sqrt{\frac{2}{2m + 1}} \qquad (m = 0, 1, \cdots).$$ ∎

EJEMPLO 6 Ortogonalidad de las funciones de Bessel $J_n(x)$

La función de Bessel $J_n(\tilde{x})$ con el entero $n \geq 0$ fijo satisface la ecuación de Bessel (sección 5.5)

$$\tilde{x}^2\ddot{J}_n(x) + \tilde{x}\dot{J}_n(\tilde{x}) + (\tilde{x}^2 - n^2)J_n(\tilde{x}) = 0,$$

donde $\dot{J}_n = dJ_n/d\tilde{x}$, $\ddot{J}_n = d^2J_n/d\tilde{x}^2$. Al principio de esta sección esta ecuación se transformó, al hacer $\tilde{x} = kx$, en una ecuación de Sturm-Liouville

$$[xJ_n'(kx)]' + \left(-\frac{n^2}{x} + k^2x\right) J_n(kx) = 0$$

con $p(x) = x$, $q(x) = -n^2/x$, $r(x) = x$ y parámetro $\lambda = k^2$. Puesto que $r(0) = 0$, el teorema 1 implica la ortogonalidad en un intervalo $0 \leq x \leq R$ de las soluciones $J_n(kx)$ que son cero en $x = R$, es decir,

$$J_n(kR) = 0 \qquad (n \text{ fija }).$$

[Obsérvese que $q(x) = -n^2/x$ es discontinua en 0, pero esto no afecta la demostración del teorema 1.] Puede demostrarse (ver la referencia [A9]) que $J_n(\tilde{x})$ tiene una infinidad de ceros reales, por ejemplo, $\tilde{x} = \alpha_{1n} < \alpha_{2n} < \cdots$ (ver la figura 84 de la sección 5.5 para $n = 0$ y 1). Por tanto debe tenerse

(12) $$kR = \alpha_{mn}, \quad \text{por tanto} \quad k = k_{mn} = \alpha_{mn}/R \qquad (m = 1, 2, \cdots).$$

Con esto se demuestra

Teorema 2 (Ortogonalidad de las funciones de Bessel)

Para cada entero no negativo fijo n, las funciones de Bessel $J_n(k_{1n}x)$, $J_n(k_{2n}x)$, $J_n(k_{3n}x)$, $\cdots$, con k_{mn} como en (12), forman un conjunto ortogonal en el intervalo $0 \leq x \leq R$ con respecto al peso $p(x) = x$, esto es,

(13) $$\boxed{\int_0^R xJ_n(k_{mn}x)J_n(k_{jn}x)\, dx = 0} \qquad (j \neq m).$$

Por consiguiente, se ha obtenido una infinidad de conjuntos ortogonales, cada uno de los cuales corresponde a uno de los valores fijos de n. ∎

Problemas de la sección 5.8

1. Llevar a cabo los detalles de la demostración del teorema 1 en los casos 3 y 4.
2. **(Normalización de eigenfunciones)** Demostrar que si $y = y_0$ es una eigenfunción de (1), (2) correspondiente a algún eigenvalor $\lambda = \lambda_0$, entonces $y = \alpha y_0$ ($\alpha \neq 0$, arbitraria) es una eigenfunción de (1), (2) correspondiente a λ_0. (Obsérvese que esta propiedad puede usarse para "normalizar" eigenfunciones, es decir, para obtener eigenfunciones de norma 1.)

Encontrar los eigenvalores y las eigenfunciones de los siguientes problemas de Sturm-Liouville. En los problemas 3 al 9, verificar asimismo la ortogonalidad por cálculo directo.

3. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
4. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$
5. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$
6. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0$

7. $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
8. $y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$
9. $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0$
10. $(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0, \qquad y(1) = 0, \quad y(e) = 0.$ *Sugerencia.* Hacer $x = e^t$.
11. $(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0, \qquad y(1) = 0, \quad y'(e) = 0$
12. $(e^{2x}y')' + e^{2x}(\lambda + 1)y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$ *Sugerencia.* Hacer $y = e^{-x}u$.
13. $(x^{-1}y')' + (\lambda + 1)x^{-3}y = 0, \qquad y(1) = 0, \quad y(e) = 0$
14. Demostrar que los eigenvalores del problema de Sturm-Liouville $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$ se obtienen como soluciones de la ecuación $\tan k = -k$, donde $k = \sqrt{\lambda}$. Demostrar gráficamente que esta ecuación tiene una infinidad de soluciones $k = k_n$ y que las eigenfunciones son $y_n = \operatorname{sen} k_n x$ ($k \neq 0$). Demostrar que las k_n positivas son de la forma $k_n = \frac{1}{2}(2n + 1)\pi + \delta_n$, donde δ_n es positiva y pequeña y $\delta_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Calcular k_0 y $_1$ (por el método de Newton, sección 18.2).
15. Comprobar por cálculo directo que $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ forman un conjunto ortogonal en $-1 \leq x \leq 1$ (con $p(x) = 1$) y encontrar el conjunto ortonormal correspondiente, también por cálculo directo.
16. Determinar las constantes $a_0, b_0, \cdots, c_2$ tales que $y_0 = a_0$, $y_1 = b_0 + b_1x$, $y_2 = c_0 + c_1x + c_2x^2$ formen un conjunto ortonormal en $-1 \leq x \leq 1$ (con $p(x) = 1$). Comparar el resultado con el del problema 15 y comentar.
17. Demostrar que si las funciones $y_0(x), y_1(x), \cdots$ forman un conjunto ortogonal en un intervalo $a \leq x \leq b$ (con $p(x) = 1$), entonces las funciones $y_0(ct + k), y_1(ct + k), \cdots, c > 0$, forman un conjunto ortogonal en el intervalo $(a - k)/(c \leq t \leq (b - k)/(c$.
18. Usando el problema 17, deducir la ortogonalidad de 1, $\cos \pi x$, $\operatorname{sen} \pi x$, $\cos 2\pi x$, $\operatorname{sen} 2\pi x$, $\cdots$ en $-1 \leq x \leq 1$ ($p(x) = 1$) a partir de la del ejemplo 4 del texto.

Comprobar que las funciones dadas son ortogonales en el intervalo dado con respecto a las $p(x)$ dadas y que tienen la norma indicada.

19. $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$, $0 \leq x < \infty$, $p(x) = e^{-x}$, norma 1
20. $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $-1 \leq x \leq 1$, $p(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, $\|T_0\| = \sqrt{\pi}$, $\|T_1\| = \|T_2\| = \sqrt{\pi/2}$. *Sugerencia.* Hacer $x = \cos \theta$.

5.9 DESARROLLO DE EIGENFUNCIONES

¿Por qué son importantes los conjuntos ortogonales de eigenfunciones? ¿Para qué sirven? La respuesta es que producen desarrollos en series de funciones dadas en una forma simple. Esto incluye la famosa "serie de Fourier" y otros "desarrollos de eigenfunciones" que surgen de problemas de Sturm-Liouville, el pan de cada día para el físico y el ingeniero en la conducción de calor, dinámica de fluidos, mecánica de sólidos, trabajo numérico, etcétera.

Para explicar lo anterior se empieza introduciendo alguna notación práctica. Se denota por (y_m, y_n) la integral (4), sección 5.8, de la definición de ortogonalidad y ortonormalidad. Se trata de una convención; por tanto, para un conjunto ortonormal con respecto al peso $p(x) > 0$ en $a \leq x \leq b$,

$$(1) \qquad (y_m, y_n) = \int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ 1 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

donde $m = 0, 1, 2, \cdots$ y $n = 0, 1, 2, \cdots$. En forma aún más abreviada,

$$(1^*) \qquad (y_m, y_n) = \delta_{mn} \qquad \text{donde} \qquad \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ 1 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

se conoce como la **delta de Kronecker**.[17] Para la norma $\|y_m\|$ de y_m puede escribirse ahora

$$(2) \qquad \|y_m\| = \sqrt{(y_m, y_m)} = \sqrt{\int_a^b p(x) y_m^2(x)\, dx}.$$

Series ortogonales, desarrollo de eigenfunciones

Sean $y_0, y_1, \cdots$ un conjunto ortogonal con respecto al peso $p(x)$ en un intervalo $a \leq x \leq b$. Sea $f(x)$ una función dada que puede presentarse en términos de y_m por una serie convergente

$$(3) \qquad \boxed{f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x) + \cdots .}$$

Esta expresión recibe el nombre de **desarrollo ortogonal**, **serie de Fourier generalizada** o, si las y_m son eigenfunciones de un problema de Sturm-Liouville, **desarrollo de eigenfunciones**. [Se usa m en (3) porque más adelante se necesitará n como un índice fijo de funciones de Bessel.]

El punto es que debido a la ortogonalidad se obtienen los coeficientes desconocidos $a_0, a_1, \cdots$ en una manera simple; éstos se llaman las **constantes de Fourier** de $f(x)$ con respecto a $y_0, y_1, \cdots$. De hecho, si ambos miembros de (3) se multiplican por $p(x)y_n(x)$ (n fijo) y después se integra sobre $a \leq x \leq b$, se obtiene, suponiendo que la integración término a término sea posible,[18]

$$(f, y_n) = \int_a^b p f y_n\, dx = \int_a^b p \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m \right) y_n\, dx = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (y_m, y_n).$$

Ahora resulta crucial el hecho de que debido a la ortogonalidad, todas las integrales (y_m, y_n) del segundo miembro son cero, excepto cuando $m = n$; entonces $(y_n, y_n) = \|y_n\|^2$, por lo que la fórmula completa se reduce a

$$(3^*) \qquad (f, y_n) = a_n \|y_n\|^2 .$$

[17] LEOPOLD KRONECKER (1823-1891), matemático alemán, quien realizó en Berlín importantes aportaciones al álgebra, teoría de grupos y teoría de números.

[18] Esto se justifica, por ejemplo, en caso de convergencia uniforme (teorema 3, sección 14.6).

Escribiendo m en vez n, para ser consecuentes con la notación de (3), se llega a la fórmula deseada para las constantes de Fourier

$$(4) \qquad \boxed{a_m = \frac{(f, y_m)}{\|y_m\|^2} = \frac{1}{\|y_m\|^2}\int_a^b p(x)f(x)y_m(x)\,dx} \qquad (m = 0, 1, \cdots).$$

EJEMPLO 1 Serie de Fourier

En el problema de Sturm-Liouville del ejemplo 4 de la sección 5.8 se obtuvo un conjunto ortogonal 1, cos x, sen x, cos $2x$, sen $2x$, $\cdots$ en el intervalo $-\pi \le x \le \pi$ con $p(x) = 1$. Por tanto el desarrollo de eigenfunción correspondiente puede escribirse

$$(5) \qquad f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx).$$

Esta expresión se conoce como la **serie de Fourier** de $f(x)$. Las series de Fourier son por mucho los desarrollos de eigenfunción más importantes (de tal importancia para el ingeniero que se dedicarán dos capítulos, el 10 y el 11, al estudio de las mismas y de sus aplicaciones). Los coeficientes de (5) se llaman los **coeficientes de Fourier** de $f(x)$. A partir de (4) y de las normas $\sqrt{2\pi}$ y $\sqrt{\pi}$ (ejemplo 4, sección 5.8) se obtienen para estos coeficientes de Fourier las llamadas **fórmulas de Euler**

$$(6) \qquad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \qquad (m = 1, 2, \cdots) \\ b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} mx\,dx \qquad (m = 1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

Por ejemplo, para la **"onda cuadrada periódica"** de la figura 86, dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < \pi \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

a partir de (6) se obtienen los valores $a_0 = 0$ y

$$a_m = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-1)\cos mx\,dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos mx\,dx\right] = 0,$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-1)\operatorname{sen} mx\,dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \operatorname{sen} mx\,dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos mx}{m}\bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos mx}{m}\bigg|_{0}^{\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi m}[1 - 2\cos m\pi + 1] = \begin{cases} 4/\pi m & \text{si } m = 1, 3, \cdots, \\ 0 & \text{si } m = 2, 4, \cdots. \end{cases} \end{aligned}$$

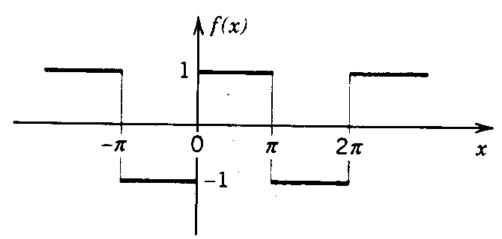


Figura 86. Onda cuadrada periódica del ejemplo 1.

Por tanto, la serie de Fourier de la onda cuadrada periódica es

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \cdots\right).$$

En el capítulo 10 se discutirán muchas más series de Fourier. ∎

EJEMPLO 2 Serie de Fourier-Legendre

Este es un desarrollo de eigenfunción

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(x) = a_0 P_0 + a_1 P_1(x) + \cdots = a_0 + a_1 x + a_2\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) + \cdots$$

en términos de polinomios de Legendre (sección 5.3), las eigenfunciones del problema de Sturm-Liouville del ejemplo 5 de la sección 5.8 en el intervalo $-1 \le x \le 1$. Se tiene $p(x) = 1$ para la ecuación de Legendre y por (4) se obtiene, debido a (11) de la sección 5.8,

$$\text{(7)} \qquad \boxed{a_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)\,dx,} \qquad m = 0, 1, \cdots.$$ ∎

EJEMPLO 3 Serie de Fourier-Bessel

En el ejemplo 6 de la sección 5.8 se obtuvo una infinidad de conjuntos ortogonales de funciones de Bessel, uno para cada $J_0, J_1, J_2, \cdots$. La ortogonalidad ocurre en un intervalo $0 \le x \le R$ con cualquier R positiva fija y con respecto al peso x. El conjunto para J_n es $J_n(k_{1n}x), J_n(k_{2n}x), J_n(k_{3n}x), \cdots$, donde n es fija, y k_{mn} se da en (12), sección 5.8. La serie de Fourier-Bessel correspondiente es

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_n(k_{mn}x) = a_1 J_n(k_{1n}x) + a_2 J_n(k_{2n}x) + a_3 J_n(k_{3n}x) + \cdots.$$

Se afirma que

$$\text{(8)} \qquad \|J_n(k_{mn}x)\|^2 = \int_0^R xJ_n{}^2(k_{mn}x)\,dx = \frac{R^2}{2}J_{n+1}^2(k_{mn}R),$$

de donde por (4) los coeficientes son (con $\alpha_{mn} = k_{mn}R$)

$$\text{(9)} \qquad \boxed{a_m = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^R xf(x)J_n(k_{mn}x)\,dx,} \qquad m = 1, 2, \cdots.$$

***Demostración de* (8).** La ecuación de Bessel en la forma Sturm-Liouville es (ver el ejemplo 6 de la sección 5.8)

$$[xJ_n'(kx)]' + \left(-\frac{n^2}{x} + k^2 x\right)J_n(kx) = 0.$$

Al multiplicar por $2xJ_n'(kx)$ se obtiene una ecuación que puede escribirse

$$\{[xJ_n'(kx)]^2\}' + (k^2x^2 - n^2)\{J_n{}^2(kx)\}' = 0,$$

como puede comprobarse efectuando las derivaciones indicadas $\{\cdots\}$ en el resultado. Al integrar con respecto a x de 0 a R se obtiene

(10) $$[xJ_n'(kx)]^2\Big|_0^R = -\int_0^R (k^2x^2 - n^2)\{J_n^2(kx)\}'\,dx.$$

Por (2) de la sección 5.6, escribiendo $\tilde{x}$ y n en lugar de x y ν, y $\dot{J}_n(\tilde{x}) = dJ_n/d\tilde{x}$, se obtiene

$$-n\tilde{x}^{-n-1}J_n(\tilde{x}) + \tilde{x}^{-n}\dot{J}_n(\tilde{x}) = -\tilde{x}^{-n}J_{n+1}(\tilde{x}).$$

Pasando el primer término al segundo miembro, multiplicando la ecuación por $\tilde{x}^{n+1}$ y haciendo $\tilde{x} = kx$, se obtiene

$$kxJ_n'(kx)\frac{1}{k} = nJ_n(kx) - kxJ_{n+1}(kx),$$

donde la prima denota la derivada con respecto a x. Por tanto, el primer miembro de (10) es igual a

$$\Big[[nJ_n(kx) - kxJ_{n+1}(kx)]^2\Big]_{x=0}^R .$$

Ahora bien, si $k = k_{mn} = \alpha_{mn}/R$, entonces $J_n(kR) = J_n(\alpha_{mn}) = 0$ y como $J_n(0) = 0$ [$n = 1, 2, \cdots$; ver (11), sección 5.5], ese primer miembro se reduce a

(11) $$k_{mn}^2R^2J_{n+1}^2(k_{mn}R).$$

Si se integra por partes el segundo miembro de (10) queda como

$$-\Big[(k^2x^2 - n^2)J_n^2(kx)\Big]_0^R + 2k^2\int_0^R xJ_n^2(kx)\,dx.$$

Para $k = k_{mn}$ la primera expresión es cero en $x = R$. También es cero en $x = 0$ porque $k^2x^2 - n^2 = 0$ si $n = x = 0$, y $J_n(kx) = 0$ si $x = 0$ y $n = 1, 2, \cdots$. A partir de lo anterior y de (11) se llega de inmediato a (8), terminándose así la demostración. ∎

Completitud de los conjuntos ortonormales

En la práctica, sólo se usan los conjuntos ortonormales que constan de un "número suficiente" de funciones, para que sea posible representar clases grandes de funciones —desde luego, todas ellas funciones continuas en un intervalo $a \le x \le b$ —mediante una serie de Fourier generalizada (3). Estos conjuntos ortonormales se llaman "*completos*" (en el conjunto de funciones considerado; abajo se da la definición). Por ejemplo, el conjunto ortonormal del ejemplo 1 es completo en el conjunto de funciones continuas[19] en el intervalo $-\pi \le x \le \pi$, y también lo son los conjuntos de polinomios de Legendre y de funciones de Bessel de los ejemplos 2 y 3 en sus respectivos intervalos.

[19] En realidad, funciones continuas por secciones y mucho más generales, pero una discusión detallada de la completitud necesitaría prerrequisitos no necesarios para este libro. Ver la referencia [9], secciones 3.4-3.7 en el apéndice 1. (Ahí los "conjuntos completos" se denominan "conjuntos totales", un término más moderno.)

En este contexto, convergencia es *convergencia en la norma* (también llamada *convergencia eficaz* o *cuadrática media*); esto es, se dice que una sucesión de funciones f_n es **convergente** con el límite f si

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\| = 0, \tag{12*}$$

desarrollada por (2) (donde puede omitirse la raíz cuadrada)

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b p(x)[f_k(x) - f(x)]^2 \, dx = 0. \tag{12}$$

Por consiguiente, (3) converge y representa a f si

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b p(x)[s_k(x) - f(x)]^2 \, dx = 0 \tag{13}$$

donde s_k es la k-ésima suma parcial de (3),

$$s_k(x) = \sum_{m=0}^{k} a_m y_m(x). \tag{14}$$

Por definición, un conjunto ortonormal $y_0, y_1, \cdots$ en un intervalo $a \le x \le b$ es **completo** *en un conjunto de funciones* S definidas en $a \le x \le b$ si es posible aproximar lo suficientemente cerca toda f que pertenezca a S por medio de una combinación lineal $a_0y_0 + a_1y_1 + \cdots + a_ky_k$, es decir, en términos técnicos, si para todo $\epsilon > 0$ pueden encontrarse las constantes $a_0, \cdots, a_k$ (con k suficientemente grande) tales que

$$\|f - (a_0y_0 + \cdots + a_ky_k)\| < \epsilon. \tag{15}$$

Una interesante consecuencia básica de la integral de (13) se obtiene de la siguiente manera. Efectuando la elevación al cuadrado y usando (14), se tiene primero

$$\int_a^b p(x)[s_k(x) - f(x)]^2 \, dx = \int_a^b ps_k^2 \, dx - 2\int_a^b pfs_k \, dx + \int_a^b pf^2 \, dx$$

$$= \int_a^b p\left[\sum_{m=0}^{k} a_m y_m\right]^2 dx - 2\sum_{m=0}^{k} a_m \int_a^b pfy_m \, dx + \int_a^b pf^2 \, dx.$$

La primera integral del segundo miembro es igual a a_m^2 porque $\int py_my_l \, dx = 0$ para $m \ne l$ e $\int py_m^2 \, dx = 1$. En la segunda sumatoria de la derecha, la integral es igual a a_m, por (4) con $\|y_m\|^2 = 1$. Por lo tanto, el segundo miembro se reduce a

$$-\sum_{m=0}^{k} a_m^2 + \int_a^b pf^2 \, dx.$$

Esta expresión es no negativa debido a que en la fórmula anterior el integrando del primer miembro y en consecuencia la integral son no negativos. Con esto se demuestra la importante **desigualdad de Bessel**

$$\sum_{m=0}^{k} a_m^2 \leqq \|f\|^2 = \int_a^b p(x)f(x)^2\,dx \qquad (k = 1, 2, \cdots). \tag{16}$$

Aquí puede hacerse $k \to \infty$, ya que los primeros miembros forman una sucesión monótona creciente que está acotada por la derecha, por lo que se tiene la convergencia por el conocido teorema 1 del apéndice 3 (ver A3.3). En consecuencia,

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m^2 \leqq \|f\|^2. \tag{17}$$

Además, si $y_0, y_1, \cdots$ es completo en un conjunto de funciones S, entonces (13) es válida para toda f que pertenezca a S. Por (15) esto implica la igualdad en (16) con $k \to \infty$; por tanto, en el caso de completitud la llamada **igualdad de Parseval**

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m^2 = \|f\|^2 = \int_a^b p(x)f(x)^2\,dx \tag{18}$$

es válida para toda f de S.

Como consecuencia de (18), se demuestra que en el caso de *completitud* no hay ninguna función que sea ortogonal a *cada* función del conjunto ortonormal, con la excepción trivial de una función con norma cero:

Teorema 1 (Completitud)

Sea $y_0, y_1, \cdots$ un conjunto ortonormal completo en $a \leq x \leq b$ en un conjunto de funciones S. Entonces si una función f pertenece a S y es ortogonal a cada y_m, debe tener norma cero. En particular, si f es continua, debe formar una identidad con cero.

Demostración. Por el supuesto de ortogonalidad se ve que el primer miembro de (18) debe ser cero. Con esto se demuestra el primer enunciado. Si f es continua, entonces $\|f\| = 0$ implica que $f(x) \equiv 0$, como puede verse directamente por (2), con f en lugar de y_m. ∎

EJEMPLO 4 Series de Fourier

El conjunto ortonormal del ejemplo 1 es completo en el conjunto de funciones continuas en $-\pi \leq x \leq \pi$. Comprobar directamente que $f(x) \equiv 0$ es la única función continua ortogonal a todas las funciones de ese conjunto.

Solución. Sea f una función continua cualquiera. Por la ortogonalidad (pueden omitirse $\sqrt{2\pi}$ y $\sqrt{\pi}$),

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot f(x)\, dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx = 0$$

Por tanto, $a_m = 0$ y $b_m = 0$ en (6) para toda m, por lo que (3) se reduce a $f(x) = 0$. ■

Aquí termina el capítulo 5 sobre series de potencias y métodos de Frobenius, que son indispensables en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables, cuyos casos más importantes se han discutido y resuelto. Se ha visto asimismo que estas últimas son fuentes importantes de funciones especiales con propiedades de ortogonalidad que las hacen apropiadas para la representación en series ortogonales de funciones dadas.

Problemas de la sección 5.9

Polinomios de Legendre. Representar los siguientes polinomios en términos de polinomios de Legendre.

1. $5x^3 + x$

2. $10x^3 - 3x^2 - 5x - 1$

3. $1, x, x^2, x^3$

4. $35x^4 + 15x^3 - 30x^2 - 15x + 3$

En cada caso, obtener los primeros términos del desarrollo de $f(x)$ en términos de polinomios de Legendre y graficar las tres primeras sumas parciales.

5. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x & \text{si } \;\; 0 < x < 1 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } \;\; 0 < x < 1 \end{cases}$

7. $f(x) = |x| \;\text{ si } -1 < x < 1$

8. $f(x) = e^x \;\text{ si } -1 < x < 1$

9. Demostrar que las funciones $P_n(\cos\theta)$, $n = 0, 1, \cdots$, forman un conjunto ortogonal en el intervalo $0 \le \theta \le \pi$ con respecto a la función peso sen θ.

Polinomios de Chebyshev[20] Las funciones

$$T_n(x) = \cos\,(n \operatorname{arc\,cos} x), \quad U_n(x) = \frac{\operatorname{sen}\,[(n+1) \operatorname{arc\,cos} x]}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

se llaman los *polinomios de Chebyshev de primera y segunda clase*, respectivamente.

10. Demostrar que

$$T_0 = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$U_0 = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_2(x) = 4x^2 - 1, \quad U_3(x) = 8x^3 - 4x.$$

[20] PAFNUTI CHEBYSHEV (1821-1894), matemático ruso, conocido por sus trabajos en teoría de aproximaciones y teoría de números. Otra transliteración de su nombre es TCHEBICHEF.

11. Demostrar que los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ son ortogonales en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ con respecto a la función peso $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. *Sugerencia.* Para evaluar la integral, hacer arc cos $x = \theta$.

12. Demostrar que $T_n(x)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$(1 - x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0.$$

Polinomios de Laguerre.[21] Las funciones

$$L_0 = 1, \qquad L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

se llaman *polinomios de Laguerre.*

13. Demostrar que

$$L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 1 - 2x + x^2/2, \quad L_3(x) = 1 - 3x + 3x^2/2 - x^3/6.$$

14. Comprobar por integración directa que L_0, $L_1(x)$, $L_2(x)$ son ortogonales en el eje positivo $0 \leq x < \infty$ con respecto a la función peso $p(x) = e^{-x}$.

15. Demostrar que el conjunto de todos los polinomios de Laguerre es ortogonal en $0 \leq x < \infty$ con respecto a la función peso $p(x) = e^{-x}$.

16. Demostrar que

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}\binom{n}{m} x^m = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{4}x^2 - + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n.$$

17. $L_n(x)$ satisface la ecuación diferencial de Laguerre $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$. Comprobar este hecho para $n = 0, 1, 2, 3$.

Polinomios de Hermite.[22]. Las funciones

$$He_0 = 1, \qquad He_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}), \qquad n = 1, 2, \cdots$$

se llaman *polinomios de Hermite.*

Nota. Como ocurre con varias funciones especiales, en los textos se incluye más de una notación y en ocasiones los polinomios de Hermite se definen como las funciones

$$H_0{}^* = 1, \qquad H_n{}^*(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

Esta notación difiere de la definición dada aquí, la cual se usará de preferencia en las aplicaciones.

18. Demostrar que

$$He_1(x) = x, \; He_2(x) = x^2 - 1, \; He_3(x) = x^3 - 3x, \; He_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3.$$

---

[21] EDMOND LAGUERRE (1834-1886), matemático francés, quien realizó trabajos de investigación en geometría y teoría de series infinitas.

[22] CHARLES HERMITE (1822-1901), matemático francés, conocido por sus trabajos de álgebra y teoría de números. El gran HENRI POINCARÉ (1854-1912) fue uno de sus discípulos.

19. Demostrar que los polinomios de Hermite se relacionan con los coeficientes de la serie de Maclaurin

$$e^{tx-t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)t^n$$

por la fórmula $He_n(x) = n!a_n(x)$. *Sugerencia.* Obsérvese que $tx - t^2/2 = x^2/2 - (x-t)^2/2$. (A la expresión exponencial se le llama la **función generadora** de He_n.)

20. Demostrar que los polinomios de Hermite satisfacen la relación

$$He_{n+1}(x) = xHe_n(x) - He_n'(x).$$

21. Derivando con respecto a x la función generadora del problema 19, demostrar que

$$He_n'(x) = nHe_{n-1}(x).$$

Usando esta expresión y la fórmula del problema 20 (con $n - 1$ en lugar de n), demostrar que $He_n(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$y'' - xy' + ny = 0.$$

22. Usando la ecuación diferencial del problema 21, demostrar que $w = e^{-x^2/4}He_n(x)$ es una solución de la **ecuación de Weber**[23]

$$w'' + (n + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}x^2)w = 0 \qquad (n = 0, 1, \cdots).$$

23. Demostrar que los polinomios de Hermite son ortogonales en el eje x $-\infty < x < \infty$ con respecto a la función peso $p(x) = e^{-x^2/2}$.

Funciones de Bessel

24. Trazar $J_0(\lambda_{10}x)$, $J_0(\lambda_{20}x)$, $J_0(\lambda_{30}x)$ y $J_0(\lambda_{40}x)$ para $R = 1$ en el intervalo $0 \le x \le 1$. (Usar la tabla A1 del apéndice 5.)

Desarrollar las siguientes funciones $f(x)$ $(0 < x < R)$ en una **serie de Fourier-Bessel**

$$f(x) = a_1J_0(\lambda_{10}x) + a_2J_0(\lambda_{20}x) + a_3J_0(\lambda_{30}x) + \cdots$$

y trazar las primeras sumas parciales.

25. $f(x) = 1$. *Sugerencia.* Usar (1), sección 5.6.

26. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < R/2 \\ 0 & \text{si} \quad R/2 < x < R \end{cases}$

27. $f(x) = \begin{cases} k & \text{si} \quad 0 < x < a \\ 0 & \text{si} \quad a < x < R \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < x < R/2 \\ k & \text{si} \quad R/2 < x < R \end{cases}$

29. $f(x) = 1 - x^2$ $(R = 1)$. *Sugerencia.* Usar (1), sección 5.6, y la integración por partes.[24]

30. $f(x) = R^2 - x^2$

31. $f(x) = x^2$

32. $f(x) = x^4$

[23] HEINRICH WEBER (1842-1913), matemático alemán.

[24] Este problema se necesitará en el ejemplo 1 de la sección 11.10.

33. Demostrar que $f(x) = x^n$ $(0 < x < 1,\ n = 0, 1, \cdots)$ puede representarse por la serie de Fourier-Bessel

$$x^n = \frac{2J_n(\alpha_{1n}x)}{\alpha_{1n}J_{n+1}(\alpha_{1n})} + \frac{2J_n(\alpha_{2n}x)}{\alpha_{2n}J_{n+1}(\alpha_{2n})} + \cdots .$$

34. Encontrar una representación de $f(x) = x^n$ $(0 < x < R,\ n = 0, 1, \cdots)$ similar a la del problema 33.

35. Representar $f(x) = x^3$ $(0 < x < 2)$ por una serie de Fourier-Bessel que incluya J_3.

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 5

1. ¿Qué es una serie de potencias? ¿Puede contener potencias negativas? ¿Potencias fraccionarias? ¿Cómo se probaría la convergencia?

2. Siempre se tomó $x_0 = 0$ y se consideraron series de potencias en potencias de x. ¿Por qué no fue esta una restricción esencial del carácter general de las afirmaciones?

3. ¿Puede reducirse una solución en series de potencias a un polinomio? ¿A una constante?

4. ¿Por qué se generalizó el método de las series de potencias? Dar una ecuación en la que se aplique el método de Frobenius pero no el de las series de potencias.

5. ¿Es posible reducir una solución en el método de Frobenius a una serie de potencias ?

6. ¿Qué es la ecuación indicial? ¿Cómo surgió? ¿Para qué sirve?

7. ¿Puede tener raíces complejas la ecuación indicial?

8. ¿Qué quiere decir que una función es analítica en un punto? ¿Por qué surgió este concepto en este capítulo?

9. ¿Para cuál de las dos ecuaciones, la de Legendre y la de Bessel, se necesitó el método de Frobenius?

10. En el método de Frobenius se tuvieron tres casos. ¿Cuáles fueron? ¿En cuales de ellos aparece la ecuación de Euler-Cauchy y en cuáles no?

11. ¿Qué es un problema de Sturm-Liouville? Dar un ejemplo.

12. ¿Qué es un desarrollo de eigenfunciones? ¿Cómo surgió en los problemas de Sturm-Liouville?

13. ¿Por qué es importante la ortogonalidad de las eigenfunciones?

14. ¿Qué recuerda el estudiante de las series de Fourier-Legendre?

15. ¿Qué sabe el estudiante acerca de la ortogonalidad de las funciones de Bessel?

Utilizando uno de los dos métodos discutidos en este capítulo, encontrar una base de soluciones de las siguientes ecuaciones. Intentar identificar las series obtenidas como desarrollos de funciones conocidas.

16. $y'' - 4y = 0$

17. $x(1 - x)y'' + 2(1 - 2x)y' - 2y = 0$

18. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$

19. $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$

20. $(x - 1)^2y'' + (x - 1)y' - y = 0$

21. $2x(x - 1)y'' - (x + 1)y' + y = 0$

22. $xy'' + 2y' + xy = 0$

23. $x(x+1)^2y'' + (1-x^2)y' + (x-1)y = 0$

24. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$

25. $x^2(x+1)^2y'' - (5x^2+8x+3)xy' + (9x^2+11x+4)y = 0$

Usando las sustituciones indicadas, resolver en términos de funciones de Bessel:

26. $x^2y'' + (x^2 + \frac{1}{4})y = 0 \qquad (y = u\sqrt{x})$

27. $xy'' + 3y' + xy = 0 \qquad (y = u/x)$

28. $x^2y'' + xy' + 4(x^4 - \nu^2)y = 0 \qquad (x^2 = z)$

29. $xy'' - y' + xy = 0 \qquad (y = xu)$

30. $y'' - xy = 0 \qquad (y = u\sqrt{x},\ \frac{2}{3}ix^{3/2} = z;\ i = \sqrt{-1};$ **ecuación de Airy)**

Demostrar la ortogonalidad en el intervalo dado y determinar el conjunto ortonormal de funciones correspondiente.

31. $1, \cos \pi x, \cos 2\pi x, \cos 3\pi x, \cdots, \quad -1 \leqq x \leqq 1$

32. $1, \cos \omega x, \cos 2\omega x, \cos 3\omega x, \cdots, \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi/\omega$

33. $1, \cos 4mx, \operatorname{sen} 4mx, m = 1, 2, \cdots, \quad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$

34. $1, \cos(\pi x/L), \operatorname{sen}(\pi x/L), \cos(2\pi x/L), \operatorname{sen}(2\pi x/L), \cdots, \quad 0 \leqq x \leqq 2L$

35. $P_0(\frac{1}{2}x), P_1(\frac{1}{2}x), P_2(\frac{1}{2}x), \quad -2 \leqq x \leqq 2;$ ver la sección 5.3.

Encontrar los eigenvalores y las eigenfunciones de los siguientes problemas.

36. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\frac{1}{2}\pi) = 0$

37. $(xy')' + \lambda y/x = 0 \quad (\lambda > 0), \quad y(1) = 0, \quad y(e^{\pi}) = 0.$ *Sugerencia.* Hacer $x = e^t$.

38. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2L), \quad y'(0) = y'(2L)$

39. $(xy')' + \lambda y/x = 0 \quad (\lambda > 0), \quad y(e^{1/2}) = 0, \quad y(e^{3/2}) = 0$

40. $x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - 1)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

Hacer el desarrollo en términos de polinomios de Legendre:

41. $5x^3 - 3x^2 - x - 1$

42. $1, x, x^2, x^4$

43. $70x^4 - 45x^2 - 3$

44. $231(x^6 + 1)$

45. $(x-3)^3$

Resumen del capítulo 5

Soluciones en series. Funciones especiales

El **método de las series de potencias** es un procedimiento general para resolver ecuaciones diferenciales lineales

$$(1) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

con $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ variables; también se aplica a ecuaciones de orden superior. Las soluciones se obtienen en forma de series de potencias; de ahí su nombre.

En este método se sustituye en (1) una serie de potencias (con cualquier centro x_0, por ejemplo, $x_0 = 0$)

(2) $$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

así como $y'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots$ y $y''(x)$. De este modo, se determinan los coeficientes indeterminados a_m en (2), como se explicó en la sección 5.1 y otras secciones. Se obtienen así las soluciones y representadas por series de potencias. Si $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son **analíticas** en $x = x_0$ (sección 5.2), entonces (1) tiene soluciones de esta forma. Lo mismo es válido si $\tilde{h}(x)$, $\tilde{p}(x)$, $\tilde{q}(x)$ y $\tilde{r}(x)$ de

$$\tilde{h}(x)y'' + \tilde{p}(x)y' + \tilde{q}(x)y = \tilde{r}(x)$$

son analíticas en $x = x_0$ y $\tilde{h}(x_0) \neq 0$.

El **método de Frobenius** (sección 5.4) amplía el método de las series de potencias a ecuaciones

(3) $$y'' + \frac{a(x)}{x - x_0}y' + \frac{b(x)}{(x - x_0)^2}y = 0$$

cuyos coeficientes son **singulares** (es decir, no analíticos) en $x = x_0$, pero no "muy malos", a saber, que son tales que $a(x)$ y $b(x)$ son analíticas en $x = x_0$. Entonces (3) tiene al menos una solución de la forma

(4) $$y(x) = x^r[a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots],$$

donde r puede ser un número real cualquiera o incluso un número complejo y se determina sustituyendo (4) en (3); se obtienen también las a_m. Una segunda solución independiente puede tener una forma similar (con diferentes r y a_m) o puede incluir un término logarítmico.

"Funciones especiales" es un nombre común para las funciones superiores, por oposición a las funciones usuales del cálculo elemental. Surgen de (1) o (3) y adquieren un nombre y notación especiales si son importantes en las aplicaciones. De esta clase, y de particular utilidad para el ingeniero y el físico, son la **ecuación de Legendre** y los polinomios de Legendre $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\cdots$ (sección 5.3), la **ecuación hipergeométrica** y las funciones hipergeométricas $F(a, b, c; x)$ (sección 5.4) y la **ecuación de Bessel** y las funciones de Bessel J_ν y Y_ν (secciones 5.5-5.7). De hecho, las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden son una de las dos fuentes principales de estas "funciones superiores". [Otras funciones especiales surgen de integrales no elementales, como las que se enlistan en el apéndice 3. La función gamma (sección 5.5) es de ese tipo.]

En la mayoría de los casos, el modelado en el que intervienen ecuaciones diferenciales lleva a problemas con valor inicial (capítulo 2) o con valores en la frontera. Muchos de estos últimos pueden escribirse en la forma de **problemas de Sturm-Liouville** (sección 5.8). Se trata de **problemas de eigenvalores** en los que interviene un parámetro λ, que en las aplicaciones puede relacionarse

con frecuencias, energías u otras cantidades físicas. Las soluciones de estos problemas, llamadas *eigenfunciones*, tienen varias propiedades generales en común, en particular la de suma importancia de **ortogonalidad** (sección 5.8). Esto lleva a los **desarrollos de eigenfunciones** (sección 5.9), como los que incluyen las funciones coseno y seno ("*series de Fourier*"), polinomios de Legendre o funciones de Bessel.

Capítulo



Transformada de Laplace

Con el método de la transformada de Laplace se resuelven ecuaciones diferenciales y problemas con valores inicial y en la frontera correspondientes. El proceso de solución consta de tres pasos principales:

Primer paso. El problema "difícil" dado se transforma en una ecuación "simple" (**ecuación subsidiaria**).
Segundo paso. La ecuación subsidiaria se resuelve exclusivamente con manipulaciones algebraicas.
Tercer paso. La solución de la ecuación subsidiaria se transforma de nuevo para obtener la solución del problema dado.

Así, la transformada de Laplace reduce el problema de resolver una ecuación diferencial a un problema algebraico. El tercer paso se facilita mediante el uso de tablas, cuyo papel es similar al de las tablas de integrales en la integración. (Dichas tablas también son útiles en el primer paso.) Al final del capítulo se incluye una tabla de este tipo.

A este cambio de operaciones de cálculo a operaciones *algebraicas* con las transformadas se le llama **cálculo operacional**, un área muy importante de las matemáticas aplicadas, y el método de la transformada de Laplace es prácticamente el más importante a este fin. (Para otro método, el de la transformada de Fourier, ver la sección 10.11.) De hecho, la transformada de Laplace tiene numerosas aplicaciones en la ingeniería. Resulta particularmente útil en problemas en que la fuerza impulsora (mecánica o eléctrica) presenta discontinuidades, es impulsiva o es periódica pero no una simple función seno o coseno. Otra de sus ventajas es que con este método los problemas se resuelven de manera directa. De hecho, los problemas con valor inicial se resuelven sin necesidad de determinar primero una solución general. Asimismo, las ecuaciones no homogéneas se resuelven sin necesidad de resolver primero la ecuación homogénea correspondiente.

En este capítulo se considera la transformada de Laplace desde un punto de vista práctico y su uso se ilustra por medio de importantes problemas de ingeniería, muchos de ellos relacionados con ecuaciones diferenciales *ordinarias*.

Las **ecuaciones diferenciales parciales** también pueden abordarse con la transformada de Laplace, como se verá en la sección 11.13.

La sección 6.9 contiene una lista de fórmulas generales y la sección 6.10 una lista de transformadas F(s) y las funciones f(t) correspondientes.

Prerrequisitos para este capítulo: Capítulo 2.
Secciones que pueden omitirse en un curso muy corto: 6.5-6.7.
Bibliografía: Apéndice 1, parte A.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

6.1 TRANSFORMADA DE LAPLACE. TRANSFORMADA INVERSA. LINEALIDAD

Sea $f(t)$ una función dada que esté definida para toda $t \geqq 0$. Se multiplica $f(t)$ por e^{-st} y se integra con respecto a t de cero a infinito. Entonces, si la integral resultante existe (es decir, si tiene un valor finito), será una función de s, por ejemplo, $F(s)$:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Esta función $F(s)$ de la variable s se llama la **transformada de Laplace**[1] de la función original $f(t)$ y se denotará por $\mathscr{L}(f)$. Por tanto

$$F(s) = \mathscr{L}(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \tag{1}$$

Recuérdese: la función dada depende de t y la nueva función (su transformada) depende de s.

La operación que acaba de describirse, mediante la cual se obtiene $F(s)$ a partir de una $f(t)$ dada, también se llama **transformación de Laplace**.

Además, la función original $f(t)$ de (1) se llama la *transformada inversa* o **inversa** de $F(s)$ y se denotará por $\mathscr{L}^{-1}(F)$; es decir, se escribirá

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F).$$

[1] PIERRE SIMON MARQUIS DE LAPLACE (1749-1827), gran matemático francés, fue profesor en París. Desarrolló las bases de la teoría del potencial y realizó importantes aportaciones a la mecánica celeste, la astronomía en general, las funciones especiales y la teoría de la probabilidad. Napoleón Bonaparte fue su alumno durante un año. En cuanto a las interesantes actividades políticas de Laplace, ver la referencia [2], p. 623, en el apéndice 1.

Las poderosas técnicas prácticas de la transformada de Laplace fueron desarrolladas más de un siglo después por el ingeniero eléctrico inglés OLIVER HEAVISIDE (1850-1925) y con frecuencia se les conocía como "cálculo de Heaviside".

Notación

Las funciones originales se denotan por minúsculas y sus transformadas por las mismas letras en mayúsculas, de tal modo que $F(s)$ denota la transformada de $f(t)$ y $Y(s)$ denota la transformada de $y(t)$, etcétera.

EJEMPLO 1 Transformada de Laplace

Sea $f(t) = 1$ cuando $t \geqq 0$. Encontrar $F(s)$.

Solución. A partir de (1) se obtiene por integración

$$\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty};$$

por tanto, cuando $s > 0$,

$$\mathscr{L}(1) = \frac{1}{s}.$$

La notación usada al final de la primera expresión es conveniente, pero debe aclararse lo siguiente. El intervalo de integración de (1) es infinito. Esta integral se llama **integral impropia** y, por definición, se evalúa de acuerdo con la regla

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-st} f(t)\, dt.$$

En consecuencia, la notación empleada significa

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\, dt = \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T = \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} e^{0} \right] = \frac{1}{s} \qquad (s > 0).$$

Se usará esa notación en todo el capítulo. ∎

EJEMPLO 2 Transformada de Laplace

Sea $f(t) = e^{at}$ cuando $t \geqq 0$, donde a es una constante. Encontrar $\mathscr{L}(f)$.

Solución. De nuevo por (1),

$$\mathscr{L}(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at}\, dt = \frac{1}{a-s} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty};$$

por tanto, cuando $s - a > 0$,

$$\mathscr{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}.$$ ∎

¿Es necesario continuar de esta manera y obtener la transformada de una función tras otra directamente a partir de la definición? La respuesta es no. Y la razón de ello es que la transformada de Laplace posee muchas propiedades generales que resultan convenientes a ese fin. Ante todo, la transformada de Laplace es una "operación lineal", como la derivación y la integración. Por esto se entiende lo siguiente.

Teorema 1 (Linealidad de la transformada de Laplace)

La transformada de Laplace es una operación lineal; es decir, para cualesquiera funciones f(t) y g(t) cuyas transformadas de Laplace existan y cualesquiera constantes a y b,

$$\boxed{\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.}$$

Demostración. Por definición,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}[af(t) + bg(t)]\,dt \\ &= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt \\ &= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.\end{aligned}$$ ∎

EJEMPLO 3 Una aplicación del teorema 1

Sea $f(t) = \cosh at = (e^{at} + e^{-at})/2$. Encontrar $\mathcal{L}(f)$.

Solución. Por el teorema 1 y el ejemplo 2 se obtiene

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right);$$

es decir, cuando $s > a\ (\geqq 0)$,

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{s}{s^2 - a^2}.$$ ∎

EJEMPLO 4 Una reducción simple a fracciones parciales

Sea $F(s) = \dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$, $a \neq b$. Encontrar $\mathcal{L}^{-1}(F)$.

Solución. La inversa de una transformación lineal es lineal (ver el problema 40). Por reducción a fracciones parciales, a partir del ejemplo 2 se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(F) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{a-b}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-b}\right)\right] = \frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt}).\end{aligned}$$

Con esto se demuestra la fórmula 11 de la tabla de la sección 6.10 cerca del final del capítulo. ∎

EJEMPLO 5 Deducción de la fórmula 12 de la tabla de la sección 6.10

Sea $F(s) = \dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$, $a \neq b$. Encontrar $\mathcal{L}^{-1}(F)$.

Solución. Usando la idea del ejemplo 4 se obtiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{s-a} - \frac{b}{s-b}\right)\right\} = \frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt}).$$ ∎

Tabla 6.1. Algunas funciones $f(t)$ y sus transformadas de Laplace $\mathscr{L}(f)$

	$f(t)$	$\mathscr{L}(f)$		$f(t)$	$\mathscr{L}(f)$
1	1	$1/s$	6	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
2	t	$1/s^2$	7	$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
3	t^2	$2!/s^3$	8	$\operatorname{sen} \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
4	t^n ($n = 0, 1, \cdots$)	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	9	$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
5	t^a (a positiva)	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	10	$\operatorname{senh} at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$

Una breve lista de algunas funciones elementales importantes y sus transformadas de Laplace se presenta en la tabla 6.1 y una lista más extensa en la sección 6.10. Ver asimismo las referencias en el apéndice 1, parte A.

Una vez que se conocen las transformadas de la tabla 6.1, prácticamente todas las transformadas que se necesitarán pueden obtenerse mediante el uso de algunos teoremas generales simples que se consideran en las secciones subsecuentes.

Las fórmulas 1, 2 y 3 de la tabla 6.1 son casos especiales de la fórmula 4. La fórmula 4 se demuestra por inducción de la siguiente manera. Es verdadera para $n = 0$ por el ejemplo 1 y debido a que $0! = 1$. Se hace ahora la hipótesis de inducción de que es válida para cualquier entero positivo n. A partir de (1) se obtiene al integrar por partes

$$\mathscr{L}(t^{n+1}) = \int_0^\infty e^{-st} t^{n+1}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} t^{n+1}\Big|_0^\infty + \frac{(n+1)}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^n\, dt.$$

La parte donde no hay integrales es cero en $t = 0$ y para $t \to \infty$. El segundo miembro es igual a $(n+1)\mathscr{L}(t^n)/s$. A partir de esta expresión y de la hipótesis de inducción se obtiene

$$\mathscr{L}(t^{n+1}) = \frac{n+1}{s} \mathscr{L}(t^n) = \frac{(n+1)n!}{s \cdot s^n} = \frac{(n+1)!}{s^{n+1}}.$$

Se demuestra así la fórmula 4.

$\Gamma(a+1)$ en la fórmula 5 es la llamada *función gamma* [(15) de la sección 5.5 o (24) del apéndice 3] y la fórmula 5 se obtiene de (1) haciendo $st = x$:

$$\mathscr{L}(t^a) = \int_0^\infty e^{-st} t^a\, dt = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^a \frac{dx}{s} \qquad (s > 0)$$
$$= \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^a\, dx = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

ya que la última integral es justamente la que define $\Gamma(a+1)$. Nótese asimismo que $\Gamma(n+1) = n!$ cuando n es un entero no negativo, por lo que la fórmula 4 también se sigue de la fórmula 5.

La fórmula 6 se demostró en el ejemplo 2. Para demostrar las fórmulas 7 y 8 se hace $a = i\omega$ en la fórmula 6. Entonces

$$\mathscr{L}(e^{i\omega t}) = \frac{1}{s - i\omega} = \frac{s + i\omega}{(s - i\omega)(s + i\omega)}$$

$$= \frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + i\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Por otra parte, por el teorema 1 y $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t$ (sección 2.3),

$$\mathscr{L}(e^{i\omega t}) = \mathscr{L}(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) = \mathscr{L}(\cos \omega t) + i\mathscr{L}(\operatorname{sen} \omega t).$$

Al igual las partes real e imaginaria de estas dos ecuaciones se obtienen las fórmulas 7 y 8. Evitando trabajar con los complejos, el lector puede probar las fórmulas 7 y 8 utilizando las integrales (1) y la integración por partes. En la siguiente sección se presentará otra deducción de estas fórmulas para los reales.

La fórmula 9 se demostró en el ejemplo 3 y la fórmula 10 puede probarse de manera similar. ∎

Existencia de la transformada de Laplace

Para concluir esta sección de introducción se dirá algo acerca de la existencia de la transformada de Laplace. En términos generales e intuitivos, la situación es la siguiente. Para una s fija la integral de (1) existirá si el integrando completo $e^{-st}f(t)$ tiende a cero con la rapidez suficiente cuando $t \to \infty$, por ejemplo, al menos como una función exponencial con un exponente negativo. Se motiva así la desigualdad (2) en el teorema de existencia subsecuente. No es necesario que la función $f(t)$ sea continua. Esto es de importancia práctica ya que las entradas discontinuas (fuerzas impulsoras) son justamente aquellas para las que el método de la transformada de Laplace resulta de particular utilidad. Basta requerir que $f(t)$ sea continua por secciones en cada intervalo finito del rango $t \geqq 0$.

Por definición, una función $f(t)$ es **continua por secciones** (o seccionalmente continua) en un intervalo finito $a \leqq t \leqq b$ si $f(t)$ está definida en ese intervalo y es tal que el intervalo puede subdividirse en un número finito de intervalos, en cada uno de los cuales $f(t)$ es continua y tiene límites finitos cuando t tiende desde el interior a cualquiera de los puntos extremos del intervalo de subdivisión.

De esta definición se sigue que un número finito de saltos son las únicas discontinuidades que puede tener una función continua por secciones; éstas se conocen como *discontinuidades ordinarias*. En la figura 87 se presenta un ejemplo. Evidentemente, la clase de las funciones continuas por secciones incluye a toda función continua.

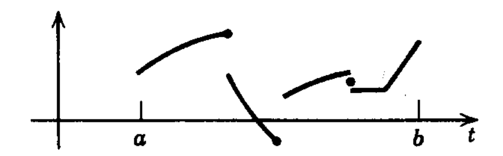


Figura 87. Ejemplo de una función continua por secciones $f(t)$ (Los puntos marcan los valores de la función en los saltos.)

Teorema 2 (Teorema de existencia de la transformada de Laplace)

Sea $f(t)$ una función que es continua por secciones en todo intervalo finito del semieje $t \geqq 0$ y que satisface

(2) $$\boxed{|f(t)| \leqq Me^{\gamma t}}$$ *para toda $\geqq 0$*

y para las constantes γ y M. Entonces la transformada de Laplace de $f(t)$ existe para toda $s > \gamma$.

Demostración. Puesto que $f(t)$ es continua por secciones, $e^{-st}f(t)$ es integrable en cualquier intervalo finito sobre el eje t. A partir de (2), suponiendo que $s > \gamma$, se obtiene

$$|\mathcal{L}(f)| = \left|\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right| \leqq \int_0^\infty |f(t)|e^{-st}\,dt \leqq \int_0^\infty Me^{\gamma t}e^{-st}\,dt = \frac{M}{s-\gamma}$$

donde la condición $s > \gamma$ fue necesaria para la existencia de la última integral. Se termina así la demostración. ∎

Las condiciones del teorema 2 son suficientes para la mayoría de las aplicaciones y es sencillo averiguar si una función dada satisface una desigualdad de la forma (2). Por ejemplo,

(3) $$\cosh t < e^t, \qquad t^n < n!\, e^t \quad (n = 0, 1, \cdots) \qquad \text{para toda } t > 0,$$

y cualquier función que esté acotada en valor absoluto para toda $t \geqq 0$, como las funciones seno y coseno de una variable real, satisface esa condición. Un ejemplo de una función que no satisface una relación de la forma (2) es la función exponencial e^{t^2}, ya que sin importar lo grande que se elijan M y γ en (2),

$$e^{t^2} > Me^{\gamma t} \qquad \text{para toda } t > t_0$$

donde t_0 es un número suficientemente grande que depende de M y γ.

Debe observarse que las condiciones del teorema 2 son suficientes pero no necesarias. Por ejemplo, la función $1/\sqrt{t}$ es infinita en $t = 0$, pero su transformada existe; de hecho, a partir de la definición y de $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ [ver (30) en el apéndice 3] se obtiene

$$\mathcal{L}(t^{-1/2}) = \int_0^\infty e^{-st}t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{s}}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Unicidad. Si la transformada de Laplace de una función dada existe, se encuentra determinada de manera única. Recíprocamente, puede demostrarse que si dos funciones (ambas definidas en el eje real positivo) tienen la misma transformada, estas funciones no pueden diferir en un intervalo de longitud positiva, aun cuando pueden hacerlo en varios puntos aislados (ver la referencia [A10] en el apéndice 1). Puesto que esto no es de importancia en las aplicaciones, puede decirse que la inversa de una transformada dada es fundamentalmente única. En particular, si dos funciones *continuas* tienen la misma transformada, son por completo idénticas. Desde luego, esto *es* de importancia práctica. ¿Por qué? (Recuérdese la introducción de este capítulo.)

Problemas de la sección 6.1

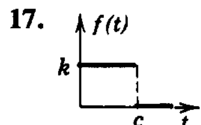
Encontrar la transformada de Laplace de las siguientes funciones. (a, b, T, ω, y θ son constantes.)

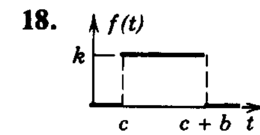
1. $3t + 4$ **2.** $at + b$ **3.** $t^2 + at + b$ **4.** $(a + bt)^2$

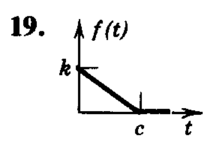
5. $\cos(\omega t + \theta)$ **6.** $\operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ **7.** $\operatorname{sen}(2n\pi t/T)$ **8.** $\operatorname{sen}^2 t$

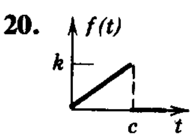
9. $\cos^2 \omega t$ **10.** $\operatorname{sen}^2 \omega t$ **11.** $\cos^2 t$ **12.** $-5 \cos 0.4t$

13. e^{at+b} **14.** $\cosh^2 3t$ **15.** $\operatorname{senh}^2 2t$ **16.** $\operatorname{sen} t \cos t$

17.


18.


19.


20.


21. Obtener la fórmula 6 de la tabla 6.1 a partir de las fórmulas 9 y 10.

22. Obtener la fórmula 10 de la tabla 6.1 a partir de la fórmula 6.

23. Deducir las fórmulas 7 y 8 de la tabla 6.1 por integración por partes.

24. Obtener la respuesta del problema 20 a partir de las respuestas de los problemas 17 y 19.

25. Usando $\cos x = \cosh ix$ y $\operatorname{sen} x = -i \operatorname{senh} ix$, deducir las fórmulas 7 y 8 de la tabla 6.1 a partir de las fórmulas 9 y 10.

26. Usando el problema 17, encontrar $\mathscr{L}(f)$, donde $f(t) = 0$ si $t \leqq 4$, $f(t) = 1$ si $t > 4$.

Encontrar $f(t)$ si $F(s) = \mathscr{L}(f)$ es como sigue. (a, b, etc., son constantes.)

27. $\dfrac{5}{s + 3}$ **28.** $\dfrac{s - 9}{s^2 - 9}$ **29.** $\dfrac{1}{s^2 + 25}$ **30.** $\dfrac{4}{(s + 1)(s + 2)}$

31. $\dfrac{1}{s^4}$ **32.** $\dfrac{s + 1}{s^2 + 1}$ **33.** $\dfrac{1}{s(s + 1)}$ **34.** $\dfrac{n\pi L}{L^2 s^2 + n^2\pi^2}$

35. $\dfrac{9}{s^2 + 3s}$ **36.** $\dfrac{4(s + 1)}{s^2 - 16}$ **37.** $\dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{s + 2}$ **38.** $\dfrac{0.25}{s - 5} - \dfrac{0.4}{s^3}$

39. Demostrar (3).

40. **(Linealidad de la transformada inversa de Laplace)** Demostrar que $\mathscr{L}^{-1}$ es lineal. *Sugerencia.* Usar el hecho de que $\mathscr{L}$ es lineal.

6.2 TRANSFORMADAS DE DERIVADAS E INTEGRALES

En esta sección se discuten y aplican las propiedades más importantes de la transformada de Laplace, a saber, que, en términos generales, la derivación de funciones

corresponde a la multiplicación de transformadas por s y que la integración de funciones corresponde a la división de transformadas entre s. Por tanto, ***la transformada de Laplace reemplaza las operaciones del cálculo con operaciones de álgebra con transformadas.*** Esta, en resumidas cuentas, es la idea básica de Laplace, por la cual merece admiración.

El programa para la presente sección es el siguiente. El teorema 1 se refiere a la derivación de $f(t)$, el teorema 2 a la ampliación a derivadas superiores y el teorema 3 a la integración de $f(t)$. Se incluyen asimismo ejemplos, así como una primera aplicación a una ecuación diferencial.

Teorema 1 [Transformada de Laplace de la derivada de $f(t)$]

Suponer que $f(t)$ es continua para toda $t \geqq 0$, que satisface (2), *sección* 6.1, *para alguna γ y M, y que tiene una derivada $f'(t)$ que es continua por secciones en todo intervalo finito del semieje $t \geqq 0$. Entonces la transformada de Laplace de la derivada $f'(t)$ existe cuando $s > \gamma$, y*

$$\boxed{\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)} \qquad (s > \gamma). \tag{1}$$

Demostración. Se considera primero el caso en que $f'(t)$ es continua para toda $t \geqq 0$. Entonces, por la definición y al integrar por partes,

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = [e^{-st} f(t)] \Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Puesto que f satisface (2), sección 6.1, la porción integrada del segundo miembro es cero en el límite superior cuando $s > \gamma$ y en el límite inferior es $-f(0)$. La última integral es $\mathcal{L}(f)$, siendo la existencia para $s > \gamma$ una consecuencia del teorema 2 de la sección 6.1. Se demuestra así que la expresión del segundo miembro existe cuando $s > \gamma$, y es igual a $-f(0) + s\mathcal{L}(f)$. Por consiguiente, $\mathcal{L}(f')$ existe cuando $s > \gamma$ y la igualdad (1) es válida.

Cuando la derivada $f'(t)$ sólo es continua por secciones, la demostración es muy similar; en este caso, el rango de integración en la integral original debe descomponerse en partes tales que f' sea continua en cada una de ellas. ∎

NOTA Este teorema puede extenderse a funciones $f(t)$ continuas por partes, pero el lugar de (1) se obtiene entonces la fórmula (1*) del problema 40 del final de esta sección.

Al aplicar (1) a la segunda derivada $f''(t)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'') &= s\mathcal{L}(f') - f'(0)\\ &= s[s\mathcal{L}(f) - f(0)] - f'(0);\end{aligned}$$

es decir,

$$\boxed{\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0).} \tag{2}$$

De manera similar,

(3) $$\mathcal{L}(f''') = s^3\mathcal{L}(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0),$$

etc. Por inducción se llega a la siguiente extensión del teorema 1.

Teorema 2 (Transformada de Laplace de la derivada de cualquier orden n)

Sean $f(t)$ y sus derivadas $f'(t), f''(t), \cdots f^{(n-1)}(t)$ funciones continuas para toda $t \geqq 0$ que satisfacen (2), *sección* 6.1, *para alguna γ y M, y sea la derivada $f^{(n)}(t)$ continua por secciones en todo intervalo finito en el semieje $t \geqq 0$. Entonces la transformada de Laplace de $f^{(n)}$ existe cuando $s > \gamma$ y está dada por*

(4) $$\boxed{\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).}$$

EJEMPLO 1 Sea $f(t) = t^2$. Encontrar $\mathcal{L}(f)$.

Solución. Puesto que $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(t) = 2$ y $\mathcal{L}(1) = 2\,\mathcal{L}(1) = 2/s$, por (2) se obtiene

$$\mathcal{L}(f'') = \mathcal{L}(2) = \frac{2}{s} = s^2\mathcal{L}(f), \quad \text{por tanto} \quad \mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3},$$

resultado que concuerda con la tabla 6.1. El ejemplo es típico: ilustra que en general hay varias maneras de obtener las transformadas de funciones dadas. ∎

EJEMPLO 2 Obtener la transformada de Laplace de cos ωt y sen ωt.

Solución. Sea $f(t) = \cos \omega t$. Entonces $f''(t) = -\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 f(t)$. Asimismo, $f(0) = 1, f'(0) = 0$. A partir de lo anterior y de (2),

$$-\omega^2\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - s, \quad \text{por tanto} \quad \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Se procede de igual manera para $g(t) = \operatorname{sen} \omega t$. Entonces $g(0) = 0$, $g'(0) = \omega$, y

$$-\omega^2\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(g'') = s^2\mathcal{L}(g) - \omega, \quad \text{por tanto} \quad \mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(\operatorname{sen} \omega t) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$ ∎

EJEMPLO 3 Sea $f(t) = \operatorname{sen}^2 t$. Encontrar $\mathcal{L}(f)$.

Solución. Se tiene $f(0) = 0, f'(t) = 2 \operatorname{sen} t \cos t = \operatorname{sen} 2t$, y por (1) se obtiene

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen} 2t) = \frac{2}{s^2 + 4} = s\mathcal{L}(f) \quad \text{o} \quad \mathcal{L}(\operatorname{sen}^2 t) = \frac{2}{s(s^2 + 4)}.$$ ∎

EJEMPLO 4 Sea $f(t) = t.$ sen ωt. Encontrar $\mathcal{L}(f)$.

Solución. Se tiene $f(0) = 0$ y

$$f'(t) = \operatorname{sen} \omega t + \omega t \cos \omega t, \qquad f'(0) = 0,$$
$$f''(t) = 2\omega \cos \omega t - \omega^2 t \operatorname{sen} \omega t$$
$$= 2\omega \cos \omega t - \omega^2 f(t),$$

de donde por (2),

$$\mathcal{L}(f'') = 2\omega\mathcal{L}(\cos \omega t) - \omega^2\mathcal{L}(f) = s^2\mathcal{L}(f).$$

Usando la fórmula para la transformada de Laplace de cos ωt se obtiene

$$(s^2 + \omega^2)\mathcal{L}(f) = 2\omega\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{2\omega s}{s^2 + \omega^2}.$$

Por lo tanto, el resultado es

$$\mathcal{L}(t \operatorname{sen} \omega t) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$

∎

Ecuaciones diferenciales, problemas con valor inicial

Se considera un problema con valor inicial

(5) $$y'' + ay' + by = r(t), \qquad y(0) = K_0, \qquad y'(0) = K_1$$

con a y b constantes. Aquí $r(t)$ es la **entrada** (fuerza impulsora) aplicada al sistema y $y(t)$ es la **salida** (respuesta del sistema; ver también la sección 1.7). En el método de Laplace se siguen tres pasos:

Primer paso. Se transforma (5) por medio de (1) y (2), escribiendo $Y = \mathcal{L}(y)$ y $R = \mathcal{L}(r)$. Se obtiene así

$$[s^2Y - sy(0) - y'(0)] + a[sY - y(0)] + bY = R(s)$$

y se le llama la **ecuación subsidiaria**. Agrupando los términos en Y se obtiene

$$(s^2 + as + b)Y = (s + a)y(0) + y'(0) + R(s)$$

Segundo paso. Al dividir entre $s^2 + as + b$ y usar la llamada **función de transferencia**[2]

(6) $$\boxed{Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}}$$

se obtiene como solución de la ecuación subsidiaria

(7) $$\boxed{Y(s) = [(s + a)y(0) + y'(0)]Q(s) + R(s)Q(s)}$$

Si $y(0) = y'(0) = 0$, esta expresión se reduce a $Y = RQ$; por tanto, Q es el cociente

$$Q = \frac{Y}{R} = \frac{\mathcal{L}\text{ (salida)}}{\mathcal{L}\text{ (entrada)}}$$

y esto explica el nombre de Q. Obsérvese que Q sólo depende de a y b, pero no de $r(t)$ ni de las condiciones iniciales.

[2] Suele denotarse por H, pero H se necesitará con mucha más frecuencia para otros fines.

Tercer paso. Se reduce (7) (generalmente por fracciones parciales, como en cálculo integral) a una suma de términos cuyos inversos pueden encontrarse en la tabla, de donde la solución que se obtiene de (5) es $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y)$.

EJEMPLO 5 Problema con valor inicial

Resolver

$$y'' - y = t, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

Solución. Primer paso. Por (2) y la tabla 6.1 se obtiene la ecuación subsidiaria

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - Y = 1/s^2, \quad \text{por tanto,} \quad (s^2 - 1)Y = s + 1 + 1/s^2.$$

Segundo paso. La función de transferencia es $Q = 1/(s^2 - 1)$ y (7) queda como

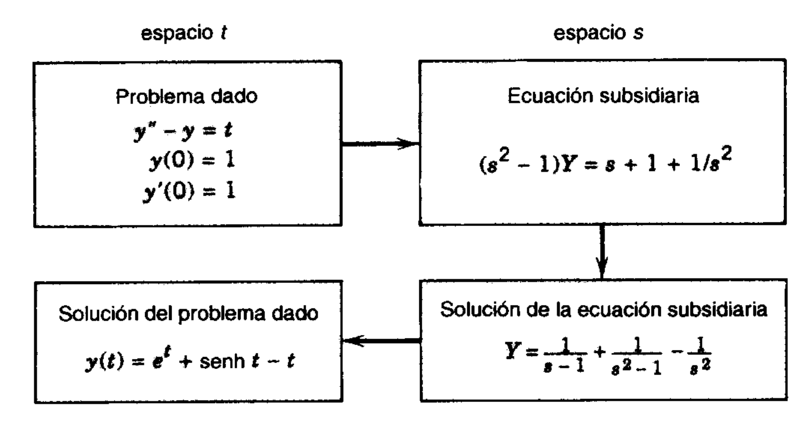
$$Y = (s + 1)Q + \frac{1}{s^2}Q = \frac{s+1}{s^2-1} + \frac{1}{s^2(s^2-1)}$$

$$= \frac{1}{s-1} + \left(\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}\right).$$

Tercer paso. A partir de esta expresión de Y y por la tabla 6.1 se obtiene la solución

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = e^t + \operatorname{senh} t - t.$$

En el diagrama se resume el enfoque aplicado. ∎



Método de la transformada de Laplace

En la práctica, en lugar de justificar el uso de las fórmulas y los teoremas en este método, tan sólo se comprueba al final si $y(t)$ satisface la ecuación y las condiciones iniciales dadas.

Las **ventajas del método**, en comparación con el del capítulo 2 e ilustradas por el ejemplo, son las siguientes:

1. No es necesario determinar una solución general de la ecuación homogénea.
2. No es necesario determinar los valores de las constantes arbitrarias de una solución general.

Problemas con datos trasladados es una manera abreviada para nombrar los problemas con valor inicial en los que las condiciones iniciales se refieren a un instante posterior en lugar del tiempo $t = 0$. La idea se explica resolviendo un problema por la transformada de Laplace en términos de un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 6 Problema con datos trasladados

Resolver el problema con valor inicial

$$y'' + y = 2t, \qquad y(\tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad y'(\tfrac{1}{4}\pi) = 2 - \sqrt{2}$$

Solución. Por inspección se observa que $y = A\cos t + B \operatorname{sen} t + 2t$ es una solución general y se sabe cómo debería procederse a partir de este hecho para hacerse cargo de las condiciones iniciales. Lo que quiere aprenderse es cómo puede aplicarse la transformada de Laplace aun cuando $y(0)$ y $y'(0)$ no se conozcan.

Primer paso. Establecimiento de la ecuación subsidiaria. Por (2) y la tabla 6.1 se obtiene

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + Y = 2/s^2.$$

Segundo paso. Solución de la ecuación subsidiaria. Al resolverla algebraicamente y usando fracciones parciales se obtiene

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2}{(s^2+1)s^2} + y(0)\frac{s}{s^2+1} + y'(0)\frac{1}{s^2+1} \\ &= 2\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right) + y(0)\frac{s}{s^2+1} + y'(0)\frac{1}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Tercer paso. Solución del problema dado. Por la tabla 6.1 $y = \mathcal{L}^{-1}(Y)$ se obtiene en la forma

$$\begin{aligned} y(t) &= 2t + y(0)\cos t + [y'(0) - 2] \operatorname{sen} t \\ &= 2t + A\cos t + B \operatorname{sen} t, \end{aligned}$$

(donde $A = y(0)$ y $B = y'(0) - 2$, pero esto no será de interés). Por la primera condición inicial se obtiene

$$y(\tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi + A/\sqrt{2} + B/\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

por tanto $B = -A$. Al derivar,

$$y'(t) = 2 - A \operatorname{sen} t + B\cos t.$$

Por la segunda condición inicial,

$$y'(\tfrac{1}{4}\pi) = 2 - A/\sqrt{2} + B/\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

Se obtiene así $A = 1$, $B = -1$ y la respuesta

$$y(t) = \cos t - \operatorname{sen} t + 2t.$$

Transformada de Laplace de la integral de una función

Puesto que la derivación y la integración son procesos inversos y como, en términos generales, la derivación de una función corresponde a la multiplicación de su transformada por s, sería de esperarse que la integración de una función correspondiera a la división de su transformada entre s, dado que la división es la operación inversa de la multiplicación.

Teorema 3 [Integración de $f(t)$]

Si $f(t)$ es continua por secciones y satisface una desigualdad de la forma (2), *sección* 6.1, *entonces*

$$\textbf{(8)} \qquad \boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}} \qquad (s > 0,\ s > \gamma).$$

Demostración. Suponer que $f(t)$ es continua por secciones y que satisface (2), sección 6.1, para alguna γ y M. Evidentemente, si (2) es válida para alguna γ negativa, también es válida para γ positiva y puede suponerse que γ es positiva. Entonces la integral

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

es continua y aplicando (2), sección 6.1, se obtiene

$$|g(t)| \leqq \int_0^t |f(\tau)|\, d\tau \leqq M \int_0^t e^{\gamma\tau}\, d\tau = \frac{M}{\gamma}(e^{\gamma t} - 1) \leqq \frac{M}{\gamma} e^{\gamma t} \quad (\gamma > 0).$$

Con esto se demuestra que $g(t)$ también satisface una desigualdad de la forma (2), sección 6.1. Asimismo, $g'(t) = f(t)$, salvo en los puntos en que $f(t)$ es discontinua. Por tanto, $g'(t)$ es continua por secciones en todo intervalo finito y, por el teorema 1,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) \qquad (s > \gamma).$$

Aquí, desde luego, $g(0) = 0$, de donde $\mathcal{L}(f) = s\mathcal{L}(g)$. Esta igualdad implica (8). ∎

La ecuación (8) tiene un correlato útil, que se obtiene al escribir $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, intercambiando ambos miembros y tomando la transformada inversa en los dos miembros. Entonces

(9) $$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} F(s)\right\} = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.}$$

EJEMPLO 7 Una aplicación del teorema 3

Sea $\mathcal{L}(f) = \dfrac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$. Encontrar $f(t)$.

Solución. Por la tabla 6.1 de la sección 6.1 se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right) = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t.$$

A partir de esta expresión y del teorema 3 se obtiene la respuesta

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right)\right\} = \frac{1}{\omega} \int_0^t \operatorname{sen} \omega\tau\, d\tau = \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t).$$

Con esto se demuestra la fórmula 19 de la tabla de la sección 6.10. ∎

EJEMPLO 8 Otra aplicación del teorema 3

Sea $\mathcal{L}(f) = \dfrac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$. Encontrar $f(t)$.

Solución. Al aplicar el teorema 3 a la respuesta del ejemplo 7 se obtiene la fórmula deseada

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right)\right\} = \frac{1}{\omega^2} \int_0^t (1 - \cos \omega\tau)\, d\tau = \frac{1}{\omega^2}\left(t - \frac{\operatorname{sen} \omega t}{\omega}\right).$$

Con esto se demuestra la fórmula 20 de la tabla de la sección 6.10. ∎

Problemas de la sección 6.2

Usando (1) o (2), encontrar la transformada $\mathcal{L}(f)$ de la función dada $f(t)$.

1. $\cos^2 t$
2. $\operatorname{sen}^2 \omega t$
3. te^{at}
4. $t \cos t$
5. $\cosh^2 2t$
6. $\operatorname{senh}^2 2t$
7. $\cos^2 3t$
8. $\cos^2 \pi t$

Transformadas adicionales. Usando los teoremas 1 y 2, derivar las siguientes transformadas que ocurren en aplicaciones (en relación con la resonancia, etc.).

9. $\mathcal{L}(t \cos \omega t) = \dfrac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
10. $\mathcal{L}(t \operatorname{sen} \omega t) = \dfrac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
11. $\mathcal{L}(t \cosh at) = \dfrac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$
12. $\mathcal{L}(t \operatorname{senh} at) = \dfrac{2as}{(s^2 - a^2)^2}$

Usando las fórmulas de los problemas 9 y 10, demostrar que

13. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}\right) = \dfrac{1}{2\omega^3}(\operatorname{sen} \omega t - \omega t \cos \omega t)$
14. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}\right) = \dfrac{1}{2\omega}(\operatorname{sen} \omega t + \omega t \cos \omega t)$

Aplicación del teorema 3. Encontrar $f(t)$ si $\mathcal{L}(f)$ es igual a

15. $\dfrac{3}{s^2 + s}$
16. $\dfrac{4}{s^3 - 4s}$
17. $\dfrac{4}{s^3 + 4s}$
18. $\dfrac{1}{s^2 + as}$
19. $\dfrac{8}{s^4 - 4s^2}$
20. $\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{s - a}{s + a}\right)$
21. $\dfrac{1}{s^4 - 2s^3}$
22. $\dfrac{1}{s^2}\left(\dfrac{s - a}{s + a}\right)$
23. $\dfrac{2s - \pi}{s^3(s - \pi)}$
24. $\dfrac{1}{s^2}\left(\dfrac{s - 2}{s^2 + 4}\right)$
25. $\dfrac{1}{s^2}\left(\dfrac{s + 1}{s^2 + 1}\right)$
26. $\dfrac{1}{s^4(s^2 + \pi^2)}$

Problemas con valor inicial. Usando transformadas de Laplace, resolver:

27. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -8$
28. $4y'' + \pi^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
29. $y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = B,$ (ω diferente de cero)
30. $y'' + 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$
31. $y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
32. $y'' - 4y' + 3y = 2t - \frac{8}{3}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{16}{3}$
33. $y'' + 25y = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.04$
34. $y'' + 4y = 1 - 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
35. $y'' + ky' - 2k^2 y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2k$
36. $y'' + \pi^2 y = t^3, \quad y(0) = 6/\pi^4, \quad y'(0) = 0$

La **derivación por métodos diferentes** es posible para varias fórmulas y es típico de las transformadas de Laplace. Los problemas 37-39 ilustran este punto.

37. Usando (1), derivar $\mathcal{L}(\operatorname{sen} \omega t)$ a partir de $\mathcal{L}(\cos \omega t)$.
38. Encontrar $\mathcal{L}(\cos^2 t)$ (a) usando el resultado del ejemplo 3, (b) por el método usado en el ejemplo 3, (c) expresando $\cos^2 t$ en términos de $\cos 2t$.

39. Comprobar la respuesta del problema 5 escribiendo cosh $2t$ en términos de funciones exponenciales.

40. **(Extensión del teorema 1)** Demostrar que si $f(t)$ es continua, salvo por una discontinuidad ordinaria (salto finito) en $t = a$ (> 0) y las condiciones restantes se mantienen iguales que en el teorema 1, entonces (ver la figura 88)

(1*) $$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0) - [f(a+0) - f(a-0)]e^{-as}.$$

Usando (1*), encontrar la transformada de Laplace de $f(t) = t$ si $0 < t < 1$, $f(t) = 1$ si $1 < t < 2$, $f(t) = 0$ en los demás casos.

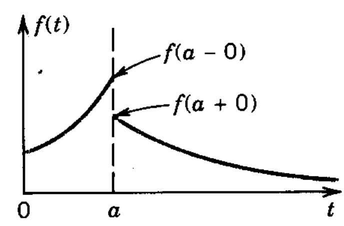


Figura 88. Fórmula (1*).

6.3 TRASLACIÓN S, TRASLACIÓN T, FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

¿Hasta donde se ha llegado y cuál es el siguiente objetivo? Se sabe que la transformada de Laplace es lineal (teorema 1, sección 6.1), que la derivación de $f(t)$ corresponde en un sentido amplio a la multiplicación de $\mathcal{L}(f)$ por s (teoremas 1 y 2, sección 6.2) y que esta propiedad es determinante para resolver ecuaciones diferenciales. Una primera ilustración de la técnica se ofrece en el ejemplo 5, sección 6.2. Pero en ese caso la solución puede encontrarse fácilmente por los métodos comunes.

Antes de presentar aplicaciones en las que la transformada de Laplace muestra su potencial real, es necesario deducir otras propiedades generales de la misma. Dos propiedades muy importantes se refieren a la traslación en el eje s y a la traslación en el eje t, según se expresa en los dos teoremas de traslación (teoremas 1 y 2 de esta sección).

Traslación s: Se sustituye s por $s - a$ en $F(s)$

Teorema 1 (Primer teorema de traslación; traslación s)

Si $f(t)$ tiene la transformada $F(s)$ donde $s > \gamma$, entonces $e^{at}f(t)$ tiene la transformada $F(s - a)$ donde $s - a > \gamma$; por tanto, si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces

(1) $$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a).}$$

En consecuencia, si se conoce la transformada $F(s)$ de $f(t)$, se obtiene la transformada de $e^{at}f(t)$ ***"haciendo una traslación sobre el eje s"*** [*es decir, sustituyendo s por $s - a$, para obtener $F(s - a)$*]. Ver la figura 89.

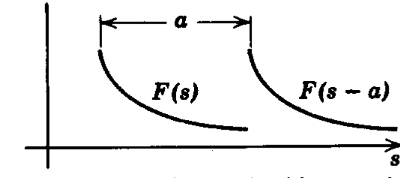


Figura 89. Primer teorema de traslación, traslación sobre el eje s. (En esta figura, $a > 0$.)

Nota. Tomando la transformada inversa en ambos miembros e intercambiando el primer miembro con el segundo, a partir de (1) se obtiene

$$\text{(1*)} \qquad \boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t).}$$

Demostración del teorema 1. Por definición, $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ y, por lo tanto,

$$F(s-a) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-st}[e^{at}f(t)]\, dt = \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}. \quad ■$$

EJEMPLO 1 Traslación *s* por medio del teorema 1

Al aplicar el teorema 1 a las fórmulas 4, 7 y 8 de la tabla 6.1 se obtienen los siguientes resultados.

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}\cos \omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\operatorname{sen} \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Con esto se demuestran las fórmulas 8, 9, 17 y 18 de la tabla de la sección 6.10. ■

EJEMPLO 2 Oscilaciones libres amortiguadas

Una bola de hierro de masa $m = 2$ está sujeta al extremo inferior de un resorte elástico cuyo extremo superior está fijo; el módulo del resorte es $k = 10$. Sea $y(t)$ el desplazamiento de la bola desde la posición de equilibrio estático. Determinar las oscilaciones libres de la bola, a partir de la posición inicial $y(0) = 2$ con la velocidad inicial $y'(0) = -4$, suponiendo que hay un amortiguamiento proporcional a la velocidad, siendo la constante de amortiguamiento $c = 4$.

Solución. El movimiento se describe por la solución $y(t)$ del problema con valor inicial

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = -4,$$

ver (7), sección 2.5. Usando (1) y (2) de la sección 6.2 se obtiene la ecuación subsidiaria

$$s^2Y - 2s + 4 + 2(sY - 2) + 5Y = 0.$$

La solución es

$$Y(s) = \frac{2s}{(s+1)^2+2^2} = 2\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} - \frac{2}{(s+1)^2+2^2}.$$

Ahora

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right) = \cos 2t, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right) = \operatorname{sen} 2t.$$

A partir de estas expresiones y del teorema 1 se llega al tipo de solución esperado

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-t}(2\cos 2t - \operatorname{sen} 2t). \quad ■$$

EJEMPLO 3 Ecuación no homogénea

Resolver el problema con valor inicial

$$y'' - 2y' + y = e^t + t, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Solución. Por (1) y (2) de la sección 6.2 y las condiciones inciales se obtiene la ecuación subsidiaria

$$(s^2Y - s) - 2(sY - 1) + Y = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2}.$$

Agrupando los términos en Y se obtiene

$$(s^2 - 2s + 1)Y = (s-1)^2Y = s - 2 + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2}.$$

Entonces al dividir,

$$Y = \frac{s-2}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{s^2(s-1)^2}.$$

Se aplica ahora el primer teorema de traslación. El primer término es

$$\frac{s-2}{(s-1)^2} = \frac{s-1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^2} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}; \qquad \text{inversa:} \qquad e^t - te^t.$$

La inversa del segundo término es $t^2e^t/2$, por la tabla 6.1 y por el primer teorema de traslación. En términos de fracciones parciales, el último término es

$$\frac{1}{s^2(s-1)^2} = \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s^2} + \frac{D}{s}.$$

Multiplicando por el común denominador se obtiene

$$1 = As^2 + Bs^2(s-1) + C(s-1)^2 + Ds(s-1)^2.$$

Para $s = 0$ se obtiene $C = 1$. Para $s = 1$ se obtiene $A = 1$. Al igualar a cero la suma de los términos en s^3 se obtiene $D + B = 0$, $D = -B$. Al igualar a cero la suma de los términos en s se obtiene $-2C + D = 0$, $D = 2$ y $B = -D = -2$. La suma de las fracciones parciales es ahora

$$\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{-2}{s-1} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}; \qquad \text{inversa:} \qquad te^t - 2e^t + t + 2.$$

La inversa resulta de la tabla 6.1 y del primer teorema de traslación. Al agrupar términos se obtiene

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^t - te^t + \tfrac{1}{2}t^2e^t + (t-2)e^t + t + 2 = -e^t + \tfrac{1}{2}t^2e^t + t + 2.$$

Este resultado concuerda con el ejemplo 3 de la sección 2.9. ∎

Traslación t: Se sustituye t por $t - a$ en $f(t)$

El primer teorema de traslación (teorema 1) se refiere a la traslación sobre el eje s: la sustitución de s en $F(s)$ por $s - a$ corresponde a la multiplicación de la función original $f(t)$ por e^{at}. Se establecerá ahora el segundo teorema de traslación (teorema 2), el cual se refiere a la traslación sobre el eje t: la sustitución de t en $f(t)$ por $t - a$ corresponde en términos generales a la multiplicación de la transformada $F(s)$ por e^{-as}; la formulación precisa es la siguiente.

Teorema 2 (Segundo teorema de traslación; traslación *t*)

Si $f(t)$ tiene la transformada $F(s)$, entonces la función

(2) $$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ f(t-a) & \text{si } t > a \end{cases}$$

con $a \geqq 0$ arbitraria tiene la transformada $e^{-as}F(s)$. Por tanto, si se conoce la transformada $F(s)$ de $f(t)$, se obtiene la transformada de la función (2), *cuya variable ha sido trasladada* "(***traslación sobre el eje t***"), *al multiplicar $F(s)$ por e^{-as}*. (La demostración y aplicaciones se presentan más adelante.)

Función escalón unitario $u(t-a)$

Por definición, $u(t-a)$ es 0 para $t < a$, tiene un salto de tamaño 1 en $t = a$ (donde puede dejarse sin definir) y es 1 para $t > a$:

(3) $$\boxed{u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t > a \end{cases}} \qquad (a \geqq 0).$$

En la figura 90 se muestra el caso especial $u(t)$, que tiene el salto en cero, y en la figura 91 el caso general $u(t-a)$ para una a positiva arbitraria. La función escalón unitario también se conoce como la **función de Heaviside**[3]

La función escalón unitario $u(t-a)$ es elemento fundamental de varias funciones, como se verá, y aumenta de manera considerable la utilidad de los métodos que usan la transformada de Laplace. Podemos usarla ahora para escribir $\tilde{f}(t)$ en (2) en la forma $f(t-a)u(t-a)$, es decir,

(2*) $$f(t-a)u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ f(t-a) & \text{si } t > a. \end{cases}$$

Esta es la gráfica de $f(t)$ para $t > 0$, pero trasladada a unidades a la derecha.

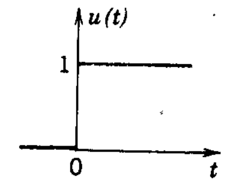


Figura 90. Función escalón unitario $u(t)$.

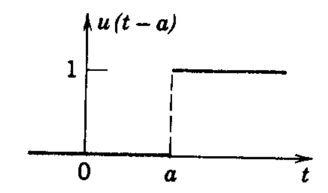


Figura 91. Función escalón unitario $u(t-a)$.

[3] Ver la nota de pie de la página 300 de la sección 6.1.

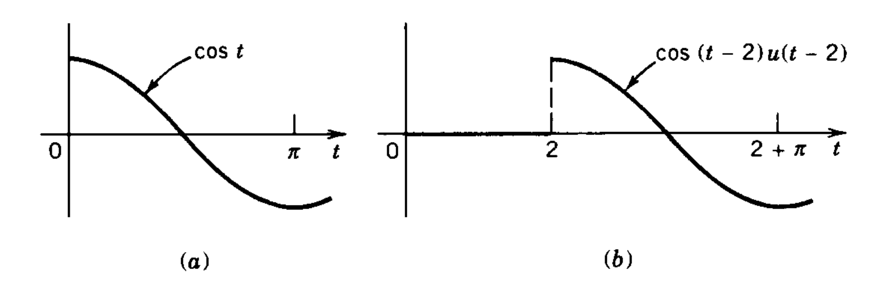


Figura 92. $f(t) = \cos t$ y $f(t-2)u(t-2) = \cos(t-2)u(t-2)$.

En la figura 92 se muestra un ejemplo. Se trata de la curva coseno $f(t) = \cos t$ para $t > 0$ (figura 92a) y la curva $f(t-2)u(t-2) = \cos(t-2)u(t-2)$ obtenida al desplazarla 2 unidades a la derecha. Para $t < a = 2$ esta función es cero porque $u(t-2)$ posee esta propiedad.

Usando (2*) ahora es posible reformular el

Teorema 2 (Segundo teorema de traslación; traslación t)

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, *entonces*

(4)
$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s).}$$

Nota. Tomando la transformada inversa en ambos miembros de (4) e intercambiando los miembros se obtiene la fórmula asociada

(4*)
$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a).}$$

Demostración del teorema 2. A partir de la definición se tiene

$$e^{-as}F(s) = e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)\,d\tau.$$

Sustituyendo $\tau + a$ en la integral se obtiene

$$e^{-as}F(s) = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt.$$

Esta expresión puede escribirse como una integral de 0 a ∞ si se asegura que el integrando es cero para toda t de 0 a a. Esto puede conseguirse fácilmente multiplicando el integrando actual por la función escalón $u(t-a)$, con lo cual se obtiene (4) y se termina la demostración:

$$e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u(t-a)\,dt = \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}. \qquad ■$$

Cabe mencionar que está próxima la etapa en que será posible abordar problemas para los que el método de la transformada de Laplace es preferible al método usual, como lo ilustrarán los ejemplos de la siguiente sección. A este respecto, se necesita la transformada de la función escalón unitario $u(t-a)$,

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \qquad (s > 0). \tag{5}$$

Esta fórmula se sigue directamente de la definición ya que

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}u(t-a)\,dt$$

$$= \int_0^a e^{-st}0\,dt + \int_a^\infty e^{-st}1\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_a^\infty .$$

Se considerarán dos ejemplos sencillos. En los problemas de la sección y en secciones subsecuentes se presentan más aplicaciones.

EJEMPLO 4 Aplicación del teorema 2

Encontrar la transformada inversa de e^{-3s}/s^3

Solución. Puesto que $\mathcal{L}^{-1}(1/s^3) = t^2/2$ (ver la tabla 6.1 de la sección 6.1), por el teorema 2 se obtiene (figura 93)

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-3s}/s^3) = \tfrac{1}{2}(t-3)^2u(t-3) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3 \\ \tfrac{1}{2}(t-3)^2 & \text{si } t > 3. \end{cases}$$ ∎

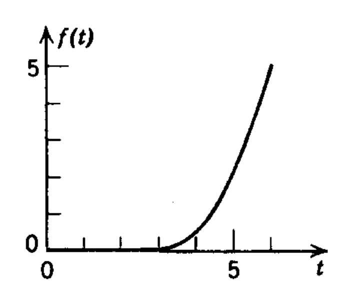


Figura 93. Ejemplo 4.

EJEMPLO 5 Uso de funciones escalón unitario

Encontrar la transformada de la función (figura 94)

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{si } \pi < t < 2\pi \\ \operatorname{sen} t & \text{si } t > 2\pi. \end{cases}$$

Solución. Primer paso. Se escribe $f(t)$ en términos de funciones escalón. Para $0 < t < \pi$ se toma $2u(t)$. Para $t > \pi$ se quiere el valor cero, por lo que debe restarse la función escalón $2u(t-\pi)$ con escalón en π. Se tiene entonces $2u(t) - 2u(t-\pi) = 0$ cuando $t > \pi$. Esta expresión está bien hasta llegar a 2π donde se quiere que entre sen t; así es que se suma $u(t-2\pi)$sen t. En conjunto,

$$f(t) = 2u(t) - 2u(t-\pi) + u(t-2\pi) \operatorname{sen} t.$$

Segundo paso. El último término es igual a $u(t-2\pi)$sen $(t-2\pi)$ debido a la periodicidad, por lo que (5), (4) y la tabla 6.1 (sección 6.1) dan

$$\mathcal{L}(f) = \frac{2}{s} - \frac{2e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}. \quad ∎$$

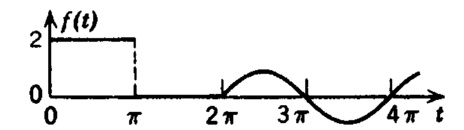


Figura 94. Ejemplo 5.

EJEMPLO 6 Encontrar la transformada inversa de Laplace $f(t)$ de

$$F(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2} - \frac{4e^{-2s}}{s} + \frac{se^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

Solución. Por la tabla 6.1 (sección 6.1) y el teorema 2,

$$f(t) = 2t - 2(t-2)u(t-2) - 4u(t-2) + \cos(t-\pi)\, u(t-\pi)$$

$$= 2t - 2tu(t-2) - \cos t\, u(t-\pi) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{si } 2 < t < \pi \\ -\cos t & \text{si } \quad t > \pi. \end{cases} \quad ∎$$

Problemas de la sección 6.3

Aplicaciones del primer teorema de traslación

Encontrar las transformadas de Laplace de las siguientes funciones.

1. $4.5te^{3.5t}$ **2.** t^2e^{-2t} **3.** $e^t \operatorname{sen} t$ **4.** $e^{-t}\cos t$

5. $e^{-t}\operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ **6.** $e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega t$

7. $2t^3e^{-t/2}$ **8.** $e^{-2t}(2\cos 3t - \operatorname{sen} 3t)$

9. $e^{-\alpha t}(A\cos\beta t + B\operatorname{sen}\beta t)$ **10.** $e^{-t}(a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n)$

Encontrar $f(t)$ si $\mathcal{L}(f)$ es igual a

11. $\dfrac{\pi}{(s+\pi)^2}$ **12.** $\dfrac{1}{(s+\frac{1}{2})^3}$ **13.** $\dfrac{s-2}{s^2-4s+5}$ **14.** $\dfrac{1}{s^2+2s+5}$

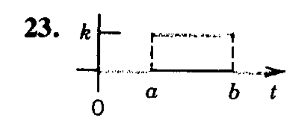
15. $\dfrac{s}{(s+3)^2+1}$ **16.** $\dfrac{as+b}{(s+c)^2+\omega^2}$ **17.** $\dfrac{6}{s^2-4s-5}$ **18.** $\dfrac{2}{s^2+s+\frac{1}{2}}$

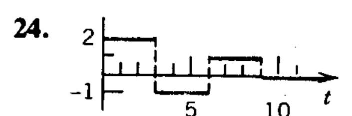
Representando las funciones hiperbólicas en términos de funciones exponenciales y aplicando el primer teorema de traslación, demostrar que

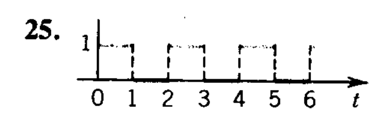
19. $\mathcal{L}(\cosh at \cos at) = \dfrac{s^3}{s^4 + 4a^4}$ **20.** $\mathcal{L}(\cosh at \operatorname{sen} at) = \dfrac{a(s^2 + 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$

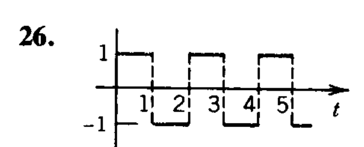
21. $\mathcal{L}(\operatorname{senh} at \cos at) = \dfrac{a(s^2 - 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$ **22.** $\mathcal{L}(\operatorname{senh} at \operatorname{sen} at) = \dfrac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$

Función escalón unitario. Representar las siguientes funciones en términos de funciones escalón unitario y encontrar sus transformadas de Laplace.

23. 

24. 

25. 

26. 

Aplicaciones del segundo teorema de traslación

Trazar las siguientes funciones y encontrar sus transformadas de Laplace.

27. $(t - 1)u(t - 1)$ **28.** $tu(t - 1)$ **29.** $(t - 1)^2 u(t - 1)$ **30.** $t^2 u(t - 1)$
31. $e^t u(t - \frac{1}{2})$ **32.** $u(t - 1) \cosh t$ **33.** $u(t - \pi) \cos t$ **34.** $u(t - \frac{1}{2}\pi) \operatorname{sen} t$

En cada caso, trazar la función dada, la cual se supone es cero fuera del intervalo dado, y encontrar su transformada de Laplace.

35. $t \quad (0 < t < 1)$ **36.** $t \quad (0 < t < 2)$
37. $e^t \quad (0 < t < 1)$ **38.** $t^2 \quad (0 < t < 3)$
39. $t \quad (0 < t < a)$ **40.** $\operatorname{sen} t \quad (2\pi < t < 4\pi)$
41. $2 \cos \pi t \quad (1 < t < 2)$ **42.** $1 - e^{-t} \quad (0 < t < \pi)$

Encontrar y trazar las transformadas inversas de Laplace de las siguientes funciones.

43. e^{-3s}/s^2 **44.** $e^{-\pi s}/(s^2 + 2s + 2)$
45. $3(e^{-4s} - e^{-s})/s$ **46.** $(e^{-2s} - e^{-4s})/(s - 2)$
47. $se^{-\pi s}/(s^2 + 4)$ **48.** $e^{-s}/(s^2 + \omega^2)$
49. e^{-s}/s^4 **50.** $(1 - e^{-\pi s})/(s^2 + 4)$

Problemas con valor inicial. Usando transformadas de Laplace, resolver:

51. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
52. $y'' - 4y' + 5y = 0. \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
53. $4y'' - 4y' + 37y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.5$
54. $9y'' - 6y' + y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$
55. $y'' + 4y' + 13y = 145 \cos 2t, \quad y(0) = 9, \quad y'(0) = 19$
56. $y'' + 2y' - 8y = -256t^3, \quad y(0) = 15, \quad y'(0) = 36$

57. $y'' + 6y' + 8y = -e^{-3t} + 3e^{-5t}, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -14$

58. $y'' + 2y' + 5y = 9\cosh 2t + 4\operatorname{senh} 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

59. $y'' + y = r(t), \quad r(t) = t$ si $0 < t < 1$ y 0 si $t > 1, \quad y(0) = y'(0) = 0$

60. $y'' - 5y' + 6y = r(t), \quad r(t) = 4e^t$ si $0 < t < 2$ y 0 si $t > 2, \quad y(0) = 1,$
$y'(0) = -2$

61. $y'' + 9y = r(t), \quad r(t) = 8\operatorname{sen} t$ si $0 < t < \pi$ y 0 si $t > \pi, \quad y(0) = 0,$
$y'(0) = 4$

62. $y'' + 3y' + 2y = r(t), \quad r(t) = 4t$ si $0 < t < 1$ y 8 si $t > 1,$
$y(0) = y'(0) = 0$

63. $y'' + 4y = r(t), \quad r(t) = 3\operatorname{sen} t$ si $0 < t < \pi$ y $-3\operatorname{sen} t$ si $t > \pi,$
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$

64. $y'' + 2y' + 2y = r(t), \quad r(t) = t$ si $0 < t < 1$ y $2t^2$ si $t > 1, \quad y(0) = \frac{1}{2},$
$y'(0) = -\frac{1}{2}$

65. $y'' + y' - 2y = r(t), \quad r(t) = 3\operatorname{sen} t - \cos t$ si $0 < t < 2\pi$ y
$3\operatorname{sen} 2t - \cos 2t$ si $t > 2\pi, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Modelos de circuitos eléctricos

66. Un capacitor de capacitancia C se carga de tal modo que su potencial es V_0. En $t = 0$ el interruptor de la figura 95 se cierra y el capacitor empieza a descargarse a través del resistor de resistencia R. Usando transformadas de Laplace, encontrar la carga $q(t)$ en el capacitor.

67. Encontrar la corriente $i(t)$ en el circuito de la figura 96, suponiendo que no fluye corriente cuando $t \leq 0$ y que el interruptor está cerrado en $t = 0$.

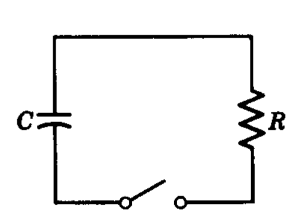


Figura 95. Problema 66.

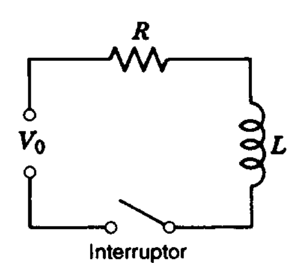


Figura 96. Problema 67.

Encontrar la corriente $i(t)$ en el circuito LC ilustrado en la figura 97, suponiendo $L = 1$ henry, $C = 1$ faradio, corriente y carga iniciales cero en el capacitor y $v(t)$ de la siguiente manera.

68. $v = 1$ si $0 < t < a$ y 0 en caso contrario.

69. $v = t$ si $0 < t < 1$ y $v = 1$ si $t > 1$.

70. $v = 1 - e^{-t}$ si $0 < t < \pi$ y 0 en caso contrario.

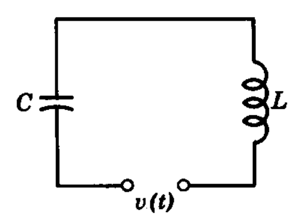


Figura 97. Problemas 68-70.

6.4 APLICACIONES ADICIONALES. FUNCIÓN DELTA DE DIRAC

En esta sección se consideran algunas aplicaciones adicionales y después se introduce la función delta de Dirac, la cual aumenta de manera considerable la utilidad de la transformada de Laplace en relación con entradas impulsivas.

EJEMPLO 1 Respuesta de un circuito *RC* a una onda cuadrada sencilla

Encontrar la corriente $i(t)$ en el circuito de la figura 98 si se aplica una onda cuadrada sencilla con voltaje V_0. Suponer que el circuito está inactivo antes de la aplicación de la onda cuadrada.

Solución. La ecuación del circuito es (ver la sección 1.8)

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\tau = v(t)$$

donde $v(t)$ puede representarse en términos de dos funciones escalón unitario:

$$v(t) = V_0[u(t-a) - u(t-b)].$$

Usando el teorema 3 de la sección 6.2 y la fórmula (5) de la sección 6.3 se obtiene la ecuación subsidiaria

$$RI(s) + \frac{I(s)}{sC} = \frac{V_0}{s}[e^{-as} - e^{-bs}].$$

Al resolver algebraicamente esta ecuación para $I(s)$ se obtiene

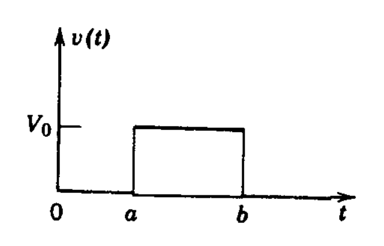
$$I(s) = F(s)(e^{-as} - e^{-bs}) \qquad \text{donde} \qquad F(s) = \frac{V_0/R}{s + 1/RC}.$$

Por la tabla 6.1 de la sección 6.1 se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = \frac{V_0}{R} e^{-t/(RC)}.$$

Así, por el teorema 2 de la sección 6.3 se llega a la solución (figura 99)

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}(I) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} - \mathcal{L}^{-1}\{e^{-bs}F(s)\} \\ &= \frac{V_0}{R}[e^{-(t-a)/(RC)}u(t-a) - e^{-(t-b)/(RC)}u(t-b)]; \end{aligned}$$



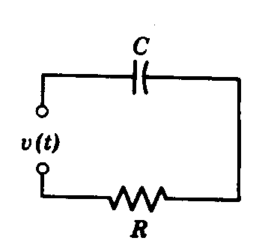


Figura 98. Ejemplo 1.

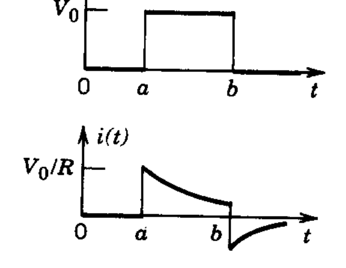


Figura 99. Voltaje y corriente en el ejemplo 1.

es decir, $i = 0$ si $t < a$, y

$$i(t) = \begin{cases} K_1 e^{-t/(RC)} & \text{si } a < t < b \\ (K_1 - K_2)e^{-t/(RC)} & \text{si } t > b \end{cases}$$

donde $K_1 = V_0 e^{a/(RC)}/R$ y $K_2 = V_0 e^{b/(RC)}/R$. ∎

EJEMPLO 2 Respuesta de un sistema no amortiguado a una onda cuadrada sencilla

Resolver el problema con valor inicial

$$y'' + 2y = r(t), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0,$$

donde $r(t) = 1$ si $0 < t < 1$ y 0 en caso contrario (figura 100).

Solución. Por el teorema 2 de la sección 6.2, las condiciones iniciales y (3) y (5) de la sección 6.3 se obtiene la ecuación subsidiaria

$$s^2 Y + 2Y = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}.$$

La solución es

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2)} - \frac{e^{-s}}{s(s^2 + 2)}.$$

Se usan fracciones parciales en el segundo miembro:

$$\frac{1}{s(s^2 + 2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 2}\right).$$

En consecuencia, por la tabla 6.1(sección 6.1) y el teorema 2 de la sección 6.3,

$$y(t) = \tfrac{1}{2}[1 - \cos\sqrt{2}\,t] - \tfrac{1}{2}[1 - \cos\sqrt{2}(t - 1)]u(t - 1),$$

es decir,

$$y(t) = \begin{cases} \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos\sqrt{2}\,t & \text{si } 0 \leqq t < 1 \\ \tfrac{1}{2}\cos\sqrt{2}(t - 1) - \tfrac{1}{2}\cos\sqrt{2}\,t & \text{si } \quad t > 1. \end{cases}$$

Se observa que $y(t)$ representa una composición de oscilaciones armónicas. ∎

EJEMPLO 3 Respuesta de un sistema oscilatorio amortiguado a una onda cuadrada sencilla

Determinar la respuesta del sistema oscilatorio amortiguado que corresponde a

$$y'' + 3y' + 2y = r(t), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

con $r(t)$ como en el ejemplo 2 (figura 100).

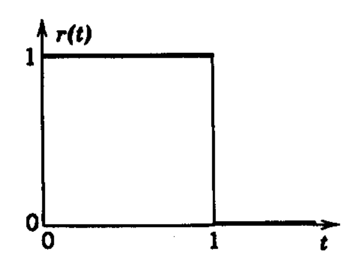


Figura 100. Entrada en los ejemplos 2 y 3.

Solución. Por el mismo método aplicado en el ejemplo anterior se obtiene la ecuación subsidiaria

$$s^2Y + 3sY + 2Y = \frac{1}{s}(1 - e^{-s}).$$

Resolviéndola para Y se tiene

$$Y(s) = F(s)(1 - e^{-s}) \qquad \text{donde} \qquad F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}.$$

En términos de fracciones parciales,

$$F(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1/2}{s+2}.$$

En consecuencia, por la tabla 6.1 (sección 6.1),

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = \tfrac{1}{2} - e^{-t} + \tfrac{1}{2}e^{-2t}.$$

Por lo tanto, por el teorema 2 de la sección 6.3 se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}F(s)\} = f(t-1)u(t-1) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq t < 1) \\ \tfrac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \tfrac{1}{2}e^{-2(t-1)} & (t > 1). \end{cases}$$

Se llega así a la solución (figura 101)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = f(t) - f(t-1)u(t-1) = \begin{cases} \tfrac{1}{2} - e^{-t} + \tfrac{1}{2}e^{-2t} & (0 \leqq t < 1) \\ K_1e^{-t} - K_2e^{-2t} & (t > 1) \end{cases}$$

donde $K_1 = e - 1$ y $K_2 = (e^2 - 1)/2$. ▮

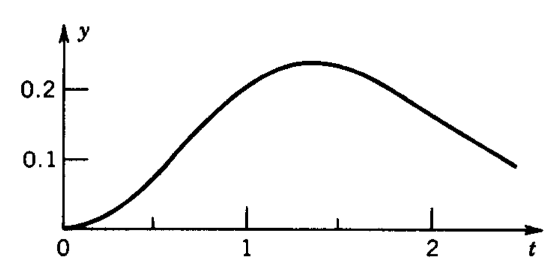


Figura 101. Salida en el ejemplo 3.

Impulsos cortos. Función delta de Dirac

Los fenómenos de naturaleza impulsiva, tales como la acción de fuerzas (o voltajes) muy grandes en intervalos de tiempo muy cortos, son de gran interés práctico, ya que ocurren en varias aplicaciones. Esta situación ocurre, por ejemplo, cuando se golpea una pelota de tenis, cuando un sistema recibe el impacto de un martillo, cuando un avión realiza un aterrizaje "difícil", cuando un barco es golpeado por una ola de gran tamaño, etc. El objetivo presente es indicar la manera de resolver problemas en los que intervienen impulsos cortos utilizando transformadas de Laplace.

En mecánica, el **impulso** de una fuerza $f(t)$ durante un intervalo de tiempo, por ejemplo, $a \leqq t \leqq a + k$ *se define como la integral de* $f(t)$ de a a $a + k$. El análogo para un circuito eléctrico es la integral de la fuerza electromotriz aplicada al circuito, inte-

grada de a a $a + k$. De particular interés práctico es el caso de una k muy breve (y su límite $k \to 0$), es decir, el impulso de una fuerza que actúa sólo por un instante. Para manejar el caso, se considera la función

$$f_k(t) = \begin{cases} 1/k & \text{si } a \leqq t \leqq a + k \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad (1) \quad \text{(Figura 102).}$$

Su impulso I_k es 1, ya que la integral evidentemente da el área del rectángulo de la figura 102

$$I_k = \int_0^\infty f_k(t)\, dt = \int_a^{a+k} \frac{1}{k}\, dt = 1. \qquad (2)$$

Se puede representar $f_k(t)$ en términos de dos funciones escalón unitario (sección 6.3), a saber,

$$f_k(t) = \frac{1}{k}[u(t - a) - u(t - (a + k))].$$

Por (5) de la sección 6.3 se obtiene la transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\{f_k(t)\} = \frac{1}{ks}[e^{-as} - e^{-(a+k)s}] = e^{-as}\,\frac{1 - e^{-ks}}{ks}. \qquad (3)$$

El límite de $f_k(t)$ cuando $k \to 0$ se denota por

$$\delta(t - a)$$

y se llama la **función delta de Dirac**[4] (en ocasiones también **función de impulso unitario**). El cociente de (3) tiene el límite 1 cuando $k \to 0$, como se sigue por la regla de l'Hôpital (se deriva tanto el numerador como el denominador con respecto a k). Por tanto,

$$\boxed{\mathscr{L}\{\delta(t - a)\} = e^{-as}.} \qquad (4)$$

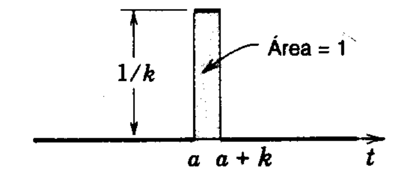


Figura 102. La función $f_k(t)$ de (1).

[4] PAUL DIRAC (1902-1984), físico inglés, galardonado con el premio Nobel [conjuntamente con ERWIN SCHRÖDINGER (1887-1961)] en 1933 por su trabajo en mecánica cuántica.

Se observa que $\delta(t-a)$ no es una función en el sentido ordinario usado en cálculo, sino que se trata de una llamada "*función generalizada*",[5] ya que (1) y (2) con $k \to 0$ implican

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = a \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \delta(t-a)\,dt = 1,$$

pero una función ordinaria que es 0 excepto en un solo punto debe tener la integral 0. Sin embargo, en problemas de impulsos resulta conveniente operar sobre $\delta(t-a)$ como si se tratara de una función ordinaria.

EJEMPLO 4 Respuesta de un sistema oscilatorio amortiguado a un impulso unitario

Determinar la respuesta del sistema amortiguado masa-resorte (ver la sección 2.11) gobernado por

$$y'' + 3y' + 2y = \delta(t-a), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Por tanto, el sistema se encuentra inicialmente en reposo y en el tiempo $t = a$ recibe un súbito impacto.

Solución. Por (4) se obtiene la ecuación subsidiaria

$$s^2Y + 3sY + 2Y = e^{-as}.$$

Al resolverla para Y se tiene

$$Y(s) = F(s)e^{-as}, \qquad \text{donde} \qquad F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

Tomando la transformada inversa se obtiene

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F) = e^{-t} - e^{-2t}.$$

En consecuencia, por el segundo teorema de traslación (sección 6.3) se tiene

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqq t < a \\ e^{-(t-a)} - e^{-2(t-a)} & \text{si } t > a. \end{cases}$$

En la figura 103 se ilustra esta solución para $a = 1$. El lector puede comparar este resultado con la salida del ejemplo 3 (figura 101) y comentar. ∎

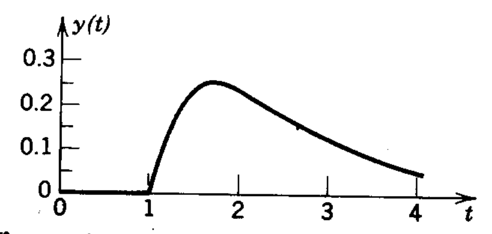


Figura 103. Salida en el ejemplo 4 con $a = 1$.

[5] O "*distribución*". En 1936 el matemático ruso SERGEI L'VOVICH SOBOLEV (1908-1989) creó una teoría sistemática de las funciones generalizadas, la cual fue ampliada en 1945 por el matemático francés LAURENT SCHWARTZ (1915-).

Problemas de la sección 6.4

Circuito *RC*. Encontrar la corriente en el circuito *RC* de la figura 104 con $R = 100$ ohms, $C = 0.1$ faradios y fuerza electromotriz $v(t)$ [volts] según se indica. Suponer que el circuito está inactivo antes de que se aplique $v(t)$.

1. $v(t) = 100$ si $1 < t < 2$ y 0 en caso contrario.

2. $v(t) = 10\,000$ si $1 < t < 1.01$ y 0 en caso contrario.

3. $v(t) = e^{t}$ si $t > 2$ y 0 en caso contrario.

4. $v(t) = 50(t - 3)$ si $t > 3$ y 0 en caso contrario.

5. $v(t) = 200t$ si $0 < t < 1$ y 0 si $t > 1$.

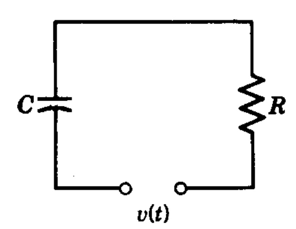


Figura 104. Circuito *RC* en los problemas 1-5.

Efecto de la función delta en sistemas oscilatorios y en otros problemas con valor inicial. Resolver:

6. $y'' + 4y = \delta(t - \pi), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

7. $y'' + 9y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

8. $y'' - y = \operatorname{sen} t + \delta(t - \frac{1}{2}\pi), \quad y(0) = 3.0, \quad y'(0) = -3.5$

9. $y'' + y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

10. $y'' - y = -2 \operatorname{sen} t + \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

11. $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

12. $y'' + 3y' + 2y = \delta(t - 4), \quad y(0) = y'(0) = 0$

13. $y'' + 4y' + 5y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$

14. $y'' + 2y' - 3y = \delta(t - 2) + \delta(t - 3), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

15. $y'' + 2y' - 3y = -8e^{-t} - \delta(t - \frac{1}{2}), \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -5$

16. $y'' + 4y' + 4y = 1 + t + \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.25$

17. $y'' + 2y' + 5y = 8e^{t} + \delta(t - 1), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

18. $y'' + 5y' + 6y = u(t - 1) + \delta(t - 2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

19. $y'' + 2y' + 5y = 25t - \delta(t - \pi), \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 5$

20. $y'' - y' - 2y = -4t^2 + \delta(t - 2), \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -1$

6.5 DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE TRANSFORMADAS

El número de métodos para obtener transformadas o transformadas inversas y su aplicación en la resolución de ecuaciones diferenciales es sorprendentemente grande. Incluyen la integración directa (sección 6.1), el uso de la linealidad (sección 6.1), la traslación (sección 6.3) y la derivación o integración de las funciones originales $f(t)$ (sección 6.2). Pero hay más: en esta sección se considera la derivación e integración de *transformadas* $F(s)$ y se llega a las operaciones correspondientes para las funciones originales $f(t)$.

Derivación de transformadas

Puede demostrarse que si $f(t)$ satisface las condiciones del teorema de existencia de la sección 6.1, entonces la derivada de su transformada

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

con respecto a s puede obtenerse derivando la expresión afectada por el signo de integral con respecto a s (la demostración se da en la referencia [5] del apéndice 1); por tanto,

$$F'(s) = -\int_0^{\infty} e^{-st}[tf(t)]\, dt.$$

Por consiguiente, si $\mathcal{L}(f) = F(s)$, entonces

(1) $$\boxed{\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s);}$$

la derivación de la transformada de una función corresponde a la multiplicación de la función por $-t$. Expresado de otra forma,

(1*) $$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -tf(t).}$$

Esta propiedad permite obtener nuevas transformadas a partir de transformadas dadas, como se verá a continuación.

EJEMPLO 1 Derivación de transformadas

Se deducirán las tres fórmulas siguientes (fórmulas 21-23 en la tabla de la sección 6.10):

	$\mathcal{L}(f)$	$f(t)$
(2)	$\dfrac{1}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\beta^3}(\operatorname{sen}\beta t - \beta t\cos\beta t)$
(3)	$\dfrac{s}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\dfrac{t}{2\beta}\operatorname{sen}\beta t$
(4)	$\dfrac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\beta}(\operatorname{sen}\beta t + \beta t\cos\beta t)$

Solución. Por (1) y la fórmula 8 (con $\omega = \beta$) de la tabla 6.1, sección 6.1, se obtiene

$$\mathcal{L}(t \operatorname{sen}\beta t) = \frac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}.$$

Al dividir entre 2β se obtiene (3). Por (1) y la fórmula 7 (con $\omega = \beta$) de la tabla 6.1 se encuentra

$$\mathcal{L}(t\cos\beta t) = -\frac{(s^2+\beta^2)-2s^2}{(s^2+\beta^2)^2} = \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}. \tag{5}$$

A partir de esta expresión y de la fórmula 8 (con $\omega = \beta$) de la tabla 6.1 se tiene

$$\mathcal{L}\left(t\cos\beta t \pm \frac{1}{\beta}\operatorname{sen}\beta t\right) = \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2} \pm \frac{1}{s^2+\beta^2}.$$

Se saca ahora el común denominador en el segundo miembro. Entonces para el signo positivo, el numerador es $s^2 - \beta^2 + s^2 + \beta^2 = 2s^2$, de donde se sigue (4). Para el signo negativo, el numerador asume la forma $s^2 - \beta^2 - s^2 - \beta^2 = -2\beta^2$, y se obtiene (2). ∎

Integración de transformadas

De manera similar, si $f(t)$ satisface las condiciones del teorema de existencia de la sección 6.1 y el límite de $f(t)/t$, cuando t tiende a 0 por la derecha, existe, entonces

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\tilde{s})\,d\tilde{s}} \qquad (s > \gamma); \tag{6}$$

de este modo, *la integración de la transformada de una función $f(t)$ corresponde a la división de $f(t)$ entre t.* Expresado de otra forma,

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(\tilde{s})\,d\tilde{s}\right\} = \frac{f(t)}{t}.} \tag{6*}$$

De hecho, a partir de la definición se sigue que

$$\int_s^\infty F(\tilde{s})\,d\tilde{s} = \int_s^\infty \left[\int_0^\infty e^{-\tilde{s}t} f(t)\,dt\right] d\tilde{s},$$

y puede demostrarse (ver la referencia [5] en el apéndice 1) que bajo los supuestos anteriores puede invertirse el orden de la integración, es decir,

$$\int_s^\infty F(\tilde{s})\,d\tilde{s} = \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-\tilde{s}t} f(t)\,d\tilde{s}\right] dt = \int_0^\infty f(t)\left[\int_s^\infty e^{-\tilde{s}t}\,d\tilde{s}\right] dt.$$

La integral con respecto a $\tilde{s}$ en el segundo miembro es igual a e^{st}/t cuando $s > \gamma$ y, por lo tanto,

$$\int_s^\infty F(\tilde{s})\,d\tilde{s} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}\,dt = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \qquad (s > \gamma). \quad ∎$$

EJEMPLO 2 Integración de transformadas

Encontrar la transformada inversa de la función $\ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)$

Solución. Al derivar,

$$-\frac{d}{ds}\ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right) = \frac{2\omega^2}{s(s^2+\omega^2)} = \frac{2}{s} - 2\frac{s}{s^2+\omega^2},$$

donde la última igualdad puede comprobarse con facilidad por cálculo directo. Esta es la $F(s)$ presente. Es la derivada de la función dada (multiplicada por -1), de modo que la última es la integral de $F(s)$ de s a ∞. Por la tabla 6.1 de la sección 6.1 se obtiene

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} - 2\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} = 2 - 2\cos\omega t.$$

Esta función satisface las condiciones bajo las cuales (6) es válida. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(\tilde{s})\,d\tilde{s}\right\} = \frac{f(t)}{t}.$$

El resultado es

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)\right\} = \frac{2}{t}(1-\cos\omega t).$$

Con esto se demuestra la fórmula 42 de la tabla de la sección 6.10. ∎

EJEMPLO 3 Integración de transformadas

Siguiendo el razonamiento del ejemplo 2, se obtiene (ver la fórmula 43 en la tabla de la sección 6.10)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1-\frac{a^2}{s^2}\right)\right\} = \frac{2}{t}(1-\cosh at).$$ ∎

Ecuaciones diferenciales con coeficientes variables

A partir de (1) y de (1), (2) de la sección 6.2 y al derivar se tiene

$$(7)\quad \mathcal{L}(ty') = -\frac{d}{ds}[sY - y(0)] = -Y - sY',$$

$$(8)\quad \mathcal{L}(ty'') = -\frac{d}{ds}[s^2Y - sy(0) - y'(0)] = -2sY - s^2Y' + y(0).$$

Por tanto, si una ecuación diferencial tiene coeficientes tales como $at + b$, se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para Y, que en ocasiones es más simple que la ecuación dada. Pero si esta última tiene coeficientes $at^2 + bt + c$, se obtiene, aplicando dos veces (1), una ecuación diferencial de segundo orden para Y, y con esto se encuentra que el método de la transformada de Laplace sólo funciona correctamente para ecuaciones muy especiales con coeficientes variables. En el ejemplo siguiente se ilustra lo anterior para una importante ecuación.

EJEMPLO 4 Ecuación diferencial de Laguerre, polinomios de Laguerre

La ecuación diferencial de Laguerre es (ver también los problemas de la sección 5.9)

(9) $$ty'' + (1 - t)y' + ny = 0.$$

Se determina una solución de (9) con $n = 0, 1, 2, \cdots$. Por (7)–(9) se obtiene

$$-2sY - s^2Y' + y(0) + sY - y(0) - (-Y - sY') + nY = 0.$$

Al simplificar se obtiene

$$(s - s^2)Y' + (n + 1 - s)Y = 0.$$

Por separación de variables, usando fracciones parciales e integrando (tomando como cero la constante de integración), se obtiene

(10*) $$\frac{dY}{Y} = \left(\frac{n}{s-1} - \frac{n+1}{s}\right) ds \qquad \text{y} \qquad Y = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}.$$

Se escribe $l_n = \mathcal{L}^{-1}(Y)$ y se demuestra que

(10) $$l_0 = 1, \qquad l_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}), \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Estos son polinomios porque los términos exponenciales se cancelan si se llevan a cabo las derivaciones indicadas. Se conocen como **polinomios de Laguerre** y se acostumbra denotarlos por L_n (pero aquí se sigue la convención de reservar las mayúsculas para las transformadas). Se demuestra ahora (10). Por la tabla 6.1 y el primer teorema de traslación

$$\mathcal{L}(t^n e^{-t}) = \frac{n!}{(s+1)^{n+1}}.$$

Por (4) de la sección 6.2,

$$\mathcal{L}\{(t^n e^{-t})^{(n)}\} = \frac{n!s^n}{(s+1)^{n+1}}.$$

Se hace ahora otra traslación y se divide entre $n!$ para obtener [ver (10) y (10*)]

$$\mathcal{L}(l_n) = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} = Y.$$ ∎

Problemas de la sección 6.5

Usando (1), encontrar la transformada de Laplace de

1. $2t \cos 2t$ **2.** $4te^{2t}$ **3.** t^2e^t **4.** $t \cosh t$

5. $t \operatorname{senh} 3t$ **6.** $t^2 \operatorname{senh} 2t$ **7.** $t \operatorname{sen} \omega t$ **8.** $t^2 \operatorname{sen} \omega t$

9. $t^2 \cos t$ **10.** $t^2 \cos \omega t$ **11.** $\frac{1}{2}te^{-2t} \operatorname{sen} t$ **12.** $te^{-2t} \operatorname{sen} \omega t$

Usando (6) o (1), encontrar $f(t)$ si $\mathcal{L}(f)$ es igual a

13. $\dfrac{4}{(s+1)^2}$ **14.** $\dfrac{8s}{(s^2+4)^2}$ **15.** $\dfrac{4s}{(s^2-4)^2}$ **16.** $\dfrac{2}{(s-a)^3}$

17. $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$ **18.** $\ln \dfrac{s+a}{s+b}$ **19.** $\ln \dfrac{s}{s-1}$ **20.** $\ln \dfrac{s^2+1}{(s-1)^2}$

21. $\operatorname{arc\,cot}(s/\omega)$ **22.** $\operatorname{arc\,cot}(s+1)$

23. Resolver los problemas 2 y 3 aplicando el primer teorema de traslación.

24. Encontrar $\mathcal{L}(t^n e^{at})$ aplicando varias veces (1), con $f(t) = e^{at}$.

25. Efectuar la derivación en el ejemplo 3.

6.6 CONVOLUCIÓN. ECUACIONES INTEGRALES

Otra propiedad general importante de la transformada de Laplace se relaciona con productos de transformadas. Es frecuente contar con dos transformadas $F(s)$ y $G(s)$ cuyas inversas $f(t)$ y $g(t)$ se conocen, y se querría calcular la inversa del producto $H(s) = F(s)G(s)$ a partir de las inversas conocidas $f(t)$ y $g(t)$. Esta inversa $h(t)$ se escribe $(f * g)(t)$, que es una notación común, y se llama la **convolución** de f y g. ¿Cómo puede encontrarse h a partir de f y g? Esto se establece en el siguiente teorema. Debido a que la situación y la tarea que acaba de describirse surgen con mucha frecuencia en la práctica, este teorema es de considerable importancia práctica.

Teorema 1 (Teorema de convolución)

*Sea que $f(t)$ y $g(t)$ que satisfacen las hipótesis del teorema de existencia (sección 6.1). Entonces el producto de sus transformadas $F(s) = \mathcal{L}(f)$ y $G(s) = \mathcal{L}(g)$ es la transformada $H(s) = \mathcal{L}(h)$ de la **convolución** $h(t)$ de $f(t)$ y $g(t)$, que se escribe $\mathcal{L}(f * g)(t)$ y se define por*

(1)
$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau.$$

(La demostración se presenta después del ejemplo 3.)

EJEMPLO 1 Convolución

Usando la convolución, encontrar la inversa $h(t)$ de

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}.$$

Solución. Se sabe que cada uno de los factores del segundo miembro tiene la inversa sen t. Por tanto, por el teorema de convolución y por (11), apéndice 3.1, se obtiene

$$\begin{aligned} h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H) &= \operatorname{sen} t * \operatorname{sen} t \\ &= \int_0^t \operatorname{sen} \tau \operatorname{sen}(t - \tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t -\cos t\, d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2\tau - t)\, d\tau \\ &= -\tfrac{1}{2} t \cos t + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Convolución

$1/s^2$ tiene la inversa t y $1/s$ tiene la inversa 1, y el teorema de convolución confirma que $1/s^3 = (1/s^2)(1/s)$ tiene la inversa

$$t * 1 = \int_0^t \tau \cdot 1\, d\tau = \frac{t^2}{2}.$$

■

EJEMPLO 3 Convolución

Sea $H(s) = 1/[1/s^2(s-a)]$. Encontrar $h(t)$.

Solución. Por la tabla 6.1 (sección 6.1) se sabe que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}.$$

Usando el teorema de convolución e integrando por partes, se llega a la respuesta

$$h(t) = t * e^{at} = \int_0^t \tau e^{a(t-\tau)}\, d\tau = e^{at}\int_0^t \tau e^{-a\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1).$$

∎

Demostración del teorema 1. Por la definición de $G(s)$ y el segundo teorema de traslación, para cada fija $\tau (\tau \geqq 0)$ se tiene

$$e^{-s\tau}G(s) = \mathcal{L}\{g(t-\tau)u(t-\tau)\}$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}g(t-\tau)u(t-\tau)\, dt$$

$$= \int_\tau^\infty e^{-st}g(t-\tau)\, dt$$

donde $s > \gamma$. A partir de esta expresión y de la definición de $F(s)$ se obtiene

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)G(s)\, d\tau = \int_0^\infty f(\tau)\int_\tau^\infty e^{-st}g(t-\tau)\, dt\, d\tau$$

donde $s > \gamma$. En este caso se integra respecto a t de τ a ∞ y después con respecto τ de 0 a ∞; esto corresponde a la región triangular coloreada que se extiende al infinito en el plano $t\tau$ ilustrado en la figura 105. Los supuestos de f y g son tales que el orden de la integración puede invertirse. (En la referencia [A3] del apéndice 1 se incluye una demostración que requiere del conocimiento de la convergencia uniforme.) Entonces se integra primero con respecto a τ de 0 a t (ver la figura 105) y luego con respecto a t de 0 a ∞; por tanto

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}h(t)\, dt = \mathcal{L}(h)$$

donde h está dada por (1). Con esto se termina la demostración. ∎

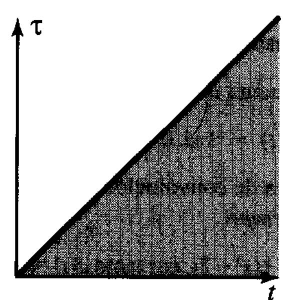


Figura 105. Región de integración en el plano t en la demostración del teorema 1.

Usando la definición, el lector puede demostrar que la convolución $f * g$ posee las propiedades

$$f * g = g * f \qquad \text{(ley conmutativa)}$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \qquad \text{(ley distributiva)}$$

$$(f * g) * v = f * (g * v) \qquad \text{(ley asociativa)}$$

$$f * 0 = 0 * f = 0,$$

como para los números. Pero en general $f * 1 \neq f$, como lo indica el ejemplo 2. Otra propiedad inusual es que la desigualdad $(f * f)(t) \geqq 0$ puede no ser válida, como puede verse por el ejemplo 1.

Aplicaciones muy útiles de la convolución se presentan de manera natural en la solución de ecuaciones diferenciales, cómo se discutirá a continuación.

Ecuaciones diferenciales

Por la sección 6.2 se recuerda que la ecuación subsidiaria de la ecuación diferencial

(2) $$y'' + ay' + by = r(t)$$

tiene la solución

(3) $$Y(s) = [(s + a)y(0) + y'(0)]Q(s) + R(s)Q(s)$$

Con $R(s) = \mathcal{L}(r)$ y $Q(s) = 1/(s^2 + as + b)$ la función de transferencia. Por tanto, para la solución $y(t)$ de (2) que satisface $y(0) = y'(0) = 0$ se tiene $Y = RQ$ en (3) y por el teorema de convolución se obtiene la representación con integral

(4) $$\boxed{y(t) = \int_0^t q(t - \tau)r(\tau)\, d\tau,} \qquad q(t) = \mathcal{L}^{-1}(Q).$$

EJEMPLO 4 Respuesta de un sistema no amortiguado a una sola onda cuadrada.

Se considera de nueva cuenta el modelo del ejemplo 2 de la sección 6.2,

$$y'' + 2y = r(t), \qquad r(t) = 1 \text{ si } 0 < t < 1 \text{ y } 0 \text{ en caso contrario}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Se resuelve por la técnica de convolución a fin de ver cómo funciona para ***entradas que actúan únicamente durante algún tiempo.***

Solución. Se tiene $Q(s) = 1(s^2+2)$, por tanto $q(t) = (\text{sen } \sqrt{2t}\,)/\sqrt{2}$. Ahora debe tenerse cuidado y recordarse que $r(t) = 1$ si $0 < t < 1$ pero $r(t) = 0$ si $t > 1$. En consecuencia, en (4) se integra de 0 a t cuando $t < 1$ pero de 0 a 1 sólo cuando $t > 1$. Por tanto, para $t < 1$ (se integra con respecto τ, de donde por la regla de la cadena se obtiene -1),

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \text{sen } \sqrt{2}(t - \tau)\, d\tau = \frac{1}{2} \cos \sqrt{2}(t - \tau) \Big|_0^t = \frac{1}{2}(1 - \cos \sqrt{2}t)$$

y para $t > 1$,

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \text{sen } \sqrt{2}(t - \tau)\, d\tau = \frac{1}{2} [\cos \sqrt{2}(t - 1) - \cos \sqrt{2}t].$$ ∎

Ecuaciones integrales

La convolución también ayuda a resolver ciertas **ecuaciones integrales**, es decir, ecuaciones en las que la función desconocida $y(t)$ aparece afectada por el signo de integral (y quizás también fuera del mismo). Esto se refiere tan sólo a ecuaciones muy especiales (aquéllas cuya integral es de la forma de una convolución), por lo que basta considerar un ejemplo típico y algunos problemas, pero se procede de este modo porque las ecuaciones integrales tienen importancia práctica y suelen ser difíciles de resolver.

EJEMPLO 5 Ecuación integral

Resolver la ecuación integral

$$y(t) = t + \int_0^t y(\tau) \text{ sen } (t - \tau)\, d\tau.$$

Solución. Primer paso. Ecuación en términos de convolución. Se observa que la ecuación dada puede escribirse

$$y = t + y * \text{sen } t.$$

Segundo paso. Aplicación del teorema de convolución. Se escribe $Y = \mathcal{L}(y)$. Por el teorema de convolución,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + Y(s) \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Al resolver esta expresión para $Y(s)$ se obtiene

$$Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}.$$

Tercer paso. Se toma la transformada inversa. De esta expresión se obtiene la solución

$$y(t) = t + \tfrac{1}{6}t^3.$$

El lector puede comprobarla por sustitución y evaluando la integral por integración por partes repetida (la cual requerirá de paciencia). ∎

Problemas de la sección 6.6

Encontrar las siguientes convoluciones. [*Sugerencia.* En los problemas 7-10 usar (11) del apéndice 3.]

1. $1 * 1$ **2.** $t * t^2$ **3.** $e^t * e^t$
4. $e^{kt} * e^{-kt}$ **5.** $t^2 * t^2$ **6.** $t * e^{at}$
7. $\operatorname{sen} \omega t * \cos \omega t$ **8.** $\operatorname{sen} \omega t * \operatorname{sen} \omega t$ **9.** $\operatorname{sen} t * \operatorname{sen} 2t$
10. $\cos \omega t * \cos \omega t$ **11.** $u(t - \pi) * \cos t$ **12.** $u(t - 1) * t$

Aplicación del teorema de convolución. Encontrar $h(t)$ por el teorema de convolución si $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ es igual a

13. $\dfrac{1}{(s-1)^2}$ **14.** $\dfrac{1}{s(s-1)}$ **15.** $\dfrac{1}{s^2(s-3)}$

16. $\dfrac{1}{s(s-2)^2}$ **17.** $\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$ **18.** $\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$

19. $\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$ **20.** $\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}$ **21.** $\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

22. $\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$ **23.** $\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$ **24.** $\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$

Propiedades generales de la convolución

25. Demostrar la ley conmutativa $f * g = g * f$.
26. Demostrar la ley asociativa $(f * g) * v = f * (g * v)$.
27. Demostrar la ley distributiva $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$.
28. **(Función delta de Dirac)** Usando el teorema de convolución y tratando la función delta de Dirac (sección 6.4) como si fuera una función ordinaria, demostrar que

$$(\delta * f)(t) = f(t).$$

29. Deducir la fórmula del problema 28 usando f_k con $a = 0$ (sección 6.4) y aplicando el teorema del valor medio para integrales.
30. Usando el teorema de convolución, demostrar por inducción que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\} = \frac{1}{(n-1)!}\, t^{n-1}e^{at}.$$

Aplicación de la convolución a problemas con valor inicial. Usando el teorema de convolución, resolver:

31. $y'' + y = \operatorname{sen} 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
32. $y'' + y = \operatorname{sen} t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
33. $y'' + y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
34. $y'' + 3y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
35. $y'' + 25y = 5.2e^{-t}, \quad y(0) = 1.2, \quad y'(0) = -10.2$
36. $y'' + 2y = r(t)$, $r(t) = 1$ si $0 < t < 1$ y 0 si $t > 1$; $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
37. El problema del tubo cañón (problema 22, sección 2.11).

38. $y'' + 3y' + 2y = r(t)$, $r(t) = 1$ si $0 < t < t_0$ y 0 si $t > t_0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
39. $y'' + 4y = u(t - 1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
40. $y'' + 3y' + 2y = 1 - u(t - 1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
41. $y'' + 9y = r(t)$, $r(t) = 8 \operatorname{sen} t$ si $0 < t < \pi$ y 0 si $t > \pi$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$
42. $y'' - 5y' + 6y = r(t)$, $r(t) = 4e^t$ si $0 < t < 2$ y 0 si $t > 2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$
43. $y'' + 4y = r(t)$, $r(t) = 3 \operatorname{sen} t$ si $0 < t < \pi$ y $-3 \operatorname{sen} t$ si $t > \pi$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$
44. $y'' + 3y' + 2y = r(t)$, $r(t) = 4t$ si $0 < t < 1$ y 8 si $t > 1$; $y(0) = y'(0) = 0$

Ecuaciones integrales

Usando transformadas de Laplace, resolver:

45. $y(t) = 1 + \int_0^t y(\tau)\, d\tau$

46. $y(t) = \operatorname{sen} 2t + \int_0^t y(\tau) \operatorname{sen} 2(t - \tau)\, d\tau$

47. $y(t) = 1 - \int_0^t (t - \tau) y(\tau)\, d\tau$

48. $y(t) = \operatorname{sen} t + \int_0^t y(\tau) \operatorname{sen}(t - \tau)\, d\tau$

49. $y(t) = te^t - 2e^t \int_0^t e^{-\tau} y(\tau)\, d\tau$

50. $y(t) = t + e^t - \int_0^t y(\tau) \cosh(t - \tau)\, d\tau$

6.7 FRACCIONES PARCIALES. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Se ha visto que las fracciones parciales son necesarias para obtener la solución $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y)$ de un problema a partir de la solución $Y(s)$ de la ecuación subsidiaria, ya que Y por lo general resulta como un cociente de dos polinomios

$$Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)},$$

y para una fracción parcial P, la inversa $\mathcal{L}^{-1}(P)$ es fácil de obtener usando una tabla y el primer teorema de traslación.

El lector puede omitir esta sección. Use el método de fracciones parciales del cálculo elemental que mejor le acomode y cualesquiera recursos que faciliten la tarea. Consulte la presente sección en caso de que se encuentre atorado. Se procede de manera sistemática en el siguiente orden:

(Caso 1) Factor $s - a$ no repetido.
(Caso 2) Factor $(s - a)^m$ repetido.
(Caso 3) Factores complejos $(s - a)(s - \bar{a})$.
(Caso 4) Factores complejos $[(s - a)(s - \bar{a})]^2$ repetidos.

No se consideran las potencias superiores $[(s-a)(s-\bar{a})]^m$ porque son de escaso interés práctico. Cada caso se discute con un ejemplo y al final se presentan las demostraciones para los cuatro casos. Las fórmulas de esta sección suelen conocerse como **fórmulas de expansión de Heaviside**.

Supuesto general

$F(s)$ y $G(s)$ tienen coeficientes reales y no tienen factores comunes. El grado de $F(s)$ es menor que el de $G(s)$.

Caso 1. Factor $s - a$ no repetido

En $Y = F/G$, a este factor le corresponde una fracción

(1a) $$\frac{A}{s-a}.$$

En la tabla 6.1 de la sección 6.1 se observa que su transformada inversa es

(1b) $$Ae^{at}.$$

Más adelante se demuestra que la constante A está dada por

(1c) $$A = \lim_{s\to a} \frac{(s-a)F(s)}{G(s)} \qquad \text{o por} \qquad A = \frac{F(a)}{G'(a)}.$$

EJEMPLO 1 Factores no repetidos

Encontrar la transformada inversa de

$$Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{s+1}{s^3+s^2-6s}$$

Solución. Puesto que $G(s) = s(s-2)(s+3)$ tiene tres factores lineales diferentes, Y tiene la representación

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-2} + \frac{A_3}{s+3}.$$

Se determinan A_1, A_2, A_3. Al multiplicar por $G(s)$ se obtiene

$$s + 1 = (s-2)(s+3)A_1 + s(s+3)A_2 + s(s-2)A_3.$$

Tomando $s = 0$, $s = 2$, $s = -3$ se obtiene

$$1 = -2\cdot 3A_1, \qquad 3 = 2\cdot 5A_2, \qquad -2 = -3(-5)A_3.$$

Por tanto, $A_1 = -1/6$, $A_2 = 3/10$, $A_3 = -2/15$. La respuesta es

$$\mathcal{L}^{-1}(Y) = -\tfrac{1}{6} + \tfrac{3}{10}e^{2t} - \tfrac{2}{15}e^{-3t}.$$ ∎

Caso 2. Factor $(s-a)^m$ repetido

En $Y = F/G$, a este factor le corresponde una suma de m fracciones

(2a) $$\frac{A_m}{(s-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{s-a}.$$

Por la tabla 6.1 y el primer teorema de traslación (sección 6.3) se sigue que su transformada inversa es

(2b) $$e^{at}\left(A_m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + A_{m-1}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + A_2\frac{t}{1!} + A_1\right).$$

Más adelante se demuestra que la constante A_m está dada por

(2c) $$A_m = \lim_{s\to a} \frac{(s-a)^m F(s)}{G(s)}$$

y que las otras constantes están dadas por

(2d) $$A_k = \frac{1}{(m-k)!}\lim_{s\to a}\frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}}\left[\frac{(s-a)^m F(s)}{G(s)}\right], \qquad k = 1, \cdots, m-1.$$

EJEMPLO 2 Factor repetido. Un problema con valor inicial

Resolver el problema con valor inicial

$$y'' - 3y' + 2y = 4t \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -1.$$

Solución. Por la tabla 6.1, sección 6.1, y (1) y (2) de la sección 6.2 se obtiene la ecuación subsidiaria

$$s^2Y - s + 1 - 3(sY - 1) + 2Y = \frac{4}{s^2}.$$

Agrupando los términos en Y en el primer miembro y los restantes en el segundo se tiene

$$(s^2 - 3s + 2)Y = \frac{4}{s^2} + s - 4 = \frac{4 + s^3 - 4s^2}{s^2}.$$

Puesto que $s^2 - 3s + 2 = 0$ tiene las soluciones 2 y 1, se obtiene así la representación en fracciones parciales

$$Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2(s-2)(s-1)} = \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1}.$$

Se determinan primero las constantes A_1 y A_2 en las fracciones parciales correspondientes a la raíz $a = 0$. Por (2c) con $m = 2$,

$$A_2 = \lim_{s\to 0}\frac{s^2(s^3 - 4s^2 + 4)}{s^2(s^2 - 3s + 2)} = \left.\frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2 - 3s + 2}\right|_{s=0} = 2.$$

Por (2d) con $m = 2$ y $k = 1$,

$$A_1 = \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left(\frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2 - 3s + 2}\right) = 3.$$

Se determinan B y C. Por la primera fórmula de (1c),

$$B = \frac{F(s)}{s^2(s-1)}\bigg|_{s=2} = -1, \qquad C = \frac{F(s)}{s^2(s-2)}\bigg|_{s=1} = -1.$$

De las expresiones anteriores se llega a la respuesta

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2} + \frac{3}{s} - \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right\} = 2t + 3 - e^{2t} - e^{t}. \qquad ■$$

Caso 3. Factores complejos $(s-a)(s-\bar{a})$ no repetidos

Aquí $a = \alpha + i\beta$, por ejemplo, y $\bar{a} = \alpha - i\beta$ es el conjugado complejo de a. Podría trabajarse en los números complejos, pero es preferible permanecer en los reales. Entonces a

$$\begin{aligned}(s-a)(s-\bar{a}) &= s^2 - (a+\bar{a})s + a\bar{a} \\ &= s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 \\ &= (s-\alpha)^2 + \beta^2\end{aligned}$$

le corresponde la fracción parcial

(3a) $$\frac{As + B}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}, \qquad \text{que puede escribirse} \qquad \frac{A(s-\alpha) + \alpha A + B}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

Por la tabla 6.1 y el primer teorema de traslación se obtiene la transformada inversa

(3b) $$e^{\alpha t}\left(A\cos\beta t + \frac{\alpha A + B}{\beta}\operatorname{sen}\beta t\right).$$

Más adelante se demuestra que A es la parte imaginaria y que $(\alpha A + B)/\beta$ es la parte real de

(3c) $$Q_a = \frac{1}{\beta}\lim_{s\to a}\frac{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]F(s)}{G(s)}.$$

EJEMPLO 3A

Factores complejos y reales no repetidos. Solución por inspección

Resolver el problema con valor inicial

$$y^{IV} - k^4 y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \qquad y'''(0) = 1 \qquad (k \neq 0).$$

Solución. Por el teorema 2 de la sección 6.2, la ecuación subsidiaria es

$$s^4 Y - 1 - k^4 Y = 0, \qquad \text{Así,} \qquad (s^4 - k^4)Y = 1.$$

Por inspección,

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + k^2)(s^2 - k^2)} = \frac{1}{2k^2}\left(\frac{1}{s^2 - k^2} - \frac{1}{s^2 + k^2}\right).$$

Por esta expresión y la tabla 6.1,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4 - k^4}\right\} = \frac{1}{2k^3}(\operatorname{senh} kt - \operatorname{sen} kt).$$

Con esto se demuestra también la fórmula 27 de la tabla de la sección 6.10.

El ejemplo anterior ilustra un punto importante. Si no se observa la manera de acortar la tarea, aún puede ***obtenerse ayuda de una reducción sistemática a fracciones parciales:***

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + k^2)(s - k)(s + k)} = \frac{A_1 s + A_2}{s^2 + k^2} + \frac{B}{s - k} + \frac{C}{s + k}.$$

En (3c) se tiene $a = ik$. En consecuencia, $\alpha = 0$ y $\beta = k$. Por tanto,

$$Q_a = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(s - k)(s + k)}\bigg|_{s=ik} = \frac{1}{k(s^2 - k^2)}\bigg|_{s=ik} = -\frac{1}{2k^3}.$$

Esta expresión es real. Por tanto $(\alpha A + B)/\beta = Q_a$ y $A = 0$. Por (3b) se obtiene ahora la transformada inversa

$$-\frac{1}{2k^3}\operatorname{sen} kt.$$

Además, por (1c),

$$B = \frac{1}{(s^2 + k^2)(s + k)}\bigg|_{s=k} = \frac{1}{4k^3}, \qquad C = \frac{1}{(s^2 + k^2)(s - k)}\bigg|_{s=-k} = -\frac{1}{4k^3}.$$

En conjunto, se obtiene como respuesta una expresión que concuerda con la anterior:

$$-\frac{1}{2k^3}\operatorname{sen} kt + \frac{1}{4k^3}(e^{kt} - e^{-kt}) = -\frac{1}{2k^3}\operatorname{sen} kt + \frac{1}{2k^3}\operatorname{senh} kt.$$ ∎

EJEMPLO 3B

Oscilaciones forzadas, sin resonancia. Factores complejos no repetidos

Resolver el problema con valor inicial

$$my'' + ky = K_0 \operatorname{sen} pt, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \qquad (k/m \neq p^2).$$

Solución. Por la sección 2.11 se sabe que esta ecuación es el modelo matemático de las oscilaciones forzadas de un cuerpo de masa m sujeto al extremo inferior de un resorte elástico cuyo extremo superior está fijo (figura 106). k es el módulo del resorte y $K_0 \operatorname{sen} pt$ es la fuerza impulsora o entrada. Haciendo $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, la ecuación puede escribirse en la forma

$$y'' + \omega_0^2 y = K \operatorname{sen} pt \qquad \left(K = \frac{K_0}{m}\right).$$

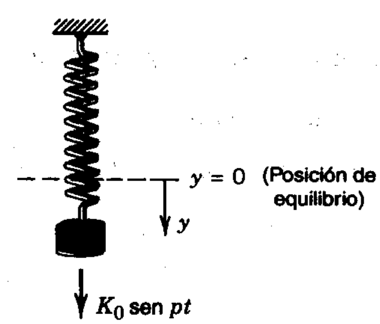


Figura 106. Sistema oscilatorio. Oscilaciones forzadas.

La ecuación subsidiaria es

$$s^2Y + \omega_0^2 Y = K\frac{p}{s^2 + p^2}.$$

La solución es

$$Y(s) = \frac{Kp}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + p^2)} \qquad (\omega_0^2 \neq p^2).$$

Por (3a) la forma de $Y(s)$ en fracciones parciales es

$$Y(s) = \frac{Kp}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + p^2)} = \frac{As + B}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{Ms + N}{s^2 + p^2}.$$

Se determinan primero A y B en la fracción correspondiente a $a_1 = \alpha_1 + i\beta_1 = i\omega_0$. Así, en (3c) se tiene $\alpha = \alpha_1 = 0$, $\beta = \beta_1 = \omega_0$ y $F(s) = Kp$, de donde

$$Q_{a_1} = \frac{1}{\omega_0} \lim_{s \to a_1} \frac{(s^2 + \omega_0^2)Kp}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + p^2)} = \frac{Kp}{s^2 + p^2}\bigg|_{s = a_1} = \frac{Kp}{p^2 - \omega_0^2}.$$

Puesto que Q_a es real, $A = 0$ en (3b) y Q_a es el coeficiente, $(\alpha A + B)/\beta$ en (3b), con $\beta = \omega_0$. Por consiguiente, de (3b) se obtiene la inversa

$$\frac{Kp}{\omega_0(p^2 - \omega_0^2)} \operatorname{sen} \omega_0 t.$$

Se determinan M y N en la última fracción, que corresponde a $a_2 = \alpha_2 + i\beta_2 = ip$. En (3c) se tiene ahora

$$Q_{a_2} = \frac{Kp}{s^2 + \omega_0^2}\bigg|_{s = a_2} = \frac{Kp}{\omega_0^2 - p^2},$$

y por (3b) se obtiene la inversa

$$\frac{Kp}{p(\omega_0^2 - p^2)} \operatorname{sen} pt.$$

Al sumar estas dos inversas se obtiene la solución buscada

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \frac{K}{p^2 - \omega_0^2}\left(\frac{p}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t - \operatorname{sen} pt\right).$$

El caso con resonancia se aborda en el ejemplo 4. ∎

Caso 4. Factores complejos $[(s - a)(s - \bar{a})]^2$ repetidos

En $Y = F/G$, a estos factores les corresponden las fracciones parciales

$$\textbf{(4a)} \qquad \frac{As + B}{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^2} + \frac{Cs + D}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

La segunda fracción es como en (3a). Para la primera fracción puede usarse (3) y (2) de la sección 6.5 y el primer teorema de traslación. Puesto que puede escribirse $As +$

$B = A(s - \alpha) + (\alpha A + B)$, se obtiene así como la transformada inversa de ambas fracciones

$$\text{(4b)} \qquad e^{\alpha t}\left[\frac{A}{2\beta} t \operatorname{sen}\beta t + \frac{\alpha A + B}{2\beta^3}(\operatorname{sen}\beta t - \beta t \cos \beta t)\right] + e^{\alpha t}\left[C \cos \beta t + \frac{\alpha C + D}{\beta} \operatorname{sen}\beta t\right].$$

Más adelante se demuestra que las constantes de (4b) están dadas por las fórmulas

$$\text{(4c)} \qquad \begin{aligned} A &= \operatorname{Im} R_a/\beta, & \alpha A + B &= \operatorname{Re} R_a, \\ C &= (A - \operatorname{Re} S_a)/2\beta^2, & \alpha C + D &= \operatorname{Im} S_a/2\beta \end{aligned}$$

donde Re denota la parte real e Im la parte imaginaria,

$$R_a = \lim_{s \to a} R(s), \qquad S_a = \lim_{s \to a} R'(s)$$

y

$$R(s) = \frac{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^2 F(s)}{G(s)}.$$

EJEMPLO 4 Oscilaciones forzadas, con resonancia. Factores complejos repetidos

En el ejemplo 3B se tenía que $\omega_0^2 = k/m \neq p^2$ y no había resonancia. Se supone ahora que $\omega_0^2 = p^2$, lo cual dará lugar a la resonancia. Entonces $Y(s)$ es (ver el ejemplo 3B)

$$Y(s) = \frac{K\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)^2}.$$

El denominador tiene las raíces dobles $a = \alpha + i\beta = i\omega_0$ y $\bar{a} = -i\omega_0$, es decir, $\alpha = 0$ y $\beta = \omega_0$. Este denominador se cancela en $R(s)$ en (4c) y se tiene tan sólo

$$R(s) = K\omega_0, \qquad R_a = K\omega_0, \qquad S_a = 0.$$

Por tanto, en (4c) se obtiene $\alpha A + B = K\omega_0$, mientras que las otras expresiones de (4c) son cero. En consecuencia, de (4b) se obtiene la solución

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \frac{K}{2\omega_0^2}(\operatorname{sen}\omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t).$$

El último término crece sin restricción, indicando la resonancia, como en la sección 2.11. ∎

Demostraciones de las fórmulas (1c), (2c), (2d), (3c), (4c)

En estas demostraciones, $W(s)$ denota siempre la suma de las otras fracciones parciales de $Y(s) = F(s)/G(s)$.

Demostración de (1c) en el caso 1

En este caso,

$$Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{A}{s - a} + W(s).$$

Al multiplicar por $s - a$ se obtiene

$$\frac{(s - a)F(s)}{G(s)} = A + (s - a)W(s).$$

La primera fórmula de (1c) se establece haciendo que $s \to a$ y observando que $(s - a)W(s) \to 0$, ya que $W(s)$ no tiene ningún factor que pueda cancelar $s - a$. La segunda fórmula de (1c) se obtiene escribiendo

$$\frac{(s - a)F(s)}{G(s)} = \frac{F(s)}{G(s)/(s - a)}$$

y haciendo que $s \to a$. Entonces $F(s) \to F(a)$ en el numerador, mientras que el denominador aparece como una indeterminación de la forma 0/0; al evaluar esta última de la manera usual, se obtiene el denominador de la segunda fórmula de (1c):

$$\lim_{s \to a} \frac{G(s)}{s - a} = \lim_{s \to a} \frac{G'(s)}{(s - a)'} = G'(a).$$ ∎

Demostración de (2c) y (2d) en el caso 2

En este caso,

$$Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{A_m}{(s - a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s - a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{s - a} + W(s).$$

Al multiplicar por $(s - a)^m$ se obtiene

$$\frac{(s - a)^m F(s)}{G(s)} = A_m + (s - a)A_{m-1} + (s - a)^2 A_{m-2} + \cdots + (s - a)^m W(s).$$

Haciendo que $s \to a$ se obtiene (2c). Al derivar,

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{(s - a)^m F(s)}{G(s)}\right] = A_{m-1} + \text{términos adicionales que contienen factores } s - a.$$

Al hacer que $s \to a$ se obtiene A_{m-1} según está dada por (2d) con $k = m - 1$. Al derivar otra vez se obtiene A_{m-2} y así sucesivamente. Con esto se demuestra (2d). ∎

Demostración de (3c) *en el caso 3*

En esta demostración basta escribir $p(s) = (s-a)(s-\bar{a}) = (s-\alpha)^2 + \beta^2$. Entonces por (3a)

$$Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{As + B}{p(s)} + W(s) \qquad (A,\ B \text{ reales}),$$

Se multiplica esta expresión por $p(s)$,

$$\frac{p(s)F(s)}{G(s)} = As + B + p(s)W(s).$$

Ahora se hace que $s \to a$. Puesto que $p(a) = 0$ y $W(s)$ no tiene ningún factor que pueda cancelar $s - a$, y como $a = \alpha + i\beta$, se obtiene

$$Q_a = \lim_{s \to a} \frac{p(s)F(s)}{G(s)} = Aa + B = (\alpha A + B) + i\beta A.$$

Al dividir entre β y separando las partes reales e imaginarias en ambos miembros se obtiene la expresión de (3c). ∎

Demostración de (4c) *en el caso 4*

Al escribir $p(s)$ como antes, por (4a) se obtiene

$$Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{As + B}{p^2(s)} + \frac{Cs + D}{p(s)} + W(s).$$

Al multiplicar esta expresión por $p^2(s)$ se obtiene

$$R(s) = \frac{p^2(s)F(s)}{G(s)} = As + B + p(s)(Cs + D) + p^2(s)W(s).$$

Se hace que $s \to a$. Entonces se obtiene, ya que $p(a) = 0$,

$$R_a = \lim_{s \to a} R(s) = Aa + B = (\alpha A + B) + i\beta A.$$

Al separar las partes real e imaginaria se obtienen las dos primeras fórmulas de (4c). Al derivar,

$$R'(s) = A + p'(s)(Cs + D) + \text{términos que contienen } p(s).$$

Aquí, de $p(s) = (s-\alpha)^2 + \beta^2$ se obtiene $p'(s) = 2(s - \alpha)$. Ahora se hace que $s \to a$. Puesto que $p'(s) = 2(a - \alpha) = 2i\beta$, se obtiene

$$S_a = \lim_{s \to a} R'(s) = A + 2i\beta[C(\alpha + i\beta) + D]$$

$$= (A - 2\beta^2 C) + 2i\beta(\alpha C + D).$$

Al separar las partes real e imaginaria se obtienen las otras dos fórmulas de (4c). ∎

Sistemas de ecuaciones diferenciales

La transformada de Laplace también puede usarse para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, tarea en la que también se necesitan fracciones parciales. El método se explica en términos de un ejemplo típico.

EJEMPLO 5 Modelo de dos masas en resortes

El sistema mecánico de la figura 107 consta de dos masas en tres resortes y está gobernado por las ecuaciones diferenciales

$$
\begin{aligned}
y_1'' &= -ky_1 + k(y_2 - y_1) \\
y_2'' &= -k(y_2 - y_1) - ky_2,
\end{aligned} \tag{5}
$$

donde k es el módulo de cada uno de los tres resortes, y_1 y y_2 son los desplazamientos de las masas desde sus respectivas posiciones de equilibrio estático; se desprecian las masas de los resortes y el amortiguamiento. La derivación de (5) es similar a la de las ecuaciones diferenciales de la sección 4.1.

Se determinará la solución correspondiente a las condiciones iniciales $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_1'(0) = \sqrt{3k}$, $y_2'(0) = -\sqrt{3k}$. Sean $Y_1 = \mathcal{L}(y_1)$ y $Y_2 = \mathcal{L}(y_2)$. Entonces por (2) de la sección 6.2 y las condiciones iniciales se obtienen las ecuaciones subsidiarias

$$
\begin{aligned}
s^2Y_1 - s - \sqrt{3k} &= -kY_1 + k(Y_2 - Y_1) \\
s^2Y_2 - s + \sqrt{3k} &= -k(Y_2 - Y_1) - kY_2.
\end{aligned}
$$

Este sistema de ecuaciones algebraicas lineales en las incógnitas Y_1 y Y_2 puede escribirse

$$
\begin{aligned}
(s^2 + 2k)Y_1 - kY_2 &= s + \sqrt{3k} \\
-kY_1 + (s^2 + 2k)Y_2 &= s - \sqrt{3k}.
\end{aligned}
$$

Por la regla de Cramer (sección 7.9) o por eliminación se obtiene la solución

$$
Y_1 = \frac{(s + \sqrt{3k})(s^2 + 2k) + k(s - \sqrt{3k})}{(s^2 + 2k)^2 - k^2}
$$

$$
Y_2 = \frac{(s^2 + 2k)(s - \sqrt{3k}) + k(s + \sqrt{3k})}{(s^2 + 2k)^2 - k^2}.
$$

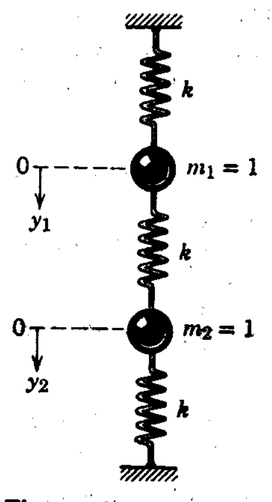


Figura 107. Ejemplo 5.

Las representaciones en términos de fracciones parciales son

$$Y_1 = \frac{s}{s^2+k} + \frac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}, \qquad Y_2 = \frac{s}{s^2+k} - \frac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}.$$

Por tanto, la solución del problema con valor inicial planteado es

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y_1) = \cos\sqrt{k}t + \operatorname{sen}\sqrt{3k}t$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y_2) = \cos\sqrt{k}t - \operatorname{sen}\sqrt{3k}t.$$

Se observa que el movimiento de cada masa es armónico (¡el sistema es no amortiguado!), siendo la superposición de una oscilación "lenta" y una "rápida". ∎

Problemas de la sección 6.7

Usando fracciones parciales, encontrar $f(t)$ si $\mathcal{L}(f)$ es igual a

1. $\dfrac{1}{(s-4)(s-1)}$
2. $\dfrac{s-3}{s^2-1}$
3. $\dfrac{3s}{s^2+2s-8}$
4. $\dfrac{s+12}{s^2+4s}$
5. $\dfrac{s+13}{s^2+2s+10}$
6. $\dfrac{-s+4.5}{s^2+2.25}$
7. $\dfrac{s^2-6s+4}{s^3-3s^2+2s}$
8. $\dfrac{s}{(s-2)^3}$
9. $\dfrac{10-4s}{(s-2)^2}$
10. $\dfrac{s}{s^2+2s+2}$
11. $\dfrac{s^2+s-2}{(s+1)^3}$
12. $\dfrac{s^2+2s}{(s^2+2s+2)^2}$
13. $\dfrac{-2s^3+26s}{s^4-10s^2+9}$
14. $\dfrac{s+1}{s^2+4s+13}$
15. $\dfrac{s^3+3s^2-s-3}{(s^2+2s+5)^2}$
16. $\dfrac{6s^2-26s+26}{s^3-6s^2+11s-6}$
17. $\dfrac{s^3+6s^2+14s}{(s+2)^4}$
18. $\dfrac{s^4+3(s+1)^3}{s^4(s+1)^3}$
19. $\dfrac{2s^2-3s}{(s-2)(s-1)^2}$
20. $\dfrac{s^3-7s^2+14s-9}{(s-1)^2(s-2)^3}$
21. Resolver el problema 1 por convolución.
22. Comprobar el resultado del ejemplo 1 (i) resolviéndolo en el sentido inverso, (ii) usando el teorema 3 de la sección 6.2, (iii) por métodos de convolución.

Algunas inversas en términos de funciones hiperbólicas. Demostrar que

23. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4+4a^4}\right\} = \dfrac{1}{4a^3}(\cosh at \operatorname{sen} at - \operatorname{senh} at \cos at)$
24. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^4+4a^4}\right\} = \dfrac{1}{2a^2}\operatorname{senh} at \operatorname{sen} at$
25. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{s^4+4a^4}\right\} = \dfrac{1}{2a}(\cosh at \operatorname{sen} at + \operatorname{senh} at \cos at)$
26. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}\right\} = \cosh at \cos at$

Sistemas de ecuaciones diferenciales. Resolver los siguientes problemas con valor inicial por medio de transformadas de Laplace.

27. $y_1' = -y_2, \quad y_2' = y_1, \qquad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0$
28. $y_1' + y_2 = 2\cos t, \quad y_1 + y_2' = 0, \qquad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1$
29. $y_1' = -y_1 + y_2, \quad y_2' = -y_1 - y_2, \qquad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0$
30. $y_1' = 6y_1 + 9y_2, \quad y_2' = y_1 + 6y_2, \qquad y_1(0) = -3, \quad y_2(0) = -3$
31. $y_1' = 2y_1 + 4y_2, \quad y_2' = y_1 + 2y_2, \qquad y_1(0) = -4, \quad y_2(0) = -4$
32. $y_1' = -y_1 + 4y_2, \quad y_2' = 3y_1 - 2y_2, \qquad y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = 4$
33. $y_1' = 2y_1 - 4y_2, \quad y_2' = y_1 - 3y_2, \qquad y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = 0$
34. $y_1' = 5y_1 + y_2, \quad y_2' = y_1 + 5y_2, \qquad y_1(0) = -3, \quad y_2(0) = 7$
35. $y_1' = -2y_1 + 3y_2, \quad y_2' = 4y_1 - y_2, \qquad y_1(0) = 4, \quad y_2(0) = 3$
36. $y_1'' + y_2 = -5\cos 2t, \quad y_2'' + y_1 = 5\cos 2t,$
    $y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_2'(0) = 1$
37. $y_1'' = y_1 + 3y_2, \quad y_2'' = 4y_1 - 4e^t,$
    $y_1(0) = 2, \quad y_1'(0) = 3, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2'(0) = 2$
38. $y_1'' = -5y_1 + 2y_2, \quad y_2'' = 2y_1 - 2y_2,$
    $y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1'(0) = y_2'(0) = 0$
39. $y_1' + y_2' = 2\,\mathrm{senh}\, t, \quad y_2' + y_3' = e^t, \quad y_3' + y_1' = 2e^t + e^{-t},$
    $y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 0$
40. $2y_1' - y_2' - y_3' = 0, \quad y_1' + y_2' = 4t + 2, \quad y_2' + y_3 = t^2 + 2,$
    $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$

6.8 FUNCIONES PERIÓDICAS. APLICACIONES ADICIONALES

Las funciones periódicas aparecen en muchos problemas prácticos y en la mayoría de los casos son más complicadas que las funciones coseno y seno. Este hecho justifica el tema de la presente sección, que es un tratamiento sistemático de la transformación de funciones periódicas. El texto y los problemas de la sección también incluyen aplicaciones adicionales.

Sea $f(t)$ una función que está definida para toda t positiva y que tiene el periodo p (> 0), es decir,

$$f(t + p) = f(t) \qquad \text{para toda } t > 0.$$

Si $f(t)$ es continua por secciones en un intervalo de longitud p, entonces su transformada de Laplace existe y la integral de cero a infinito puede escribirse como la serie de integrales con respecto a periodos consecutivos:

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^p e^{-st} f\, dt + \int_p^{2p} e^{-st} f\, dt + \int_{2p}^{3p} e^{-st} f\, dt + \cdots .$$

Si se sustituye $t = \tau + p$ en la segunda integral, $t = \tau + 2p$ en la tercera, $\cdots$, $t = \tau + (n - 1)p$ en la n-ésima integral, $\cdots$, entonces los nuevos límites en todas las integrales son 0 y p. Puesto que

$$f(\tau + p) = f(\tau), \qquad f(\tau + 2p) = f(\tau),$$

etc., se obtiene así

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau + \int_0^p e^{-s(\tau+p)} f(\tau)\, d\tau + \int_0^p e^{-s(\tau+2p)} f(\tau)\, d\tau + \cdots .$$

Los factores que no dependen de τ pueden sacarse de los signos de integral; se obtiene así

$$\mathcal{L}(f) = [1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + \cdots] \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau.$$

La serie entre corchetes $[\cdots]$ es una serie geométrica cuya suma es $1/(1 - e^{ps})$. Con esto se establece el siguiente resultado.

Teorema 1 (Transformada de funciones periódicas)

La transformada de Laplace de una función periódica y continua por secciones $f(t)$ con periodo p es

$$\text{(1)} \qquad \boxed{\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt} \qquad (s > 0).$$

EJEMPLO 1 Onda cuadrada periódica

Encontrar la transformada de la onda cuadrada ilustrada en la figura 108.

Solución. Se usa (1). Puesto que $p = 2a$, por integración directa y simplificación se obtiene

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-2as}} \left(\int_0^a k e^{-st}\, dt + \int_a^{2a} (-k) e^{-st}\, dt \right)$$

$$= \frac{k}{s} \frac{1 - 2e^{-as} + e^{-2as}}{(1 + e^{-as})(1 - e^{-as})} = \frac{k}{s} \left(\frac{1 - e^{-as}}{1 + e^{-as}} \right)$$

$$= \frac{k}{s} \frac{e^{-as/2}(e^{as/2} - e^{-as/2})}{e^{-as/2}(e^{as/2} + e^{-as/2})} = \frac{k}{s} \frac{2 \operatorname{senh}(as/2)}{2 \cosh(as/2)} .$$

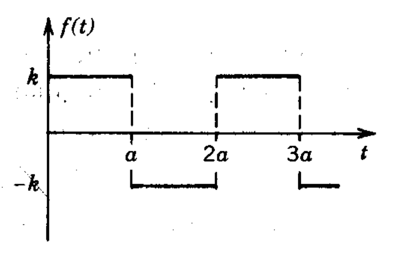


Figura 108. Ejemplo 1.

Por tanto el resultado es

$$\mathcal{L}(f) = \frac{k}{s}\tanh\frac{as}{2}.$$

También puede obtenerse una forma elegante pero más útil del resultado si se describe

$$\mathcal{L}(f) = \frac{k}{s}\left(\frac{1 - e^{-as}}{1 + e^{-as}}\right) = \frac{k}{s}\left(1 - \frac{2e^{-as}}{1 + e^{-as}}\right) = \frac{k}{s}\left(1 - \frac{2}{e^{as} + 1}\right).$$ ∎

EJEMPLO 2 Onda triangular periódica

Encontrar la transformada de la función periódica ilustrada en la figura 109.

Solución. Se observa que $g(t)$ es la integral de la función $f(t)$ con $k = 1$ en el ejemplo 1. Por tanto, por el teorema 3 de la sección 6.2,

$$\mathcal{L}(g) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s^2}\tanh\frac{as}{2}.$$ ∎

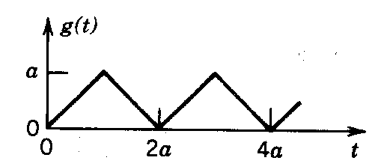


Figura 109. Ejemplo 2.

EJEMPLO 3 Rectificador de media onda

Encontrar la transformada de la siguiente función $f(t)$ con periodo $p = 2\pi/\omega$.

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}\omega t & \text{si} \quad 0 < t < \pi/\omega, \\ 0 & \text{si} \quad \pi/\omega < t < 2\pi/\omega. \end{cases}$$

Obsérvese que esta función es la rectificación de media onda de sen ωt (figura 110).

Solución. Por (1) se obtiene

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s/\omega}} \int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \operatorname{sen}\omega t \, dt.$$

Usando $1 - e^{-2\pi s/\omega} = (1 + e^{-\pi s/\omega})(1 - e^{-\pi s/\omega})$ e integrando por partes o bien observando que la integral es la parte imaginaria de la integral

$$\int_0^{\pi/\omega} e^{(-s+i\omega)t}\, dt = \frac{1}{-s + i\omega} e^{(-s+i\omega)t}\Big|_0^{\pi/\omega} = \frac{-s - i\omega}{s^2 + \omega^2}(-e^{-s\pi/\omega} - 1)$$

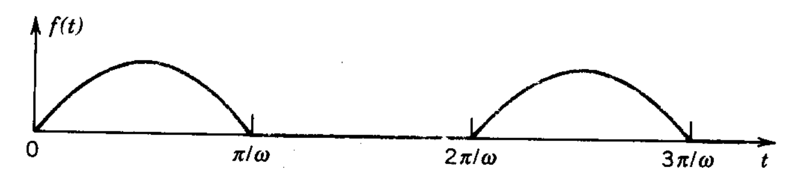


Figura 110. Rectificación de media onda de sen ωt.

se obtiene el resultado

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\omega(1 + e^{-\pi s/\omega})}{(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-2\pi s/\omega})} = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-\pi s/\omega})}.$$ ∎

EJEMPLO 4 Onda diente de sierra

Encontrar la transformada de Laplace de la función (figura 111)

$$f(t) = \frac{k}{p}t \qquad \text{si } 0 < t < p, \qquad f(t + p) = f(t).$$

Solución. Al integrar por partes se obtiene

$$\int_0^p e^{-st}t\,dt = -\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^p + \frac{1}{s}\int_0^p e^{-st}\,dt$$

$$= -\frac{p}{s}e^{-sp} - \frac{1}{s^2}(e^{-sp} - 1),$$

y por (1) se llega al resultado

$$\mathcal{L}(f) = \frac{k}{ps^2} - \frac{ke^{-ps}}{s(1 - e^{-ps})} \qquad (s > 0).$$ ∎

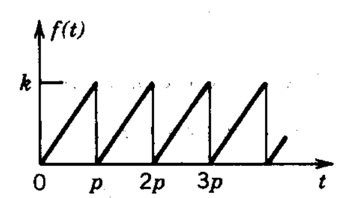


Figura 111. Onda diente de sierra.

EJEMPLO 5 Función escalera

Encontrar la transformada de Laplace de la función escalera (figura 112)

$$g(t) = kn \qquad [np < t < (n + 1)p, \quad n = 0, 1, 2, \cdots].$$

Solución. Puesto que $g(t)$ es la diferencia de las funciones $h(t) = kt/p$ (cuya transformada es k/ps^2) y $f(t)$ del ejemplo 4, se obtiene

$$\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(h) - \mathcal{L}(f) = \frac{ke^{-ps}}{s(1 - e^{-ps})} \qquad (s > 0).$$ ∎

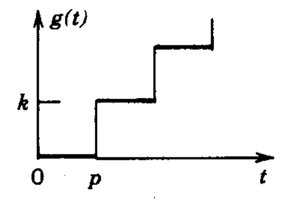


Figura 112. Función escalera.

Se llega así al final del capítulo 6 (excepto por las tablas de las secciones 6.9 y 6.10). La aplicación de la transformada de Laplace a **ecuaciones diferenciales parciales** se explica en la sección 11.13.

Asimismo, este es el final de la parte A sobre ecuaciones diferenciales ordinarias. A continuación se abordan las ecuaciones diferenciales parciales, junto con series de Fourier, en los capítulos 10 y 11 y los **métodos numéricos** para ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como parciales en el capítulo 20.

Problemas de la sección 6.8

Transformadas de Laplace de funciones periódicas. Trazar las siguientes funciones, las cuales se supone tienen el periodo 2π, y encontrar sus transformadas.

1. $f(t) = \pi - t \quad (0 < t < 2\pi)$

2. $f(t) = t \quad (0 < t < 2\pi)$

3. $f(t) = 4\pi^2 - t^2 \quad (0 < t < 2\pi)$

4. $f(t) = t^2 \quad (0 < t < 2\pi)$

5. $f(t) = e^t \quad (0 < t < 2\pi)$

6. $f(t) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}t \quad (0 < t < 2\pi)$

7. $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{si } \pi < t < 2\pi \end{cases}$

8. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < \pi \\ -1 & \text{si } \pi < t < 2\pi \end{cases}$

9. $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 < t < \pi \\ \pi - t & \text{si } \pi < t < 2\pi \end{cases}$

10. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t < \pi \\ t - \pi & \text{si } \pi < t < 2\pi \end{cases}$

11. ¿Cómo puede obtenerse la respuesta del problema 9 a partir de las respuestas de los problemas 7 y 10?

12. Resolver el problema 10 aplicando el segundo teorema de traslación (sección 6.3) al problema 7.

13. Aplicar el teorema 1 a la función $f(t) = 1$, que es periódica con cualquier periodo p.

Rectificadores de media onda y de onda completa

14. Encontrar la transformada de Laplace de la rectificación de media onda de $-\operatorname{sen} \omega t$ (figura 113).

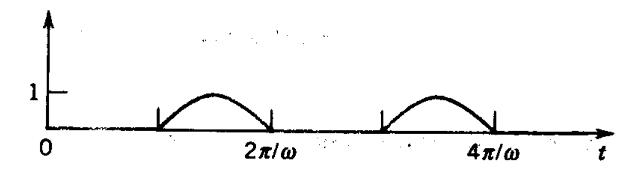


Figura 113. Problema 14.

15. Encontrar la transformada de Laplace de la rectificación de onda completa de $\operatorname{sen} \omega t$ (figura 114).

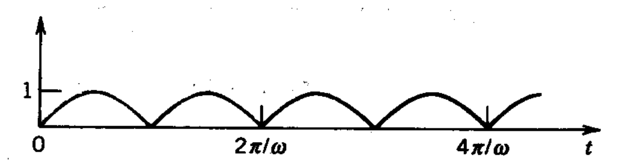


Figura 114. Problema 15.

16. Encontrar la transformada de Laplace de la rectificación de onda completa $|\cos \omega t|$ de $\cos \omega t$.
17. Resolver el problema 14 aplicando el teorema 2, sección 6.3, al resultado del ejemplo 3.
18. Comprobar la respuesta del problema 15 usando los resultados del ejemplo 3 y el problema 14.

Modelos de circuitos eléctricos

19. Usando transformadas de Laplace, demostrar que la corriente $i(t)$ en el circuito RLC de la figura 115 (fuerza electromotriz V_0 constante, corriente y carga iniciales cero) es

$$i(t) = \begin{cases} (K/\omega^*)e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega^* t & \text{si } \omega^{*2} > 0 \\ Kte^{-\alpha t} & \text{si } \omega^{*2} = 0 \\ (K/\beta)e^{-\alpha t} \operatorname{senh} \beta t & \text{si } \omega^{*2} = -\beta^2 < 0; \end{cases}$$

aquí $K = V_0/L$, $\alpha = R/2L$, $\omega^{*2} = (1/LC) - \alpha^2$.

20. Encontrar la corriente en el circuito del problema 19, suponiendo que la fuerza electromotriz aplicada en $t = 0$ es $V_0 \operatorname{sen} pt$ y que la corriente y la carga en $t = 0$ son cero.
21. Encontrar la corriente en el circuito RLC de la figura 115 si una batería de fuerza electromotriz V_0 se conecta al circuito en $t = 0$ y se pone en corto circuito en $t = a$. Suponer que la corriente y la carga iniciales son cero y que ω^{*2}, según se definió en el problema 19, es positiva.

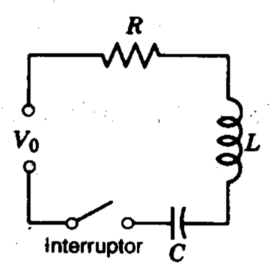


Figura 115. Problema 19.

22. Encontrar la corriente de estado estacionario en el circuito RL de la figura 116.

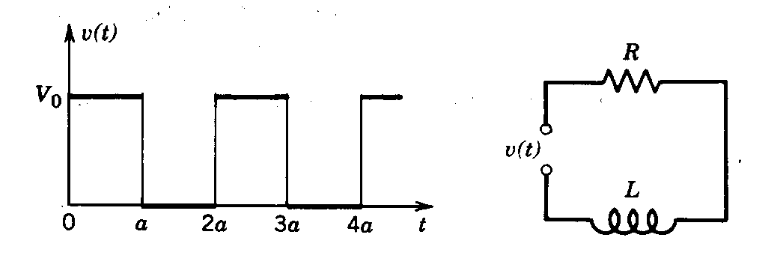


Figura 116. Problema 22.

23. Resolver el problema 22 sin usar transformadas de Laplace.

24. Encontrar la corriente $i(t)$ en el circuito de la figura 117, suponiendo que $i(0) = 0$.

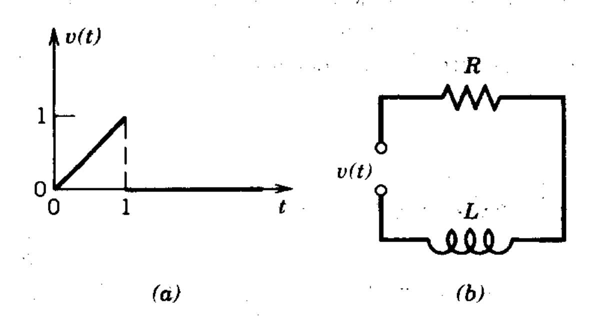


Figura 117. Problema 24.

25. Encontrar la corriente de estado estacionario en el circuito de la figura 117*b*, si $v(t) = t$ cuando $0 < t < 1$ y $v(t + 1) = v(t)$ como se ilustra en la figura 118.

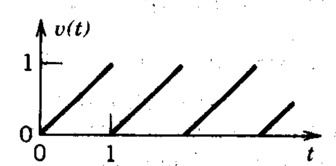


Figura 118. Problema 25.

26. Encontrar la respuesta a la onda rampa del circuito *RC* de la figura 119, suponiendo que el circuito está inactivo en $t = 0$.

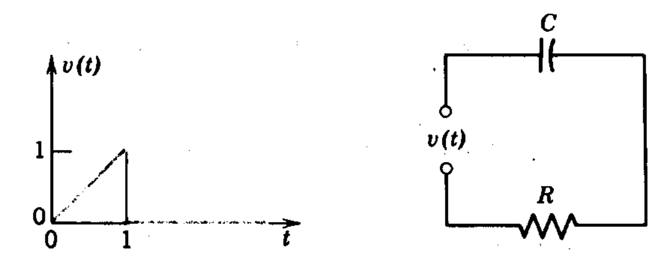


Figura 119. Problema 26.

27. Resolver el problema 26 sin usar transformadas de Laplace. Explicar la razón del salto de $i(t)$ en $t = 1$.
28. Resolver el problema 26 por medio de transformadas de Laplace, empezando con la ecuación de la forma $Ri' + (1/C)i = v'$.
29. Encontrar la corriente $i(t)$ en el circuito *RC* de la figura 119 cuando $v(t) = \text{sen}\ \omega t$ $(0 < t < \pi/\omega)$, $v(t) = 0$ $(t > \pi/\omega)$ e $i(0) = 0$.

30. Por el circuito de la figura 120 fluye corriente estacionaria con el interruptor cerrado. En $t = 0$ el interruptor se abre. Encontrar la corriente $i(t)$.

31. Un capacitor ($C = 1$ faradio) se carga con el potencial $V_0 = 100$ volts y se descarga empezando en $t = 0$ al cerrarse el interruptor de la figura 121. Encontrar la corriente en el circuito y la carga en el capacitor.

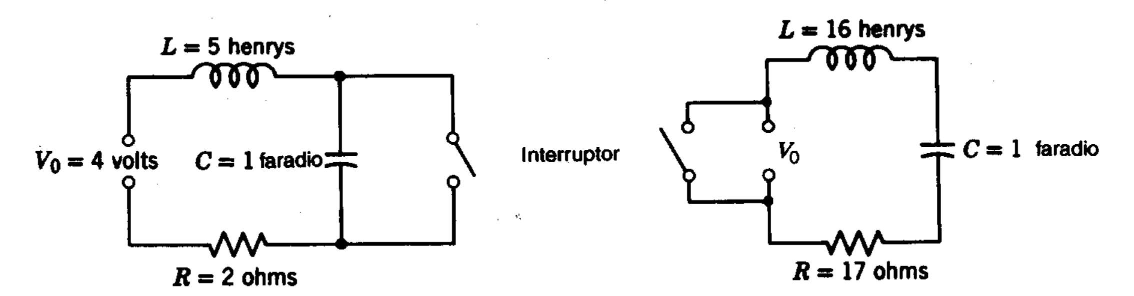


Figura 120. Problema 30. **Figura 121.** Problema 31.

Modelos de sistemas mecánicos

32. **(Control automático de la presión)** En la figura 122 se muestra un sistema de control automático de la presión $y(t)$ es el desplazamiento, donde $y = 0$ corresponde a la posición de equilibrio debida a una presión constante dada. Se hacen los siguientes supuestos. El amortiguamiento del sistema es proporcional a la velocidad y'. Para $t < 0$, el sistema se encuentra en reposo. En $t = 0$ la presión se aumenta de improviso en la forma de una función escalón unitario. Demostrar que la ecuación diferencial correspondiente es

$$my'' + cy' + ky = Pu(t)$$

(m = masa efectiva de las partes móviles, c = constante de amortiguamiento, k = módulo del resorte, P = fuerza debida al aumento de la presión en $t = 0$). Usando transformadas de Laplace, demostrar que si $c < 4mk$, entonces (figura 123)

$$y(t) = \frac{P}{k}[1 - e^{-\alpha t}\sqrt{1 + (\alpha/\omega^*)^2}\cos(\omega^* t + \theta)]$$

donde $\alpha = c/2m$, $\omega^* = \sqrt{(k/m) - \alpha^2}$ (> 0), $\tan\theta = -\alpha/\omega^*$.

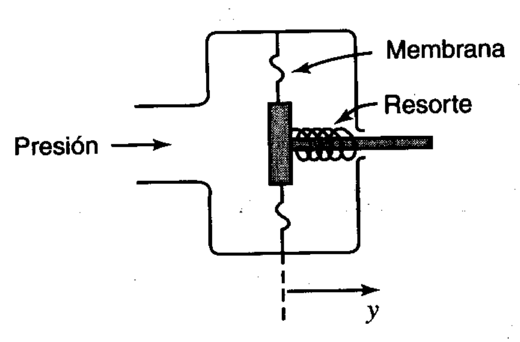


Figura 122. Problema 32.

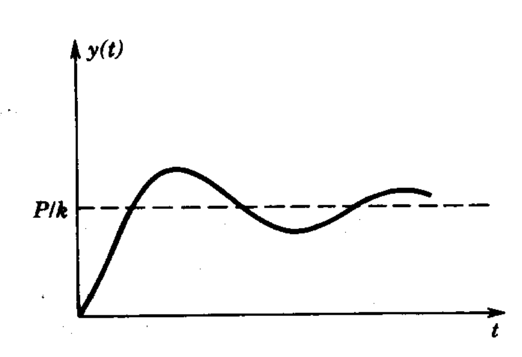


Figura 123. Desplazamiento $y(t)$ en el problema 32.

33. Resolver el problema 32 cuando $c^2 > 4mk$ y cuando $c^2 = 4mk$.

34. **(Volantes)** Dos volantes (con momentos de inercia M_1 y M_2) están conectados por una flecha elástica (con momento de inercia despreciable) y están girando con una velocidad angular constante ω. En $t = 0$ se aplica un par retardador constante P al primer volante. Encontrar la velocidad angular subsecuente $v(t)$ del otro volante.

35. Con las mismas condiciones que en el problema 34, pero con el par retardador aplicado sólo durante el intervalo $0 < t < 1$, encontrar $v(t)$.

Modelo de dos circuitos acoplados por inductancia. Los circuitos de la figura 124 están acoplados por inductancia mutua M y en $t = 0$ las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ son cero.

36. Aplicando la ley de las tensiones de Kirchhoff (sección 1.8), demostrar que las ecuaciones diferenciales de las corrientes son

$$L_1 i_1' + R_1 i_1 = M i_2' + V_0 u(t), \qquad L_2 i_2' + R_2 i_2 = M i_1'$$

donde $u(t)$ es la función escalón unitario. Haciendo $\mathcal{L}(i_1) = I_1(s)$ y $\mathcal{L}(i_2) = I_2(s)$, demostrar que las ecuaciones subsidiarias son

$$L_1 s I_1 + R_1 I_1 = M s I_2 + \frac{V_0}{s}, \qquad L_2 s I_2 + R_2 I_2 = M s I_1.$$

Suponiendo que $A \equiv L_1 L_2 - M^2 > 0$, demostrar que la expresión para I_2, obtenida al resolver estas ecuaciones algebraicas, puede escribirse

$$I_2 = \frac{K}{(s + \alpha)^2 + \omega^{*2}}$$

donde $K = A^{-1} V_0 M$, $\alpha = (2A)^{-1}(R_1 L_2 + R_2 L_1)$, $\omega^{*2} = A^{-1} R_1 R_2 - \alpha^2$. Demostrar que $i_2(t) = \mathcal{L}^{-1}(I_2)$ es de la misma forma que $i(t)$ en el problema 19, donde las constantes K, α y ω^* son ahora las definidas en el presente problema.

37. Demostrar que si $A = 0$ en el problema 36, entonces $i_2(t) = K_0 e^{-at}$, donde $K_0 = BV_0 M$, $a = BR_1 R_2$, $B = (R_1 L_2 + R_2 L_1)^{-1}$.

38. Suponer que en el primer circuito de la figura 124 el interruptor está cerrado y una corriente estacionaria V_0/R_1 está fluyendo en él. En $t = 0$ el interruptor se abre. Encontrar la corriente secundaria $i_2(t)$. *Sugerencia.* Obsérvese que $i_1(0) = V_0/R_1$ y que $i_1 = 0$ cuando $t > 0$.

39. Encontrar $i_1(t)$ en el problema 38, suponiendo que $\omega^{*2} > 0$.

40. Comprobar los detalles en los cálculos del ejemplo 3.

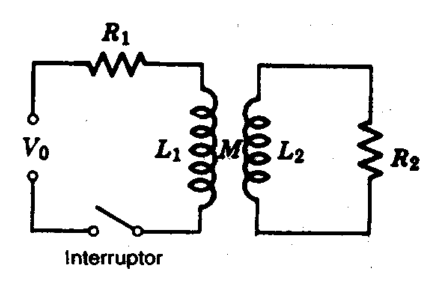


Figura 124 Problemas 36-39.

6.9 TRANSFORMADA DE LAPLACE: FÓRMULAS GENERALES

Fórmula	Nombre, comentarios	Secc.
$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	Definición de transforfama Transformada inversa	6.1
$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$	Linealidad	6.1
$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$ $\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$ $\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$ $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)$	Derivación de una función Integración de una función	6.2
$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$ $\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at} f(t)$	Traslación s (Primer teorema de traslación)	6.3
$\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t - a)u(t - a)$	Traslación t (Segundo teorema de traslación)	6.3
$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$ $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\tilde{s})\, d\tilde{s}$	Derivación de la transformada Integración de la transformada	6.5
$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)\, d\tau$ $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$	Convolución	6.6
$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt$	f periódica con periodo p	6.8

6.10 TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

En las referencias [A5] y [A8] del apéndice 1 se encuentran tablas más extensas.

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	Secc.
1	$1/s$	1	6.1
2	$1/s^2$	t	6.1
3	$1/s^n, \quad (n = 1, 2, \cdots)$	$t^{n-1}/(n-1)!$	6.1
4	$1/\sqrt{s}$	$1/\sqrt{\pi t}$	6.1
5	$1/s^{3/2}$	$2\sqrt{t/\pi}$	6.1
6	$1/s^a \quad (a > 0)$	$t^{a-1}/\Gamma(a)$	6.1
7	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}	6.1
8	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}	6.3
9	$\dfrac{1}{(s-a)^n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$	$\dfrac{1}{(n-1)!} t^{n-1}e^{at}$	6.3
10	$\dfrac{1}{(s-a)^k} \quad (k > 0)$	$\dfrac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1}e^{at}$	6.3
11	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{(a-b)}(e^{at} - e^{bt})$	6.1
12	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{(a-b)}(ae^{at} - be^{bt})$	6.1
13	$\dfrac{1}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega t$	6.1
14	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	6.1
15	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{senh} at$	6.1
16	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$	6.1
17	$\dfrac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega} e^{at}\operatorname{sen}\omega t$	6.3
18	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos \omega t$	6.3
19	$\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)$	6.2
20	$\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^3}(\omega t - \operatorname{sen}\omega t)$	6.2
21	$\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\operatorname{sen}\omega t - \omega t \cos \omega t)$	6.2

Tabla de transformadas de Laplace *(continuación)*

	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	Secc.
22	$\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{t}{2\omega}\operatorname{sen}\omega t$	6.5
23	$\dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega}(\operatorname{sen}\omega t + \omega t\cos\omega t)$	
24	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\quad (a^2 \neq b^2)$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}(\cos at - \cos bt)$	
25	$\dfrac{1}{s^4+4k^4}$	$\dfrac{1}{4k^3}(\operatorname{sen} kt\cosh kt - \cos kt\operatorname{senh} kt)$	6.7
26	$\dfrac{s}{s^4+4k^4}$	$\dfrac{1}{2k^2}\operatorname{sen} kt\operatorname{senh} kt$	
27	$\dfrac{1}{s^4-k^4}$	$\dfrac{1}{2k^3}(\operatorname{senh} kt - \operatorname{sen} kt)$	
28	$\dfrac{s}{s^4-k^4}$	$\dfrac{1}{2k^2}(\cosh kt - \cos kt)$	
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$	
30	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{-(a+b)t/2} I_0\left(\dfrac{a-b}{2}t\right)$	5.7
31	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$	5.5
32	$\dfrac{s}{(s-a)^{3/2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at}(1+2at)$	
33	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^k}\quad (k>0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-1/2} I_{k-1/2}(at)$	5.7
34	e^{-as}/s	$u(t-a)$	6.3
35	e^{-as}	$\delta(t-a)$	6.4
36	$\dfrac{1}{s}e^{-k/s}$	$J_0(2\sqrt{kt})$	5.5
37	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{kt}$	
38	$\dfrac{1}{s^{3/2}}e^{k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}\operatorname{senh} 2\sqrt{kt}$	
39	$e^{-k\sqrt{s}}\quad (k>0)$	$\dfrac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-k^2/4t}$	
40	$\dfrac{1}{s}\ln s$	$-\ln t - \gamma\quad (\gamma \approx 0.5772)$	5.7

(continúa)

Tabla de transformadas de Laplace *(continuación)*

	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	Secc.
41	$\ln \frac{s-a}{s-b}$	$\frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at})$	6.5
42	$\ln \frac{s^2+\omega^2}{s^2}$	$\frac{2}{t}(1 - \cos \omega t)$	6.5
43	$\ln \frac{s^2-a^2}{s^2}$	$\frac{2}{t}(1 - \cosh at)$	6.5
44	$\arctan \frac{\omega}{s}$	$\frac{1}{t} \operatorname{sen} \omega t$	
4.	$\frac{1}{s} \operatorname{arc\,cot} s$	$\operatorname{Si}(t)$	App. 3

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 6

1. ¿Qué se entiende al decir que la transformada de Laplace es una operación *lineal*? ¿Por qué este hecho tiene importancia práctica?
2. ¿Todas las funciones continuas tienen transformada de Laplace? (Dar una razón o un contraejemplo.)
3. ¿Una función discontinua puede tener una transformada de Laplace? (Dar una razón que justifique la respuesta.)
4. ¿Por qué es de importancia práctica el que dos funciones continuas que son diferentes también tienen transformadas de Laplace diferentes?
5. ¿Cuál es el objetivo del método de la transformada de Laplace? ¿Cuáles son sus ventajas en comparación con el método clásico?
6. ¿En qué tipo de problemas se preferiría la transformada de Laplace sobre el método clásico?
7. ¿Qué se entiende por ecuación subsidiaria?
8. Enunciar de memoria la fórmula de la transformada de Laplace de la n-ésima derivada de una función $f(t)$.
9. ¿Qué sabe el lector acerca de la derivación y la integración de transformadas?
10. Si se conoce $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, ¿cómo se encontraría $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)/s^2\}$?
11. ¿Cuál es la diferencia entre la translación por el primer teorema de traslación y el segundo?
12. Demostrar que $e^{-as}\mathscr{L}\{f(t+a)\} = \mathscr{L}\{f(t)u(t-a)\}$. (Usar uno de los teoremas de traslación.)
13. ¿Es válida la igualdad $\mathscr{L}\{f(t)g(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\}$? ¿O qué ocurre con ella?
14. ¿Es válida la igualdad $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$? (Dar una razón que justifique la respuesta.)
15. Obtener la transformada de Laplace de t^n a partir del teorema 2 de la sección 6.2.

Encontrar la transformada de Laplace de la función dada.

16. $e^{-2t} \cos 3t$
17. $e^{-t} \operatorname{sen} 2\pi t$
18. $tu(t - 2)$
19. $\cosh^2 t$
20. $\operatorname{senh}^2 2t$
21. $\operatorname{sen} t + t \cos t$
22. $t * e^{-2t}$
23. $\cos^2 t$
24. $t^3 u(t - 1)$
25. $t^{-1} \operatorname{sen} t$

Encontrar la transformada inversa de Laplace de la función dada.

26. $\dfrac{5s + 3}{s^2 + 4}$
27. $\dfrac{s - 2}{s^2 + 2s + 10}$
28. $\dfrac{1 - 2s^3}{s^5}$
29. $\dfrac{1}{s^2 + 3s}$
30. $\dfrac{s^2 + 2}{s^3 + 4s}$
31. $\dfrac{8}{s^4 - 2s^3}$
32. $\dfrac{\omega \cos \theta + s \operatorname{sen} \theta}{s^2 + \omega^2}$
33. $\dfrac{s^2 - 6s + 4}{s^3 - 3s^2 + 2s}$
34. $\dfrac{3s^2 - 2s - 1}{(s - 3)(s^2 + 1)}$
35. $\dfrac{s^4 - 7s^3 + 13s^2 + 4s - 12}{s^2(s - 3)(s^2 - 3s + 2)}$

Usando transformadas de Laplace, encontrar $y(t)$ que satisfaga la ecuación y las condiciones dadas.

36. $y'' + y = \delta(t - 2), \quad y(0) = 2.5, \quad y'(0) = 0$
37. $y'' + 9y = 1.8u(t - 3), \quad y(0) = y'(0) = 0$
38. $y'' + y = 0$ si $0 < t < 1$ y $t - 1$ si $t > 1$; $\quad y(0) = y'(0) = 0$
39. $y'' + y = 0$ si $0 < t < 2\pi$ y $e^{-(t-2\pi)}$ si $t > 2\pi$; $\quad y(0) = y'(0) = 0$
40. $y'' + 3y' + 2y = u(t - 2), \quad y(0) = y'(0) = 0$
41. $y'' - 2y' + 2y = 2e^t \cos t, \quad y(0) = 1.5, \quad y'(0) = 1.5$
42. $y'' + 2y' + 5y = t - 0.04\,\delta(t - \pi), \quad y(0) = -0.08, \quad y'(0) = 0.2$
43. $y'' - 4y' + 4y = (3t^2 + 2)e^t, \quad y(0) = 20, \quad y'(0) = 34$
44. $y'' + 4y' + 3y = t - 1$ si $1 < t < 2$ y 0 en caso contrario; $y(0) = 2$. $y'(0) = -2$
45. $y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
46. $y(t) = 1 - \operatorname{senh} t + \displaystyle\int_0^t (1 + \tau) y(t - \tau)\, d\tau$
47. $y(t) = \cosh 3t - 3e^{3t} \displaystyle\int_0^t y(\tau) e^{-3\tau}\, d\tau$
48. $y(t) = t^2 + \frac{1}{60}t^6 - \displaystyle\int_0^t y(\tau)(t - \tau)^3\, d\tau$

Modelos de sistemas masa-resorte, circuitos, redes

Resolver los siguientes problemas usando transformadas de Laplace.

49. Demostrar que el modelo e la figura 125 (sin fricción , sin amortiguamiento) es

$$m_1 y_1'' = -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1)$$

$$m_2 y_2'' = -k_2(y_2 - y_1) - k_3 y_2.$$

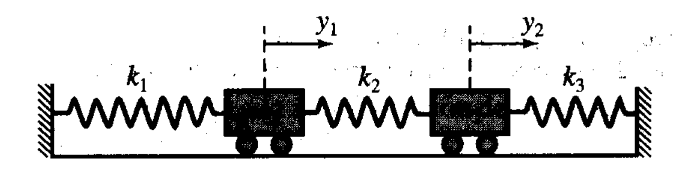


Figura 125. Sistema de los problemas 49-52.

50. En el problema 49, sean $m_1 = m_2 = 10$ kg, $k_1 = k_3 = 20$ kg/s², $k_2 = 40$ kg/s². Encontrar la solución que satisface las condiciones iniciales $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$ m/s, $y_2'(0) = -1$ m/s.

51. Resolver el problema 50 suponiendo que $y_1(0) = y_2(0) = 1$ m, $y_1'(0) = y_2'(0) = 0$, con los solución que satisface las condiciones iniciales $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$ m/s, $y_2'(0) = -1$m/s.

52. Resolver el problema 50 por uno de los métodos clásicos.

53. Encontrar la corriente $i(t)$ en el circuito RC de la figura 126, donde $R = 10$ ohms, $C = 0.1$ faradios, $e(t) = 10t$ volts si $0 < t < 4$, $e(t) = 40$ volts si $t > 4$ y la carga inicial en el capacitor es 0.

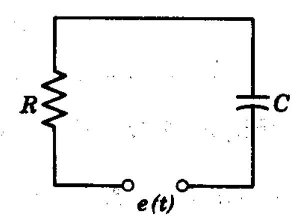


Figura 126. Circuito *RC*.

54. Encontrar la carga $q(t)$ y la corriente $i(t)$ en el circuito LC de la figura 127, suponiendo que $L = 1$ henry, $C = 1$ faradio, $e(t) = 1 - e^{t}$ si $0 < t < \pi$, $e(t) = 0$ si $t > \pi$ y que la corriente y la carga iniciales son cero.

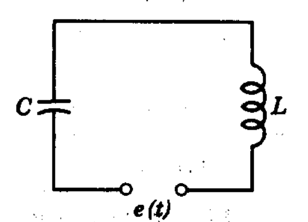


Figura 127. Circuito *LC*.

55. Encontrar la corriente $i(t)$ en el circuito RLC de la figura 128, donde $R = 160$ ohms, $L = 20$ henrys, $C = 0.002$ faradios, $e(t) = 37$ sen $10t$ volts, suponiendo corriente y carga iniciales cero.

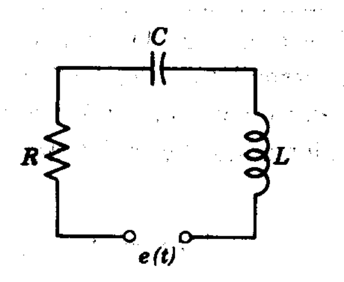


Figura 128. Circuito *RLC*.

56. Demostrar que, por la ley de las tensiones de Kirchhoff (sección 1.8), las corrientes en la red de la figura 129 se obtienen a partir del sistema

$$Li_1' + R(i_1 - i_2) = e(t)$$

$$R(i_2' - i_1') + \frac{1}{C} i_2 = 0$$

57. Resolver el sistema del problema 56, donde $R = 10$ ohms, $L = 20$ henrys, $C = 0.05$ faradios, $e = 20$ volts, $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 2$ amperes.

58. Demostrar que en el problema 57 se tiene $i_1(t) \to 2$, $i_2(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. ¿Puede concluirse lo anterior directamente de la red?

59. Resolver el sistema del problema 56, donde $R = 0.8$ ohms, $L = 1$ henry, $C = 0.25$ faradios, $e(t) = \frac{4}{5}t + \frac{21}{25}$ volts, $i(0) = 1$ ampere, $i_2(0) = -3.8$ amperes.

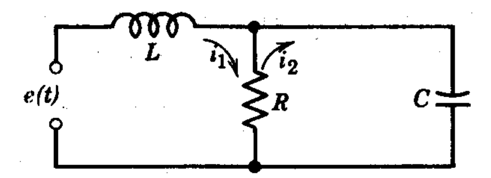


Figura 129. Red en los problemas 56-59.

60. Establecer el modelo de la red de la figura 130 y encontrar la solución, suponiendo que todos las cargas y corrientes son 0 cuando el interruptor está cerrado en $t = 0$. Encontrar los límites de $i_1(t)$ e $i_2(t)$ cuando $t \to \infty$, (i) a partir de la solución, (ii) directamente de la red dada.

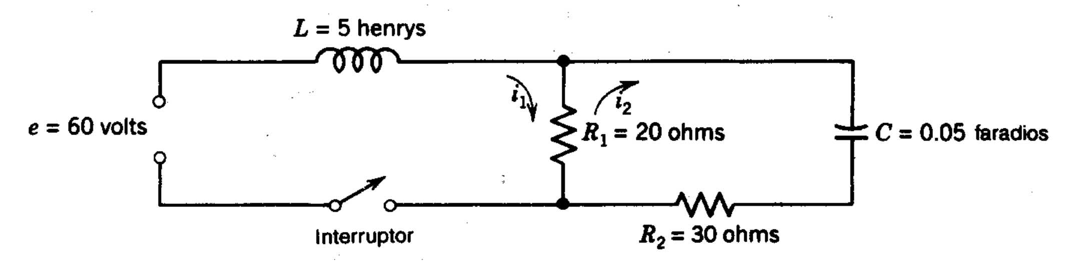


Figura 130. Red en el problema 60.

Resumen del capítulo 6

Transformadas de Laplace

La finalidad principal de las transformadas de Laplace es la solución de ecuaciones diferenciales y sistemas de estas ecuaciones, así como de los problemas con valor inicial correspondientes. La **transformada de Laplace** $F(s) = \mathcal{L}(f)$ de una función $f(t)$ está definida por (sección 6.1)

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \qquad (1)$$

Esta definición se encuentra motivada por la propiedad de que la derivación de f con respecto a t corresponde a la multiplicación de la transformada F por s; en términos precisos (sección 6.2):

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mathcal{L}(f') &= s\mathcal{L}(f) - f(0), \\ \mathcal{L}(f'') &= s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0), \end{aligned}$$

etc. Por tanto, al tomar la transformada de una ecuación diferencial dada

$$(3) \qquad y'' + ay' + by = r(t)$$

y escribiendo $\mathcal{L}(y) = Y(s)$ se obtiene la **ecuación subsidiaria**

$$(4) \qquad (s^2 + as + b)Y = \mathcal{L}(r) + sf(0) + f'(0) + af(0).$$

Aquí, para obtener la transformada $\mathcal{L}(r)$ puede obtenerse ayuda de la pequeña tabla de la sección 6.1 o de la tabla grande de la sección 6.10. En el segundo paso se resuelve *algebraicamente* la ecuación subsidiaria para $Y(s)$. En el tercer paso se determina la transformada inversa $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y)$, es decir, la solución del problema. Por lo general este es el paso más difícil y en él puede usarse de nueva cuenta una de las dos tablas. $Y(s)$ será con frecuencia una función racional, por lo que la inversa $\mathcal{L}^{-1}(Y)$ puede obtenerse por reducción a fracciones parciales (sección 6.7) si no se observa una manera más simple.

El método de Laplace evita la determinación de una solución general de la ecuación homogénea y tampoco es necesario determinar los valores de las constantes arbitrarias en una solución general a partir de las condiciones iniciales; en vez de ello, éstas pueden insertarse directamente en (4). Dos hecho adicionales justifican la importancia práctica de la transformada de Laplace. Primero, posee algunas propiedades fundamentales de las que se derivan técnicas que simplifican la determinación de transformadas e inversas. En la sección 6.9 se enlistan algunas de las más importantes, acompañadas de referencias a las secciones correspondientes. En las secciones 6.3 y 6.4 puede encontrarse más sobre la discusión del uso de funciones escalón unitario así como de la función delta de Dirac y en la sección 6.6 se explica la convolución. Segundo, como consecuencia de dichas propiedades, el presente método se presta particularmente para manejar el segundo miembro $r(t)$ dado por diferentes expresiones en diferentes intervalos de tiempo, por ejemplo, cuando $r(t)$ es una onda cuadrada, un impulso o una expresión de una forma como $r(t) = \cos t$ si $0 \leqq t \leqq 4\pi$ y 0 en caso contrario.

La aplicación de las transformadas de Laplace en ecuaciones diferenciales *parciales* se aborda en la sección 11.13.

Parte

B

ÁLGEBRA LINEAL, CÁLCULO VECTORIAL

Dos factores principales han incidido en el desarrollo de las matemáticas para la ingeniería en las dos últimas décadas, a saber, la aplicación generalizada de computadoras a los problemas de ingeniería y el uso creciente del álgebra lineal y del análisis lineal en el manejo, por ejemplo, de problemas a gran escala en análisis de sistemas.

El primer capítulo de esta parte se dedica al **álgebra lineal**, siendo su contenido la teoría y aplicación de vectores y matrices en relación con la solución de sistemas lineales de ecuaciones, problemas de eigenvalores, etcétera.

Los **métodos numéricos** del álgebra lineal se presentan en el capítulo 19, que es independiente de los demás capítulos de la parte E sobre métodos numéricos. En consecuencia, el capítulo 19 puede estudiarse inmediatamente después del capítulo 7, si así se desea.

Los dos últimos capítulos de esta parte se dedican al **análisis lineal**, denominado comúnmente **cálculo vectorial**. El capítulo 8 trata el cálculo *diferencial* vectorial (campos vectoriales, curvas, velocidad, derivada direccional, gradiente, divergencia, rotacional) y el capítulo 9 se ocupa del cálculo *integral* vectorial (integrales de línea, de superficie y triples y su transformación por medio de los teoremas sobre de integrales de Green, Gauss y Stokes).

Capítulo

7

Álgebra lineal: matrices, vectores, determinantes

El **álgebra lineal** incluye la teoría y la aplicación de sistemas lineales de ecuaciones (llamados simplemente sistemas lineales), las transformaciones lineales y problemas de eigenvalores que surgen, por ejemplo, en redes eléctricas, estructuras en mecánica, ajuste de curvas y otros problemas de optimización, procesos estadísticos, sistemas de ecuaciones diferenciales, etcétera.

El álgebra lineal hace un uso sistemático de **vectores** y **matrices** (sección 7.1) y, en menor grado, de **determinantes** (sección 7.8); y el estudio de las propiedades de las matrices es en sí mismo parte fundamental del álgebra lineal.

Una matriz es un arreglo rectangular de números. Las matrices se presentan en varios problemas, por ejemplo, como arreglos de los coeficientes de ecuaciones (sección 7.4). Las matrices (y los vectores) son útiles porque permiten considerar un arreglo de muchos números como un solo objeto, denotarlo por un solo símbolo y efectuar cálculos con estos símbolos en una manera muy compacta. El "atajo matemático" que se obtiene de este modo es muy elegante y poderoso y se presta para diversos problemas prácticos. Ingresó en las matemáticas aplicadas hace más de 60 años y es de importancia creciente en varios campos.

Este capítulo tiene tres grandes partes:

Cálculos con matrices, secciones 7.1-7.3.
Sistemas de ecuaciones lineales, secciones 7.4-7.9
Problemas de eigenvalores, secciones 7.10-7.14

y una sección opcional (la 7.15, de carácter más abstracto) sobre espacios con producto interior y vectoriales y transformaciones lineales.

Así, se empieza introduciendo las matrices y los vectores y los conceptos relacionados (sección 7.1) y se definen las operaciones algebraicas con matrices (secciones 7.2, 7.3). En seguida se consideran los sistemas lineales —solución por eliminación de Gauss en la sección 7.4, existencia de las soluciones en la sección 7.6, determinantes y la regla de Cramer en las secciones 7.8 y 7.9. Se

estudian después problemas de eigenvalores en general (secciones 7.10, 7.11) y para importantes matrices reales especiales (sección 7.12) y matrices complejas (sección 7.13). Por último, se discute la diagonalización de matrices y la reducción de formas cuadráticas a ejes principales (sección 7.14). Otros conceptos importantes en este capítulo son el rango de una matriz (secciones 7.5, 7.9) y la inversa de una matriz (sección 7.7). Las aplicaciones de las matrices a problemas prácticos se presentan a lo largo del capítulo.

Los **MÉTODOS NUMÉRICOS** del capítulo 19 pueden estudiarse una vez terminado el material correspondiente del presente capítulo.

Prerrequisitos para este capítulo: Ninguno.

Secciones que pueden omitirse en un curso más corto: 7.12-7-15.

Bibliografía: Apéndice 1, parte B.

Respuestas a los problemas: apéndice 2.

7.1 CONCEPTOS BÁSICOS

En las tres primeras secciones de este capítulo se introducen los conceptos y las reglas básicas del álgebra matricial y vectorial. La importante aplicación a los sistemas de ecuaciones lineales empieza en la sección 7.4.

Una **matriz** es un arreglo rectangular de números (o funciones) escritos entre corchetes. Estos números (o funciones) se llaman *elementos* o *entradas* de la matriz. Por ejemplo,

$$(1)\quad \begin{bmatrix} 2 & 0.4 & 8 \\ 5 & -32 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [a_1 \quad a_2 \quad a_3], \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e^x & 3x \\ e^{2x} & x^2 \end{bmatrix}$$

son matrices. La primera tiene dos "*renglones*" (líneas horizontales) y tres "*columnas*" (líneas verticales). La segunda se compone de una sola columna y se le llama *vector columna*. La tercera se compone de un solo renglón y se le llama *vector renglón*. Las dos últimas son *matrices cuadradas*, es decir, cada una de ellas tiene tantos renglones como columnas (dos en este caso).

Las matrices resultan prácticas en muchas aplicaciones. Por ejemplo, en un sistema de ecuaciones tal como

$$\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 0 \\ 3x + \qquad 4z &= 0 \end{aligned}$$

los coeficientes de las incógnitas x, y, z son los elementos de la *matriz de coeficientes*, denotada por $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

en la cual estos coeficientes aparecen siguiendo el patrón de las ecuaciones. Las cantidades de tres productos I, II, III vendidos en una tienda el lunes (L), martes (Ma), $\cdots$ correspondientes a cada semana pueden disponerse en una matriz

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \text{L} & \text{Ma} & \text{Mi} & \text{J} & \text{V} & \text{S} \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 40 & 33 & 81 & 0 & 21 & 47 \\ 0 & 12 & 78 & 50 & 50 & 96 \\ 10 & 0 & 0 & 27 & 43 & 78 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \end{array}$$

y si la compañía tiene diez tiendas, pueden hacerse diez matrices como ésta, una para cada tienda; así, al sumar los elementos correspondientes de estas matrices es posible obtener una matriz que indique las ventas diarias totales de cada producto. ¿El lector puede pensar en otros datos en los que se apliquen las matrices? Por ejemplo, ¿en problemas de transporte o almacenamiento? ¿O en el registro de llamadas telefónicas o en el listado de distancias en una red carretera?

Notación y conceptos generales

La discusión sugiere lo siguiente. Las matrices se denotan por mayúsculas en negritas **A**, **B**, **C**, $\cdots$ o escribiendo el elemento general entre corchetes; así, $\mathbf{A} = [a_{jk}]$, etc. Por una **matriz de $m \times n$** (léase "matriz de m por n") se entiende una matriz con m renglones, llamados también **vectores renglón**, y n columnas, llamadas también **vectores columna** de la matriz. De este modo, una matriz **A** de $m \times n$ es de la forma

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, las matrices de (1) son de 2×3, 2×1, 1×3, 2×2 y 2×2.

*En la **notación del subíndice doble** para los elementos, el primer subíndice denota siempre el **renglón** y el segundo la **columna** en la que se encuentra el elemento dado.* Así, a_{23} es el elemento que se encuentra en el segundo renglón y la tercera columna.

Si $m = n$, se dice que **A** es una **matriz cuadrada de $n \times n$**. Entonces la diagonal que contiene los elementos $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ se llama **la diagonal principal** de **A**. Por tanto, las dos últimas matrices de (1) son cuadradas. Las matrices cuadradas son de particular importancia, como se verá.

Una **submatriz** de una matriz **A** de $m \times n$ es la que se obtiene al omitir algunos renglones o columnas (o ambos) de **A**. Por conveniencia, ésta incluye a **A** misma (como la matriz obtenida al no omitir ninguno de los renglones o columnas de **A**).

EJEMPLO 1 Submatrices de una matriz

La matriz de 2×3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

contiene tres submatrices de 2×2, a saber,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},$$

dos submatrices de 1×3 (los dos vectores renglón), tres submatrices de 2×1 (los vectores columna), seis submatrices de 1×2, a saber,

$$[a_{11} \quad a_{12}], \quad [a_{11} \quad a_{13}], \quad [a_{12} \quad a_{13}],$$

$$[a_{21} \quad a_{22}], \quad [a_{21} \quad a_{23}], \quad [a_{22} \quad a_{23}],$$

y seis submatrices de 1×1, $[a_{11}]$, $[a_{12}]$, $\cdots$, $[a_{23}]$. ∎

Vectores

Un **vector** es una **matriz** que tiene un solo renglón —se le llama entonces **vector renglón**— o una sola columna —se le llama entonces **vector columna**. En ambos casos, a sus elementos se le llama **componentes** y el vector se denota por una **minúscula** en negrita tal como **a**, **b**, $\cdots$, o por su componente general entre corchetes, $\mathbf{a} = [a_j]$, etc. Por tanto,

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \cdots \quad a_n]$$

es un vector renglón y

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

es un vector columna. Dependerá del fin que se persiga cuál de los dos es más práctico, pero con frecuencia querrá hacerse el cambio de un tipo de vector al otro. Esto puede hacerse por "**transposición**", la cual se indica por ^{T}; de este modo, si

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad \mathbf{b}^{\mathsf{T}} = [4 \quad 0 \quad -7];$$

Recíprocamente, si

$$\mathbf{a} = [5 \quad 3 \quad \tfrac{1}{2}], \quad \text{entonces} \quad \mathbf{a}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ \tfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Transposición

Resulta práctico definir la **transposición** de una matriz. La **transpuesta** $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ de una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $m \times n$ como se da en (2) es la matriz de $n \times m$ que tiene el primer

renglón de **A** como su primera *columna*, el segundo *renglón* de **A** como su segunda *columna* y así sucesivamente. Por tanto, la transpuesta de **A** en (2) es

$$(3) \qquad \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 2 Transposición de una matriz

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$ ∎

Las **matrices simétricas** y las **antisimétricas** son matrices cuadradas cuya transpuesta es igual a la matriz o a menos la matriz, respectivamente.

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A} \text{ (matriz simétrica)}, \qquad \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A} \text{ (matriz antisimétrica)}$$

Estas matrices son muy importantes y se usarán con frecuencia en este capítulo.

Las reglas para el cálculo de matrices se tratan en la siguiente sección, la cual concluye con problemas.

7.2 ADICIÓN DE MATRICES, MULTIPLICACIÓN POR ESCALARES

Lo que en realidad hace útiles a las matrices y los vectores es el hecho de que sea posible realizar cálculos con ellos casi con la misma facilidad que con números. En realidad, aplicaciones prácticas dieron lugar a las reglas de la adición y multiplicación por escalares (números), las cuales se introducen a continuación. (La multiplicación de matrices por matrices se discute en la siguiente sección.)

Abreviando, se dice que dos matrices son del **mismo tamaño** si ambas son de $m \times n$; por ejemplo, si ambas son de 3×4. Se empieza definiendo la igualdad.

Definición. Igualdad de matrices

Dos matrices $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ y $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ son iguales, denotado $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, si y sólo si son del mismo tamaño y los elementos correspondientes son iguales, es decir, $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1 Igualdad de matrices

La definición implica que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{si y sólo si} \quad \begin{array}{l} a_{11} = 4, \quad a_{12} = 0, \\ a_{21} = 3, \quad a_{22} = -1. \end{array}$$

A no puede ser igual a, por ejemplo, una matriz de 2×3. Un vector columna no puede ser igual a un vector renglón, por la propia definición de igualdad. ∎

Se definirán ahora dos operaciones algebraicas, llamadas *adición de matrices* y *multiplicación por escalares*, las cuales resultan ser prácticas y muy útiles en las aplicaciones, como se verá más adelante en este capítulo.

Definición. Adición de matrices

La adición se define únicamente para matrices $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ y $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ del mismo tamaño y su **suma**, denotada $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, se obtiene sumando los elementos correspondientes. Las matrices de tamaños diferentes no pueden sumarse.

Un caso especial, la **suma de a + b** de dos vectores renglón o dos vectores columna, que deben tener el mismo número de componentes, se obtiene sumando las componentes correspondientes.

EJEMPLO 2 Adición de matrices y vectores

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

En este caso, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^T$ no pueden sumarse. La matriz $\mathbf{B}$ del ejemplo 1 y $\mathbf{A}$ del presente no pueden sumarse. Si $\mathbf{a} = [5 \;\; 7 \;\; 2]$ y $\mathbf{b} = [-6 \;\; 2 \;\; 0]$, entonces $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [-1 \;\; 9 \;\; 2]$. ∎

Definición. Multiplicación por escalares (multiplicación por un número)

El **producto** de cualquier matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $m \times n$ y cualquier escalar c (número c), denotado $c\mathbf{A}$, es la matriz $c\mathbf{A} = [ca_{jk}]$ de $m \times n$ obtenida al multiplicar cada elemento de $\mathbf{A}$ por c.

Aquí $(-1)\mathbf{A}$ se denota simplemente por $-\mathbf{A}$ y se llama la **negativa** de $\mathbf{A}$. De manera similar $(-k)\mathbf{A}$ se denota $-k\mathbf{A}$. Asimismo, $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ se denota $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ y se llama la **diferencia** de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ (¡que debe ser del mismo tamaño!).

EJEMPLO 3 Multiplicación por un escalar

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.7 & -1.8 \\ 0 & 0.9 \\ 9.0 & -4.5 \end{bmatrix},$$

entonces

$$-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2.7 & 1.8 \\ 0 & -0.9 \\ -9.0 & 4.5 \end{bmatrix}, \qquad \frac{10}{9}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}, \qquad 0\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ ∎

Una **matriz cero** de $m \times n$ es una matriz de $m \times n$ con todos los elementos iguales a cero. Se denota por $\mathbf{0}$. La última matriz del ejemplo 3 es la matriz cero de 3×2.

Por la definición se observa que la adición de matrices posee propiedades muy similares a las de la adición de números reales; a saber, para matrices del mismo tamaño se tiene

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} &&= \mathbf{B} + \mathbf{A} \\ &\text{(b)} \quad (\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \mathbf{W} &&= \mathbf{U} + (\mathbf{V} + \mathbf{W}) \quad \text{(denotado } \mathbf{U} + \mathbf{V} + \mathbf{W}\text{)} \\ &\text{(c)} \quad \mathbf{A} + \mathbf{0} &&= \mathbf{A} \\ &\text{(d)} \quad \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) &&= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Además, por las definiciones de adición de matrices y multiplicación por un escalar se obtiene asimismo

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &&= c\mathbf{A} + c\mathbf{B} \\ &\text{(b)} \quad (c + k)\mathbf{A} &&= c\mathbf{A} + k\mathbf{A} \\ &\text{(c)} \quad c(k\mathbf{A}) &&= (ck)\mathbf{A} \qquad \text{(denotado } ck\mathbf{A}\text{)} \\ &\text{(d)} \quad 1\mathbf{A} &&= \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Para la transpuesta (sección 7.1) de una suma de dos matrices de $m \times n$ se tiene

$$(3)\qquad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \mathbf{B}^{\mathsf{T}},$$

como el lector puede demostrar; asimismo,

$$(4)\qquad (c\mathbf{A})^{\mathsf{T}} = c\mathbf{A}^{\mathsf{T}}.$$

Una operación algebraica más, la multiplicación de matrices por matrices, se discute en la siguiente sección. Entonces será posible abordar las aplicaciones.

Problemas de las secciones 7.1 y 7.2

Sean $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 5 & -2 & 13 \end{bmatrix}$.

Encontrar las siguientes expresiones o dar las razones por las que no están definidas.

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{B} + \mathbf{A}$
2. $4\mathbf{A}$, $-3\mathbf{C}$, $3\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$, $3(\mathbf{A} - \mathbf{B})$
3. $2\mathbf{C} + 2\mathbf{D}$, $2(\mathbf{C} + \mathbf{D})$
4. $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$, $\mathbf{C} - \mathbf{D}$
5. $\mathbf{A} - \mathbf{C}$, $\mathbf{A} + 0\mathbf{C}$, $\mathbf{C} + 0\mathbf{A}$
6. $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \mathbf{B}^{\mathsf{T}}$, $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$
7. $4\mathbf{B} + 8\mathbf{B}^{\mathsf{T}}$, $4(\mathbf{B} + 2\mathbf{B}^{\mathsf{T}})$
8. $(2\mathbf{C})^{\mathsf{T}}$, $2\mathbf{C}^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{C} + \mathbf{C}^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{C}^{\mathsf{T}} - 2\mathbf{D}^{\mathsf{T}}$

Sean $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & 6 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Encontrar las siguientes expresiones o dar las razones por las que no están definidas.

9. $\mathbf{K} + \mathbf{L}$, $\mathbf{K} - \mathbf{L}$
10. $3(\mathbf{a} - 4\mathbf{b})$, $3\mathbf{a} - 12\mathbf{b}$, $\mathbf{K} + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} + \mathbf{a}^{\mathsf{T}}$
11. $\mathbf{K} - \mathbf{K}^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{L} + \mathbf{L}^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{a}^{\mathsf{T}} + \mathbf{b}^{\mathsf{T}}$
12. $3\mathbf{K} + 4\mathbf{L}$, $6\mathbf{K} + 8\mathbf{L}$
13. $\mathbf{K} + \mathbf{K}^{\mathsf{T}} + \mathbf{L} - \mathbf{L}^{\mathsf{T}}$
14. $6\mathbf{a}^{\mathsf{T}} - 9\mathbf{b}^{\mathsf{T}}$, $3(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})^{\mathsf{T}}$, $3(3\mathbf{b}^{\mathsf{T}} - 2\mathbf{a}^{\mathsf{T}})$

Matrices simétricas y antisimétricas

15. Demostrar que **K** es simétrica y que **L** es antisimétrica.

16. Demostrar que para una matriz simétrica $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ se tiene $a_{jk} = a_{kj}$.

17. Demostrar que si $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ es antisimétrica, entonces $a_{jk} = -a_{kj}$, en particular, $a_{jj} = 0$.

18. Escribir **A** (de los problemas 1-8) como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

19. Escribir **B** como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

20. Demostrar que si **A** es cualquier matriz cuadrada, entonces $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ es simétrica, $\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$ es antisimétrica y $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{T}$.

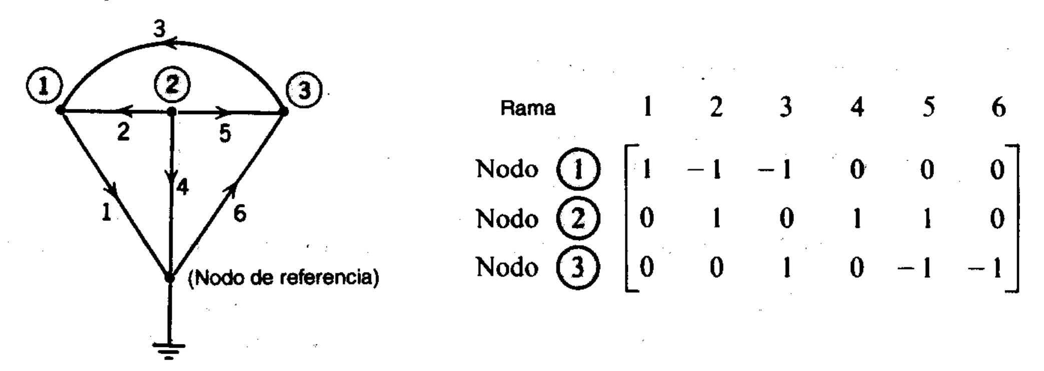
21. Demostrar (3) y (4) de la sección 7.2, así como $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Uso de matrices en el modelado de redes. Las matrices tienen varias aplicaciones en la ingeniería, como se verá. Por ejemplo, pueden usarse para caracterizar conexiones (en redes eléctricas, redes de carreteras que comunican ciudades, procesos de producción, etc.), de la siguiente manera.

22. (Matriz de incidencia nodal) En la figura 131 se muestra una red eléctrica que tiene 6 *ramas* (conexiones) y 4 *nodos* (puntos donde se unen dos o más ramas). Uno de los nodos es el *nodo de referencia* (nodo a tierra, cuyo voltaje es cero). Se numeran los nodos restantes así como las ramas, a las que se les asigna una dirección. Esto se hace de manera arbitraria. La red puede describirse ahora por medio de una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$, donde

$$a_{jk} = \begin{cases} +1 & \text{si la rama } k \text{ sale del nodo } \textcircled{j} \\ -1 & \text{si la rama } k \text{ entra al nodo } \textcircled{j} \\ 0 & \text{si la rama } k \text{ no toca el nodo } \textcircled{j}. \end{cases}$$

A recibe el nombre de *matriz de incidencia nodal* de la red. Demostrar que para la red de la figura 131, **A** tiene la forma dada.



Rama	1	2	3	4	5	6
Nodo ①	1	−1	−1	0	0	0
Nodo ②	0	1	0	1	1	0
Nodo ③	0	0	1	0	−1	−1

Figura 131. Red y matriz de incidencia nodal del problema 22.

23. Encontrar la matriz de incidencia nodal de la red eléctrica de la figura 132A.

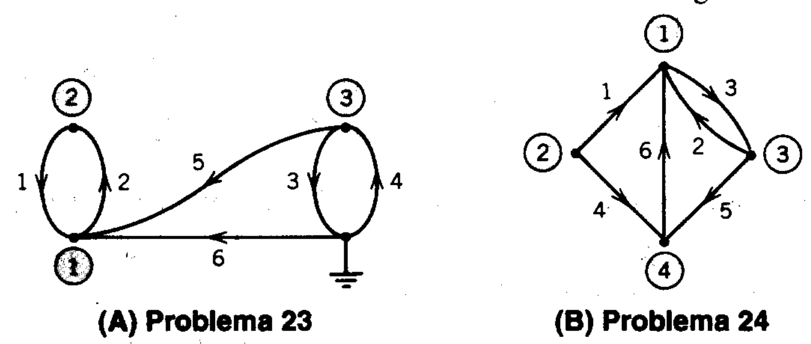


Figura 132. Red eléctrica y red de calles de un sentido.

24. Los métodos de análisis de redes eléctricas también tienen aplicaciones en otros campos. Determinar el análogo de la matriz de incidencia nodal en la red de calles de un sentido (el cual se indica por las flechas) ilustrada en la figura 132B.

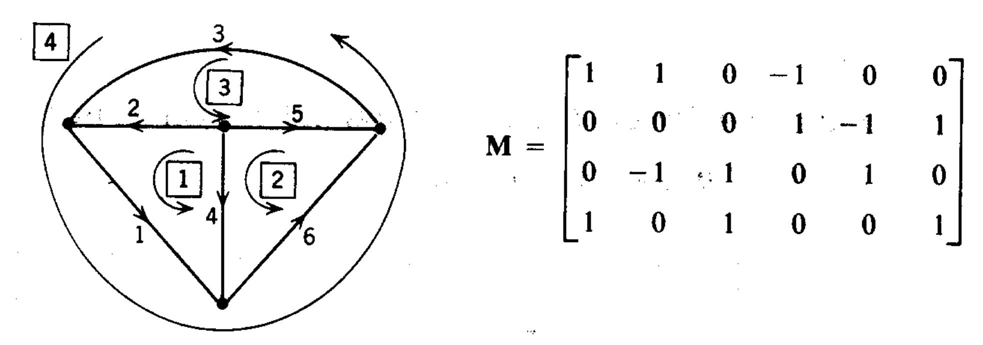
Trazar la red cuya matriz de incidencia nodal es

25. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 26. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 27. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

28. **(Matriz de incidencia de mallas)** Una red también puede caracterizarse por la *matriz de incidencia de mallas* $\mathbf{M} = [m_{jk}]$, donde

$$m_{jk} = \begin{cases} +1 & \text{si la rama } k \text{ está en la malla } \boxed{j} \text{ y tiene la misma orientación} \\ -1 & \text{si la rama } k \text{ está en la malla } \boxed{j} \text{ y tiene la orientación opuesta} \\ 0 & \text{si la rama } k \text{ no está en la malla } \boxed{j} \end{cases}$$

donde una *malla* es un circuito cerrado sin ramas en su interior (o en su exterior). Aquí, las mallas están numeradas y dirigidas (orientadas) de manera arbitraria. Demostrar que para la red de la figura 133, la matriz $\mathbf{M}$ tiene la forma dada.



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 133. Red y matriz **M** del problema 28.

7.3 MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Como última operación algebraica se definirá ahora la multiplicación de matrices por matrices. Al principio esta definición parecerá un tanto artificial, pero más adelante será motivada plenamente mediante el uso de matrices en las transformaciones lineales.

Definición. multiplicación de una matriz por una matriz

El producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ (en este orden) de una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $m \times n$ y una matriz $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ de $r \times p$ está definido si y sólo si $r = n$, es decir,

Número de renglones del segundo factor **B** = Número de columnas del primer factor **A**, y entonces se define como la matriz $\mathbf{C} = [c_{jk}]$ de $m \times p$ con elementos

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{lk} = a_{j1} b_{1k} + a_{j2} b_{2k} + \cdots + a_{jn} b_{nk} \qquad (1)$$

(donde $j = 1, \cdots, m$ y $k = 1, \cdots, p$); es decir, se multiplica cada elemento del j-ésimo *renglón* de **A** por el elemento correspondiente de la k-ésima *columna* de **B** y después se suman estos n productos. Para abreviar, se dice que es una "***multiplicación de renglones por columnas***." En la figura 134 se ilustra lo anterior.

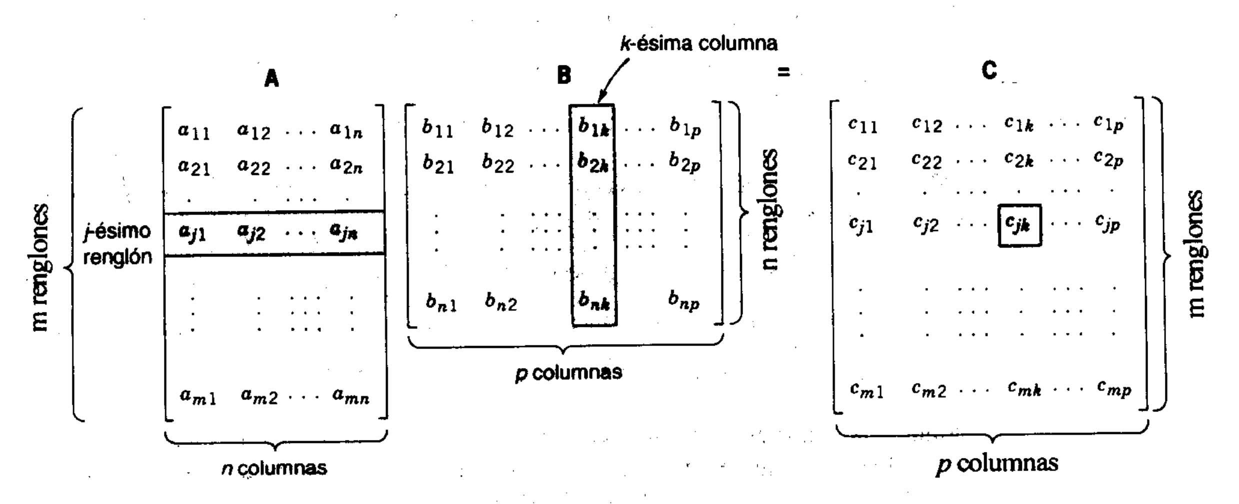


Figura 134. Multiplicación de matrices **AB** = **C**.

Ejemplos. Propiedades de la multiplicación de matrices

EJEMPLO 1 Multiplicación de matrices

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 4 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \\ 7 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 7 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 9 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 9 \cdot 5 + 0 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 38 \\ 16 & 47 \\ 18 & 45 \end{bmatrix}.$$

Aquí **A** es de 3×2 y **B** es de 2×2, por lo que **AB** resulta de 3×2, en tanto que **BA** no está definida. ∎

EJEMPLO 2 Multiplicación de una matriz y un vector

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 + 10 \\ 3 + 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 43 \end{bmatrix} \quad \text{en tanto que} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{no está definido.}$$ ∎

EJEMPLO 3 Productos de vectores renglón y columna

$$[3 \quad 6 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = [19], \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} [3 \quad 6 \quad 1] = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 12 & 2 \\ 12 & 24 & 4 \end{bmatrix}.$$ ∎

EJEMPLO 4 ¡ATENCIÓN! La multiplicación de matrices no es conmutativa, en general AB ≠ BA

Este hecho se ilustra en los ejemplos 2 y 3, pero también se cumple con matrices cuadradas; por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9\cdot 1 + 3\cdot 2 & 9\cdot(-4) + 3\cdot 5 \\ -2\cdot 1 + 0\cdot 2 & (-2)\cdot(-4) + 0\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

en tanto que

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 9 + (-4)\cdot(-2) & 1\cdot 3 + (-4)\cdot 0 \\ 2\cdot 9 + 5\cdot(-2) & 2\cdot 3 + 5\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 AB = 0 no necesariamente implica que A = 0 o B = 0 o BA = 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Se han descubierto así las dos propiedades

(2a) $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ en general

y

(2b) $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ no necesariamente implica que $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$,

por las que la multiplicación de matrices difiere de la multiplicación de números. Por tanto, ¡siempre es necesario observar con mucho cuidado el orden de los factores! Para enfatizar este hecho, se dice que en **AB**, la matriz **B** está ***premultiplicada***, o ***multiplicada por la izquierda***, por **A**, y que **A** está ***postmultiplicada***, o ***multiplicada por la derecha***, por **B**. En la sección 7.7 se ampliará la discusión de (2b). Las demás propiedades de la multiplicación de matrices son similares a las de la multiplicación de números, a saber,

(2)

(c) $(k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$ *denotado* $k\mathbf{AB}$ *o* $\mathbf{A}k\mathbf{B}$

(d) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ *denotado* $\mathbf{ABC}$

(e) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

(f) $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$

siempre que **A**, **B** y **C** sean tales que las expresiones del primer miembro estén definidas; aquí, k es cualquier escalar.

Matrices especiales

Ciertos tipos de matrices se presentarán con mucha frecuencia más adelante, y se mencionan ahora las más importantes.

Matrices triangulares

Una matriz cuadrada cuyos elementos arriba de la diagonal principal son todos cero se llama *matriz triangular inferior*. De manera similar, una *matriz triangular superior* es una matriz cuadrada cuyos elementos abajo de la diagonal principal son cero. Por ejemplo,

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

son triangulares inferior y superior, respectivamente. Un elemento de la diagonal principal de una matriz triangular puede ser cero o no.

Matrices diagonales

Una matriz cuadrada $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ cuyos elementos arriba *y* abajo de la diagonal principal son todos cero, es decir, $a_{jk} = 0$ para toda $j \neq k$, se llama **matriz diagonal**. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

son matrices diagonales.

Una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son iguales se llama **matriz escalar**. Por tanto, una matriz escalar es de la forma

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{bmatrix}$$

donde c es cualquier número. El nombre proviene del hecho de que una matriz escalar $\mathbf{S}$ de $n \times n$ conmuta con cualquier matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ y la multiplicación por $\mathbf{S}$ tiene el mismo efecto que la multiplicación por un escalar,

$$\mathbf{AS} = \mathbf{SA} = c\mathbf{A}. \tag{3}$$

En particular, una matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal son todos 1 se llama **matriz unitaria** y se denota por $\mathbf{I}_n$ o simplemente por $\mathbf{I}$. Para $\mathbf{I}$, la fórmula (3) queda

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}. \tag{4}$$

Por ejemplo, la matriz unitaria de 3×3 es

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Transpuesta de un producto

La transpuesta (ver la sección 7.1) *de un producto es igual al producto de los factores transpuestos, tomados en orden* ***inverso,***

$$\text{(5)} \qquad \boxed{(\mathbf{AB})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}.}$$

La demostración de la útil fórmula (5) se sigue de la definición de multiplicación de matrices y se le deja al estudiante.

EJEMPLO 6 Transposición de un producto

La fórmula (5) se ilustra mediante

$$(\mathbf{AB})^{\mathsf{T}} = \left(\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \right)^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 30 & 100 \\ 4 & 16 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 30 & 4 & 15 \\ 100 & 16 & 55 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 4 & 15 \\ 100 & 16 & 55 \end{bmatrix}.$$ ∎

Producto interior de vectores

Se trata tan sólo de un caso especial de la definición de multiplicación de matrices, el cual se presenta con frecuencia, por lo que vale la pena darle un nombre y una notación especiales, de la siguiente manera.

Si **a** y **b** son vectores columna con n componentes, entonces $\mathbf{a}^{\mathsf{T}}$ es un vector renglón y de la multiplicación matricial de estos vectores se obtiene una matriz de 1×1, y por tanto un número real, al que se llama el **producto interior** o **producto punto** de **a** y **b** y se denota por $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; así,

$$\text{(6)} \qquad \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{b} = [a_1 \; \cdots \; a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^{n} a_l b_l = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Los productos interiores tienen interesantes aplicaciones en mecánica y geometría, como se verá en la sección 8.2. Por el momento se usarán para expresar productos de matrices en una forma condensada, lo cual suele resultar conveniente.

Producto en términos de vectores renglón y columna

La multiplicación de matrices es una multiplicación de renglones por columnas, como ya se vio, y en consecuencia (1) puede escribirse en términos de productos interiores. De hecho, todo elemento de $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ es un producto interior,

$$c_{11} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = (\text{primer renglón de } \mathbf{A}) \cdot (\text{primera columna de } \mathbf{B})$$

$$c_{12} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = (\text{primer renglón de } \mathbf{A}) \cdot (\text{segunda columna de } \mathbf{B})$$

y así sucesivamente, donde el término general es

$$(7) \qquad \boxed{c_{jk} = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{b}_k = (j\text{-ésimo renglón de } \mathbf{A}) \cdot (k\text{-ésima columna de } \mathbf{B})}$$

Por consiguiente, si $\mathbf{A}$ se escribe en términos de sus vectores renglón,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] \\ \mathbf{a}_2 &= [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}] \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_n &= [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}] \end{aligned}$$

y $\mathbf{B}$ en términos de sus vectores columna, $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \ \mathbf{b}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{b}_p]$, donde

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{b}_p = \begin{bmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{bmatrix}$$

por (1) o (7) se observa que el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ puede escribirse

$$(8) \qquad \mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_p \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_p \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{b}_p \end{bmatrix}.$$

Esta idea en ocasiones ayuda a ver con mayor claridad lo que ocurre en las aplicaciones.

Además, $\mathbf{Ab}_1$ es un vector columna

$$\mathbf{Ab}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{b}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}_m \bullet \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}$$

y (8) indica que esta es la primera columna de **AB**. Lo mismo ocurre para las demás columnas de **AB**, por lo que puede escribirse

(9) $$\mathbf{AB} = [\mathbf{Ab}_1 \quad \mathbf{Ab}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{Ab}_p],$$

fórmula que suele ser de utilidad (por ejemplo, en la sección 7.14).

EJEMPLO 7 Producto en términos de vectores renglón y columna

Al escribir una matriz **A** de 2 × 2 en términos de vectores renglón, por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{matrix} \mathbf{a}_1 = [a_{11} & a_{12}] \\ \mathbf{a}_2 = [a_{21} & a_{22}] \end{matrix}$$

y una matriz **B** de 2 × 2 en términos de vectores columna, por ejemplo,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] \quad \text{donde} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}.$$

se observa que (8) asume la forma

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Además, $\mathbf{AB} = [\mathbf{Ab}_1 \quad \mathbf{Ab}_2]$ por (9). ∎

Motivación de la multiplicación de matrices

A primera vista, la multiplicación de matrices puede parecer un tanto extraña, pero hay una buena razón para esta definición "artificial", la cual se deriva del uso de matrices en relación con las "transformaciones lineales". Para ver este hecho, se con-

sideran tres sistemas de coordenadas en el plano, los cuales se denotan como el sistema w_1w_2, el sistema x_1x_2 y el sistema y_1y_2, y se supone que estos sistemas se relacionan por medio de las transformaciones

$$(10) \qquad \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

y

$$(11) \qquad \begin{aligned} x_1 &= b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ x_2 &= b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{aligned}$$

que son *transformaciones lineales* (especiales). Al sustituir (11) en (10) se observa que las coordenadas y_1y_2 pueden obtenerse directamente de las coordenadas w_1w_2 mediante una sola transformación lineal de la forma

$$(12) \qquad \begin{aligned} y_1 &= c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ y_2 &= c_{21}w_1 + c_{22}w_2. \end{aligned}$$

Ahora de esta sustitución se obtiene

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{12}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ y_2 &= a_{21}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{22}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2). \end{aligned}$$

Al comparar estas expresiones con (12) se observa que debe tenerse

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \qquad & c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \qquad & c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{aligned}$$

o en forma abreviada

$$(13) \qquad c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} = \sum_{i=1}^{2} a_{ji}b_{ik} \qquad j, k = 1, 2.$$

Esta expresión es (1) con $m = n = p = 2$.

¿Qué indican los cálculos anteriores? En esencia dos cosas. Primera, la multiplicación de matrices se define de tal modo que las transformaciones lineales pueden escribirse en una forma compacta, usando matrices; en el caso presente, (10) queda

$$(10^*) \qquad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{donde} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

y (11) queda

$$(11^*) \quad \mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{w} \quad \text{donde} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

Segunda, si cada transformación lineal se sustituye en la otra, puede obtenerse la matriz de coeficientes **C** de la transformación compuesta (la transformación obtenida por la sustitución) tan sólo multiplicando las matrices de coeficientes **A** y **B** de las transformaciones dadas, en el orden correcto sugerido por la sustitución; a partir de (10*), (11*) y (12) se obtiene

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{w}, \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}.$$

Para dimensiones superiores la idea y el resultado son exactamente iguales; tan sólo cambia el número de variables. Se tienen entonces m variables $y_1, \cdots, y_m$, n variables $x_1, \cdots, x_n$ y p variables $w_1, \cdots, w_p$. La matriz **A** es de $m \times n$, la matriz **B** es de $n \times p$ y **C** es de $m \times p$, como en la figura 134. Y el requisito de que **C** sea el producto de **AB** lleva a la fórmula (1) en su forma general. Esto motiva plenamente la definición de multiplicación de matrices.

En la sección 7.15 se ampliará la discusión de las transformaciones lineales (generales) y las matrices relacionadas, después de obtener mayor experiencia con las matrices al considerar sistemas lineales de ecuaciones, a partir de la siguiente sección.

Una aplicación de la multiplicación de matrices

EJEMPLO 8 Matriz estocástica. Proceso de Markov

Suponer que el estado del uso del suelo de una ciudad de 50 millas cuadradas de superficie (no baldía) en 1993 es

I	(Uso residencial)	30%
II	(Uso comercial)	20%
III	(Uso industrial)	50%

Encontrar los estados en 1998 y 2003, suponiendo que las probabilidades de transición para intervalos de 5 años están dadas por la siguiente matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$.

	A I	A II	A III
De I	0.8	0.1	0.1
De II	0.1	0.7	0.2
De III	0	0.1	0.9

Nota. Una matriz cuadrada con elementos no negativos y la suma de cuyos renglones sea igual a 1 se llama **matriz estocástica**. En consecuencia, **A** es una matriz estocástica. Un proceso estocástico para el cual la probabilidad de entrar en cierto estado depende únicamente del *último* estado ocupado (y de la matriz que gobierna el proceso) se llama **proceso de Markov**.[1] Por tanto, este ejemplo se refiere a un proceso de Markov.

[1] ANDREI ANDREJEVITCH MARKOV (1856-1922), matemático ruso, conocido por sus trabajos en la teoría de la probabilidad.

Solución. A partir de la matriz **A** y del estado de 1993 puede calcularse el estado de 1998

I	(Residencial)	$0.8 \cdot 30 + 0.1 \cdot 20 + 0 \cdot 50 = 26$ [%]
II	(Comercial)	$0.1 \cdot 30 + 0.7 \cdot 20 + 0.1 \cdot 50 = 22$ [%]
III	(Industrial)	$0.1 \cdot 30 + 0.2 \cdot 20 + 0.9 \cdot 50 = 52$ [%].

La suma es el 100%, como debería. Se escribe lo anterior en forma de matriz. Sea $\mathbf{x}$ el vector columna que denota el estado en 1993; por tanto, $\mathbf{x}^T = [30 \quad 20 \quad 50]$. Sea que $\mathbf{y}$ que denota el estado en 1998. Entonces

$$\mathbf{y}^T = \mathbf{x}^T\mathbf{A} = [30 \quad 20 \quad 50]\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} = [26 \quad 22 \quad 52].$$

De manera similar, para el vector $\mathbf{z}$ del estado en 2003 se obtiene, como el lector puede comprobar,

$$\mathbf{z}^T = \mathbf{y}^T\mathbf{A} = (\mathbf{x}^T\mathbf{A})\mathbf{A} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^2 = [23 \quad 23.2 \quad 53.8].$$

Respuesta. En 1998, el área residencial será del 26% (13 millas cuadradas), la comercial 22% (11 millas cuadradas) y la industrial 52% (26 millas cuadradas). Para 2003, las cifras correspondientes son 23%, 23.2%, 53.8%. ∎

Concluye así la primera parte del capítulo 7, en la que se han definido las reglas del álgebra matricial y vectorial. Se está en posición ahora de abordar aplicaciones, empezando en la siguiente sección.

Problemas de la sección 7.3

Sean $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{d} = [1 \quad 0 \quad 2]$.

Encontrar aquellas de las siguientes expresiones que estén definidas.

1. $\mathbf{CB}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{C}^T$, $\mathbf{BC}^T$
2. $\mathbf{C}^2$, $\mathbf{C}^3$, $\mathbf{CC}^T$, $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$
3. $\mathbf{Ca}$, $\mathbf{Cd}^T$, $\mathbf{C}^T\mathbf{d}^T$
4. $\mathbf{B}^T\mathbf{a}$, $\mathbf{Bd}$, $\mathbf{dB}$, $\mathbf{ad}$
5. $\mathbf{B}^T\mathbf{C}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$
6. $\mathbf{BB}^T$, $\mathbf{BB}^T\mathbf{C}$, $\mathbf{BB}^T\mathbf{a}$
7. $\mathbf{a}^T\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^T\mathbf{Ca}$, $\mathbf{dCd}^T$
8. $\mathbf{dd}^T$, $\mathbf{d}^T\mathbf{d}$, $\mathbf{adB}$, $\mathbf{adBB}^T$
9. Demostrar (5).
10. Encontrar matrices reales de 2×2 (tantas como sea posible) cuyo cuadrado es **I**, la matriz unitaria.
11. Encontrar una matriz $\mathbf{A} \neq 0$ de 2×2 tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$.
12. Encontrar dos matrices **A**, **B** de 2×2 tales que $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$.
13. **(Matriz idempotente)** Se dice que una matriz **A** es *idempotente* si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Dar ejemplos de matrices idempotentes, diferentes de cero y de la matriz unitaria.
14. Demostrar que $\mathbf{AA}^T$ es simétrica.
15. Encontrar todas las matrices cuadradas reales que sean tanto simétricas como antisimétricas.
16. Demostrar que el producto de las matrices simétricas **A**, **B** es simétrico si y sólo si **A** y **B** son conmutativas, $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

En el texto se usaron **transformaciones lineales especiales** a fin de motivar la multiplicación de matrices y se agregan ahora algunos problemas de interés práctico. (Las transformaciones lineales en general se discuten en la sección 7.15.)

17. **(Rotación)** Demostrar que la transformación lineal $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ con la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

es una rotación alrededor del origen en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj del sistema de coordenadas cartesianas x_1x_2 en el plano, donde θ es el ángulo de rotación.

18. Demostrar que en el problema 17,

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\operatorname{sen} n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

¿Cuál es el significado geométrico de este resultado?

19. **(Gráficas por computadora)** Para visualizar un objeto tridimensional con caras planas (por ejemplo, un cubo), pueden guardarse los vectores de posición de los vértices con respecto a un sistema idóneo de coordenadas $x_1x_2x_3$ (y una lista de las aristas que los unen) y después obtener una imagen bidimensional en una pantalla de video proyectando el objeto en un plano coordenado, por ejemplo, en el plano x_1x_2 haciendo $x_3 = 0$. Para cambiar la apariencia de la imagen, puede aplicarse una transformación lineal a los vectores de posición almacenados. Demostrar que con una matriz diagonal **D** con elementos de la diagonal principal 3, 1, $\frac{1}{2}$ se obtiene a partir de un $\mathbf{x} = [x_j]$ el nuevo vector de posición $\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{x}$, donde $y_1 = 3x_1$ (alargamiento en la dirección x_1 por un factor 3), $y_2 = x_2$ (sin cambio), $y_3 = \frac{1}{2}x_3$ (contracción en la dirección x_3). ¿Qué efecto tendría una matriz escalar?

20. **(Rotaciones en el espacio en gráficas por computadora)** ¿Qué efecto tendrían las siguientes matrices en la situación descrita en el problema 19?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

21. **(Problema de asignación)** Los contratistas C_1, C_2, C_3 hacen licitaciones para las obras J_1, J_2, J_3 como se indica en la matriz de costos (en unidades de 100 000 dólares). ¿Qué asignación minimiza el costo total (a) sin ninguna condición? (b) ¿Bajo la condición de que a cada contratista sólo se le asignará una obra?

$$\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} J_1 & J_2 & J_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 24 & 4 & 10 \\ 18 & 6 & 12 \\ 16 & 8 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz de costos del problema 21

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 40 & 28 & 20 \\ 34 & 26 & 14 \\ 36 & 30 & 20 \end{bmatrix}$$

Matriz A del problema 22

22. Si el obrero W_j puede realizar el trabajo J_k en a_{jk} horas, según se indica en la matriz **A**, y cada obrero sólo deberá realizar un trabajo, ¿qué asignación minimizaría el tiempo total?

23. **(Proceso de Markov)** Para el proceso de Markov con matriz de transición $\mathbf{A} = [a_{jk}]$, cuyos elementos son $a_{11} = a_{12} = 0.5$, $a_{21} = 0.2$, $a_{22} = 0.8$ y estado inicial $[0.7 \;\; 0.7]^T$, calcular los 3 estados siguientes.
24. En un proceso de producción, sean N que significa "sin problema" y T que significa "problema". Sean las probabilidades de transición de un día al siguiente de 0.8 para $N \to N$, por tanto 0.2 para $N \to T$, y 0.5 para $T \to N$, por tanto 0.5 para $T \to T$. Si hoy no hay problema, ¿cuál es la probabilidad de un problema pasado mañana? ¿Dentro de 3 días?

7.4 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. ELIMINACIÓN DE GAUSS

El uso práctico más importante de las matrices es en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, los cuales aparecen con frecuencia como modelos de diversos problemas, por ejemplo, en estructuras, redes eléctricas, flujo vehicular, producción y consumo, asignación de trabajos a empleados, crecimiento de población, estadística, métodos numéricos para ecuaciones diferenciales (capítulo 20) y muchos más. Se empieza esta sección con un importante método de solución, la eliminación de Gauss, y se discuten las propiedades generales de las soluciones en las secciones subsecuentes.

Sistemas lineales. *Un sistema lineal de m ecuaciones en n incógnitas* $x_1, \cdots, x_n$ es un conjunto de ecuaciones de la forma

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
\tag{1}
$$

Por lo tanto, un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas es

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2,
\end{aligned}
\qquad \text{por ejemplo,} \qquad
\begin{aligned}
5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\
x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 6.
\end{aligned}
$$

Las a_{jk} son números dados, que reciben el nombre de **coeficientes** del sistema. Las b_i también son números dados. Si todos los b_i son cero, entonces se dice que (1) es un **sistema homogéneo**. Si al menos uno de los b_i es diferente de cero, entonces se dice que (1) es un **sistema no homogéneo**.

Una **solución** de (1) es un conjunto de números $x_1, \cdots, x_n$ que satisfacen las m ecuaciones en su totalidad. Un **vector solución** de (1) es un vector **x** cuyas componentes constituyen una solución de (1). Si el sistema (1) es homogéneo, tiene al menos la **solución trivial** $x_1 = 0, \cdots, x_n = 0$.

Matriz de coeficientes, matriz aumentada

A partir de la definición de multiplicación de matrices se observa que las m ecuaciones de (1) pueden escribirse como una sola ecuación vectorial

(2) $$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}}$$

donde la **matriz de coeficientes** $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ es la matriz de $m \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

son vectores columna. Se supone que no todos los coeficientes a_{jk} son cero, por lo que $\mathbf{A}$ no es una matriz cero. Obsérvese que $\mathbf{x}$ tiene n componentes, en tanto que $\mathbf{b}$ tiene m componentes. La matriz

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

se llama la **matriz aumentada** del sistema (1). Se observa que $\tilde{\mathbf{A}}$ se obtiene aumentando $\mathbf{A}$ con la columna $\mathbf{b}$. La matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ determina por completo el sistema (1), ya que contiene todos los números dados que aparecen en (1).

EJEMPLO 1 Interpretación geométrica. Existencia de soluciones

Si $m = n = 2$, se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas x_1, x_2

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2.$$

Si x_1, x_2 se interpretan como coordenadas en el plano x_1x_2, entonces cada una de las dos ecuaciones representa una recta y (x_1, x_2) es una solución si y sólo si el punto P de coordenadas x_1, x_2 está en ambas rectas. Por tanto, hay tres casos posibles:

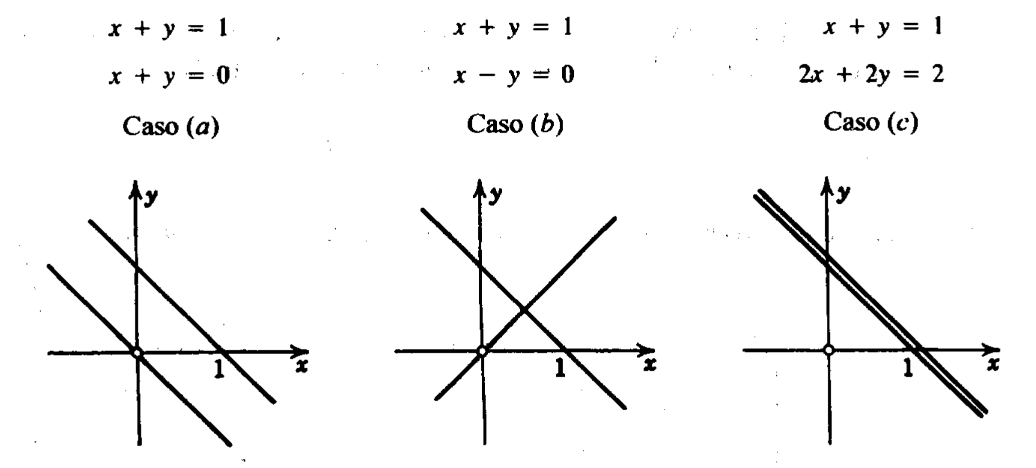
(a) No hay ninguna solución si las rectas son paralelas.

(b) Hay una sola solución si se cortan.

(c) Hay una infinidad de soluciones si coinciden.

Por ejemplo,

$x + y = 1$	$x + y = 1$	$x + y = 1$
$x + y = 0$	$x - y = 0$	$2x + 2y = 2$
Caso (*a*)	Caso (*b*)	Caso (*c*)



Si el sistema es homogéneo el caso *(a)* no puede ocurrir, porque entonces las dos rectas pasan por el origen, cuyas coordenadas 0, 0 constituyen la solución trivial. El lector puede considerar tres ecuaciones en tres incógnitas como representaciones de tres planos en el espacio y discutir los diferentes casos posibles en una manera similar. ∎

El sencillo ejemplo anterior ilustra que un sistema (1) no siempre puede tener una solución, y a continuación se presentan problemas importantes. ¿Tiene una solución un sistema (1) dado? ¿Bajo qué condiciones tiene exactamente una solución? Si tiene más de una solución, ¿cómo puede caracterizarse el conjunto de todas las soluciones? ¿Cómo pueden obtenerse las soluciones? Se discute primero la última pregunta y las restantes en la sección 7.6.

Eliminación de Gauss

La eliminación de Gauss es un método estándar para resolver sistemas lineales. Se trata de un proceso sistemático de eliminación, método de gran importancia que funciona en la práctica y es razonable en lo que se refiere al tiempo de cálculo y demanda de almacenamiento (dos aspectos que se considerarán en la sección 19.1 sobre métodos numéricos). Se explica primero el método mediante algunos ejemplos típicos. Puesto que un sistema lineal se encuentra completamente determinado por su matriz aumentada, el proceso de eliminación puede llevarse a cabo considerando sólo las matrices. Para ver esta correspondencia, los sistemas de ecuaciones y las matrices aumentadas se escribirán juntos.

EJEMPLO 2 Eliminación de Gauss. Red eléctrica

Resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90 \\ 20x_1 + 10x_2 \qquad &= 80. \end{aligned}$$

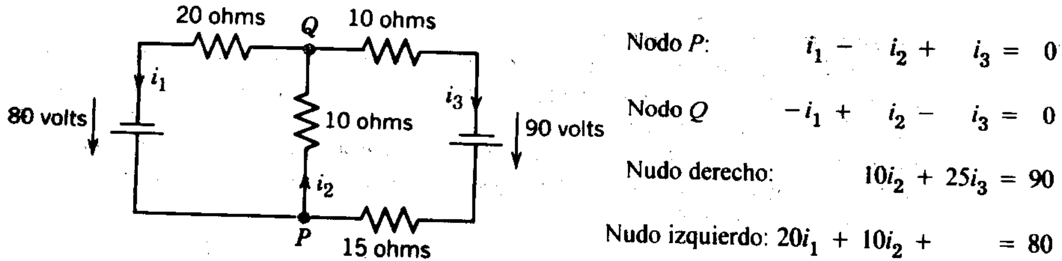


Figura 135. Red del ejemplo 2 y ecuaciones de las corrientes.

Derivación del circuito de la figura 135 (Opcional). Se trata del sistema para las corrientes desconocidas $x_1 = i_1$, $x_2 = i_2$, $x_3 = i_3$ en la red eléctrica de la figura 135. Para obtenerlo, se marcan las corrientes según se indica, eligiendo las direcciones de manera arbitraria; si una corriente resulta negativa, esto significa simplemente que la corriente fluye en dirección contraria a la de la flecha marcada. La corriente que entra a cada batería es igual a la corriente que sale de ellas. Las ecuaciones para las corrientes resultan de las leyes de Kirchhoff:

Ley de las corrientes de Kirchhoff (LCK). *En cualquier punto de un circuito, la suma de las corrientes que entran es igual a la suma de las corrientes que salen.*

Ley de las tensiones de Kirchhoff (LTK). *En cualquier circuito cerrado, la suma de todas las caídas de voltaje es igual a la fuerza electromotriz aplicada.*

El nodo P da la primera ecuación, el nodo Q la segunda, el circuito de la derecha la tercera y el circuito de la izquierda la cuarta, según se indica en la figura.

Solución por el método de eliminación de Gauss. Este sistema es tan simple que casi podría resolverse por inspección. No es este el punto. El cuestion es llevar a cabo una eliminación sistemática —la eliminación de Gauss— que funcionará en general, también para sistemas grandes. Es una reducción a la "*forma triangular*" a partir de la cual se obtendrán con facilidad los valores de las incógnitas por "*sustitución hacia atrás*".

Se escriben el sistema y su matriz aumentada lado a lado:

Ecuaciones — Matriz aumentada $\tilde{\mathbf{A}}$

Pivote ⟶ $\boxed{x_1} - x_2 + x_3 = 0$

Se eliminan ⟶

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90 \\ 20x_1 + 10x_2 \qquad &= 80 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 20 & 10 & 0 & 80 \end{bmatrix}$$

Primer paso. Eliminación de x_1

A la primera ecuación se le llama **ecuación pivotal** y su término x_1 se llama **pivote** en este paso y dicha ecuación se usa para eliminar x_1 (deshacerse de x_1) en las otras ecuaciones. Para ello, realizar las siguiente operaciones:

Restar -1 veces la ecuación pivotal de la segunda ecuación.[2]

Restar 20 veces la ecuación pivotal de la cuarta ecuación.

Esto corresponde a operaciones con renglones en la matriz aumentada, las cuales se indican en seguida de la *nueva* matriz en (3). El resultado es

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90 \\ 30x_2 - 20x_3 &= 80 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{Renglón 2 + Renglón 1} \\ \\ \text{Renglón 4 – 20 Renglón} \end{matrix}$$

[2] Llamar a todas las operaciones "restas" en lugar de "restas" y "sumas" resulta preferible desde el punto de vista de la uniformidad de los algoritmos numéricos. Ver también la sección 19.1.

Segundo paso. Eliminación de x_2

La primera ecuación, que acaba de servir como ecuación pivotal, permanece sin cambio. Quiere tomarse la (¡nueva!) segunda ecuación como la siguiente ecuación pivotal. Puesto que no contiene ningún término en x_2 (necesario como siguiente pivote) —de hecho, es $0 = 0$—, es necesario cambiar primero el orden de las ecuaciones (y los renglones correspondientes de la nueva matriz) para obtener un pivote diferente de cero. Se coloca la segunda ecuación $0 = 0$ al final y la tercera y cuarta ecuaciones se corren un lugar para arriba; a esto se le llama **pivoteo parcial**.[3] Se obtiene

$$\begin{array}{lrcl} & x_1 - x_2 + x_3 &=& 0 \\ \text{Pivote} \longrightarrow & \boxed{10x_2} + 25x_3 &=& 90 \\ \text{Se elimina} \longrightarrow & \boxed{30x_2} - 20x_3 &=& 80 \\ & 0 &=& 0 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para eliminar x_2:

Restar 3 veces la ecuación pivotal de la tercera ecuación.

El resultado es

$$(4) \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90 \\ -95x_3 &= -190 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 0 & -95 & -190 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Renglón 3} - 3 \text{ Renglón 2}$$

Sustitución hacia atrás. Determinación de x_3, x_2, x_1

Trabajando hacia atrás desde la última ecuación hasta la primera de este sistema "triangular" (4), ahora es posible encontrar con facilidad x_3, luego x_2 y finalmente x_1:

$$\begin{aligned} -95x_3 &= -190, & x_3 &= i_3 = 2 \text{ [amperes]}, \\ 10x_2 + 25x_3 &= 90, & x_2 &= \tfrac{1}{10}(90 - 25x_3) = i_2 = 4 \text{ [amperes]}, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0, & x_1 &= x_2 - x_3 = i_1 = 2 \text{ [amperes]}. \end{aligned}$$

Esta es la respuesta al problema planteado. La solución es única. ∎

Un sistema (1) se llama **sobredeterminado** si tiene más ecuaciones que incógnitas, como en el ejemplo 2, **determinado** si $m = n$, como en el ejemplo 1, y **subdeterminado** si (1) tiene menos ecuaciones que incógnitas. Un sistema subdeterminado siempre tiene soluciones, en tanto que en los otros dos casos las soluciones pueden existir o no. (Los detalles se presentan en la sección 7.6.) Ahora se desea ilustrar que la eliminación de Gauss se aplica a cualquier sistema, sin importar si tiene varias soluciones, una solución única o ninguna.

EJEMPLO 3 Eliminación de Gauss para un sistema subdeterminado

Resolver el sistema lineal de tres ecuaciones en cuatro incógnitas

$$(5) \qquad \begin{aligned} \boxed{3.0x_1} + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ \boxed{0.6x_1} + 1.5x_2 + 1.5x_3 - 5.4x_4 &= 2.7 \\ \boxed{1.2x_1} - 0.3x_2 - 0.3x_3 + 2.4x_4 &= 2.1 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0.6 & 1.5 & 1.5 & -5.4 & 2.7 \\ 1.2 & -0.3 & -0.3 & 2.4 & 2.1 \end{bmatrix}$$

[3] Por oposición a **pivoteo total**, en el que también se cambia el orden de las incógnitas. El pivoteo total rara vez se usa en la práctica.

Solución. Como en el ejemplo anterior, se encierran en un círculo los pivotes y en un rectángulo los términos que van a eliminarse.

Primer paso. Eliminación de x_1 a partir de la segunda y tercera ecuaciones restando

0.6/3.0 = 0.2 veces la primera ecuación de la segunda.

1.2/3.0 = 0.4 veces la primera ecuación de la tercera.

Se obtiene así un nuevo sistema de ecuaciones

$$(6)\quad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ \boxed{1.1x_2} + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ \boxed{-1.1x_2} - 1.1x_3 + 4.4x_4 &= -1.1 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0 & -1.1 & -1.1 & 4.4 & -1.1 \end{bmatrix}$$

y se encierra en un círculo el pivote que va a usarse en el siguiente paso.

Segundo paso. Eliminación de x_2 de la tercera ecuación de (6) restando

−1.1/1.1 = −1 veces la segunda ecuación de la tercera.

Se obtiene

$$(7)\quad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sustitución hacia atrás. Por la segunda ecuación, $x_2 = 1 - x_3 + 4x_4$. A partir de esta expresión y de la primera ecuación, $x_1 = 2 - x_4$. Puesto que x_3 y x_4 siguen siendo arbitrarias, se tiene una infinidad de soluciones; si se escoge un valor de x_3 y uno de x_4, entonces los valores correspondientes de x_1 y x_2 se encuentran determinados de manera única. ∎

EJEMPLO 4 Eliminación de Gauss si existe una solución única

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Primer paso. La eliminación de x_1 a partir de la segunda y tercera ecuaciones da como resultado

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 7x_3 &= 12 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{Renglón 2 + 3 Renglón 1} \\ \text{Renglón 3 − Renglón 1} \end{matrix}$$

Segundo paso. La eliminación de x_2 de la tercera ecuación da como resultado

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 7x_3 &= 12 \\ -5x_3 &= -10 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{Renglón 3 − Renglón 2} \end{matrix}$$

Sustitución hacia atrás. Empezando con la última ecuación, se obtiene de manera sucesiva $x_3 = 2$, $x_2 = -1$, $x_1 = 1$. Se observa que el sistema tiene una solución única. ∎

EJEMPLO 5 Eliminación de Gauss si no existe ninguna solución

¿Qué ocurrirá si se aplica la eliminación de Gauss a un sistema lineal que no tiene ninguna solución? La respuesta es que en este caso el método mostrará este hecho al producir una contradicción. Por ejemplo, considérese

$$\begin{aligned} \boxed{3x_1} + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ \boxed{2x_1} + x_2 + x_3 &= 0 \\ \boxed{6x_1} + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Primer paso. Eliminación de x_1 a partir de la segunda y tercera ecuaciones restando

2/3 veces la primera ecuación de la segunda.

6/3 = 2 veces la primera ecuación de la tercera.

Se obtiene así

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ \boxed{-\tfrac{1}{3}x_2} + \tfrac{1}{3}x_3 &= -2 \\ \boxed{-2x_2} + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Segundo paso. La eliminación de x_2 de la tercera ecuación da como resultado

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -\tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &= -2 \\ 0 &= 12 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Con esto se demuestra que el sistema no tiene ninguna solución. ∎

La forma del sistema y la de la matriz en el último paso de la eliminación de Gauss recibe el nombre de **forma escalonada**. Así, en el ejemplo 5 las formas escalonadas de la matriz de coeficientes y de la matriz aumentada son

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Al final de la eliminación de Gauss (antes de la sustitución hacia atrás) el sistema reducido tendrá la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ c_{22}x_2 + \cdots\cdots + c_{2n}x_n &= b_2^* \end{aligned}$$

$$\vdots$$

(8)
$$k_{rr}x_r + \cdots + k_{rn}x_n = \tilde{b}_r$$
$$0 = \tilde{b}_{r+1}$$
$$\vdots$$
$$0 = \tilde{b}_m$$

donde $r \leq m$ (y $a_{11} \neq$, $c_{22} \neq 0, \cdots, k_{rr} \neq 0$). A partir de lo anterior se observa que en lo que se refiere a las soluciones de este sistema (8), hay tres casos posibles:

(a) No hay ninguna solución si $r < m$ y uno de los números $\tilde{b}_{r+1}, \cdots, \tilde{b}_m$ es diferente de cero. Esto se ilustra con el ejemplo 5, donde $r = 2 < m = 3$ y $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_3 = 12$.

(b) Existe exactamente una solución si $r = n$ y $\tilde{b}_{r+1}, \cdots, \tilde{b}_m$, en caso de estar presentes, son cero. Esta solución se obtiene resolviendo la n-ésima ecuación de (8) para x_n, después la $(n-1)$-ésima ecuación para x_{n-1} y así sucesivamente procediendo en sentido inverso. Ver el ejemplo 2, donde $r = n = 3$ y $m = 4$.

(c) Existe una infinidad de soluciones si $r < n$ y $\tilde{b}_{r+1}, \cdots, \tilde{b}_m$, en caso de estar presentes, son cero. Entonces cualquiera de estas soluciones se obtiene eligiendo valores arbitrarios para las incógnitas $x_{r+1}, \cdots, x_n$, resolviendo la r-ésima ecuación para x_r, después la $(r-1)$-ésima ecuación para x_{r-1} y así sucesivamente procediendo en sentido inverso. El ejemplo 3 ilustra este caso.

Operaciones elementales sobre los renglones

Para justificar la eliminación de Gauss como método para resolver sistemas lineales, se introducen primero dos conceptos relacionados.

Operaciones elementales para las ecuaciones

Intercambio de dos ecuaciones
Multiplicación de una ecuación por una constante diferente de cero
Adición de un múltiplo constante de una ecuación a otra ecuación.

A éstas les corresponden las siguientes

Operaciones elementales sobre los renglones para matrices

Intercambio de dos renglones
Multiplicación de un renglón por una constante diferente de cero
Adición de un múltiplo constante de un renglón a otro renglón.

La eliminación de Gauss consiste en el uso de la tercera de estas operaciones[4] (para obtener los ceros) y de la primera (en el pivoteo).

Ahora a un sistema lineal S_1 se le llama **equivalente respecto a los renglones** a un sistema lineal S_2 si S_1 puede obtenerse a partir de S_2 mediante un (¡número finito!)

[4] En la eliminación de Gauss se dice "resta de un múltiplo constante" (en vez de "suma"), ya que resulta más sugerente en la obtención de ceros; desde luego, se trata de una simple cuestión de lenguaje.

de operaciones elementales sobre los renglones. Por supuesto, el sistema producido por la eliminación de Gauss al final es equivalente respecto a los renglones al sistema original que se resuelve. Por tanto, la justificación deseada de la eliminación de Gauss como método de solución se sigue del teorema siguiente, lo cual implica que la eliminación de Gauss da todas las soluciones del sistema *original.*

Teorema 1 (Sistemas equivalentes respecto a los renglones)

Los sistemas lineales equivalentes respecto a los renglones tienen los mismos conjuntos de soluciones.

Demostración. El intercambio de dos ecuaciones no altera el conjunto solución. Tampoco lo hace la multiplicación de una ecuación por una constante c (¡diferente de cero!), ya que la multiplicación de la nueva ecuación por $1/c$ produce la ecuación original. Lo mismo ocurre para la adición de una ecuación E_1 a una ecuación E_2, ya que al sumar $-E_1$ (la ecuación obtenida a partir de E_1 al multiplicar E_1 por -1) a la ecuación resultante de la adición se obtiene de nuevo la ecuación original. ∎

Se justifica así la eliminación de Gauss. Los aspectos numéricos del método se discuten en la sección 19.1 (que es independiente de las demás secciones sobre métodos numéricos) y en la sección 19.2 variantes populares del mismo (los métodos de Doolittle, de Crout y de Cholesky).

Problemas de la sección 7.4

Resolver los siguientes sistemas lineales por medio de la eliminación de Gauss.

1. $\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 3x + 2y &= -4 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x + 2y &= -17 \\ 10x + y &= 0 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} -x + 2y &= 4 \\ 3x + 4y &= 38 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x + 2y - 8z &= 0 \\ 2x - 3y + 5z &= 0 \\ 3x + 2y - 12z &= 0 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 3x - y + z &= -2 \\ x + 5y + 2z &= 6 \\ 2x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 7x - y - 2z &= 0 \\ 9x - y - 3z &= 0 \\ 2x + 4y - 7z &= 0 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x + y + z &= -1 \\ 4y + 6z &= 6 \\ y + z &= 1 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 5x + 3y &= 22 \\ -4x + 7y &= 20 \\ 9x - 2y &= 15 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 4y + 3z &= 13 \\ x - 2y + z &= 3 \\ 3x + 5y &= 11 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 7x - 4y - 2z &= -6 \\ 16x + 2y + z &= 3 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 2 \\ 5x - 15y + 7z &= 10 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 3x - 3y - 7z &= -4 \\ x - y + 2z &= 3 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} 3w - 6x - y - z &= 0 \\ w - 2x + 5y - 3z &= 0 \\ 2w - 4x + 3y - z &= 3 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} 4w + 3x - 9y + z &= 1 \\ -w + 2x - 13y + 3z &= 3 \\ 3w - x + 8y - 2z &= -2 \end{aligned}$

15. $$\begin{aligned} w + x + y &= 6 \\ -3w - 17x + y + 2z &= 2 \\ 4w - 17x + 8y - 5z &= 2 \\ -5x - 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} w - x + 3y - 3z &= 3 \\ -5w + 2x - 5y + 4z &= -5 \\ -3w - 4x + 7y - 2z &= 7 \\ 2w + 3x + y - 11z &= 1 \end{aligned}$$

Modelos de redes eléctricas

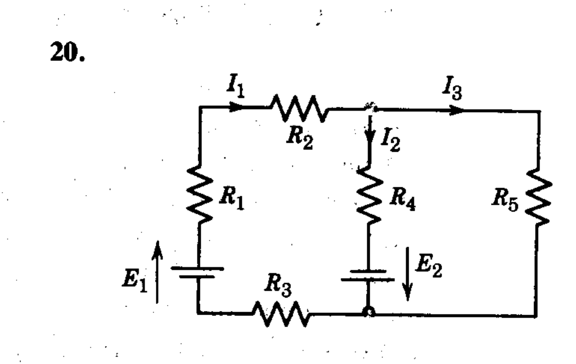
Usando las leyes de Kirchhoff (ver el ejemplo 2), encontrar las corrientes en las siguientes redes.

17.

18.

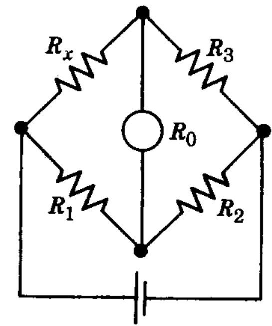
19.

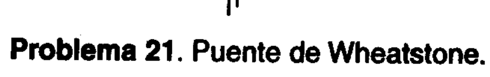
20.



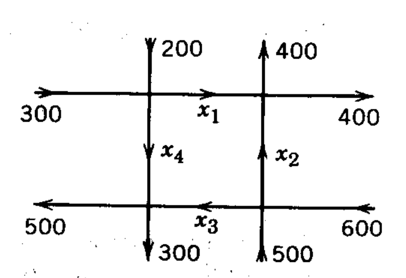
21. **(Puente de Wheatstone)** Demostrar que si $R_x/R_3 = R_1/R_2$ en la figura, entonces $I = 0$ (R_0 es la resistencia del instrumento con que se mide I.)

22. **(Flujo vehicular)** Los métodos de análisis de circuitos eléctricos tienen aplicaciones en otros campos. Por ejemplo, aplicando el análogo de la ley de la corriente de Kirchhoff, encontrar el flujo vehicular (automóviles por hora) en la red de calles de un sentido (en las direcciones indicadas por las flechas) ilustrada en la figura. ¿La solución es única?





Problema 21. Puente de Wheatstone.



Problema 22. Red de calles de un sentido.

23. **(Modelos de mercado)** Determinar la solución de equilibrio ($D_1 = S_1, D_2 = S_2$) del mercado de dos artículos con modelo lineal

$$D_1 = 40 - 2P_1 - P_2, \qquad S_1 = 4P_1 - P_2 + 4$$

$$D_2 = 5P_1 - 2P_2 + 16, \qquad S_2 = 3P_2 - 4$$

donde D, S, P significan demanda, oferta, precio y los subíndices 1 y 2 se refieren al primero y segundo artículos, respectivamente.

24. **(Relación de equivalencia)** Por definición, una *relación de equivalencia* en un conjunto es una relación que satisface tres condiciones:

(1) Todo elemento A del conjunto es equivalente a sí mismo.
(2) Si A es equivalente a B, entonces B es equivalente a A.
(3) Si A es equivalente a B y B es equivalente a C, entonces A es equivalente a C.

Por ejemplo, la igualdad es una relación de equivalencia en el conjunto de los números reales. Demostrar que la equivalencia respecto a los renglones satisface las tres condiciones.

7.5 INDEPENDENCIA LINEAL. ESPACIO VECTORIAL. RANGO DE UNA MATRIZ

En la sección anterior se explicó el método práctico más importante para resolver sistemas de ecuaciones lineales, la eliminación de Gauss. Se vio también que un sistema puede no tener soluciones, tener una sola solución o tener más de una solución (y en consecuencia una infinidad de soluciones). Por tanto, se pregunta si es posible hacer afirmaciones generales acerca de estos *problemas de existencia y unicidad.* La respuesta es sí y se hará en la siguiente sección. Para ello se necesitarán los conceptos de independencia lineal y rango, que se introducen a continuación; estos conceptos son de gran importancia general, que rebasa con mucho la presente discusión.

Independencia y dependencia lineal de vectores

Dado cualquier conjunto de m vectores[5] $\mathbf{a}_{(1)}, \cdots, \mathbf{a}_{(m)}$ (con el mismo número de componentes), una **combinación lineal** de estos vectores es una expresión de la forma

$$\boxed{c_1\mathbf{a}_{(1)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)}}$$

donde $c_1, \cdots, c_m$ son escalares arbitrarios.[6] Considérese ahora la ecuación

$$\text{(1)} \qquad \boxed{c_1\mathbf{a}_{(1)} + c_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{0}.}$$

[5] Si se prefiere, escríbase simplemente $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_m$, pero es necesario tener presente que se trata de *vectores*, no de *componentes* de vectores.

[6] En esta sección, los escalares serán números *reales*.

Evidentemente, esta expresión es válida si se elige el valor cero para todas las c, ya que se tiene entonces $\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Si este es el único número m de escalares para los que se cumple (1), se dice entonces que los vectores $\mathbf{a}_{(1)}, \cdots, \mathbf{a}_{(m)}$ forman un *conjunto linealmente independiente* o, abreviando, se les llama **linealmente independientes**. En caso contrario, si (1) también es válida con escalares que no sean todos cero, a estos vectores se les llama **linealmente dependientes**, ya que entonces uno (al menos) de ellos puede expresarse como una combinación lineal de los demás; por ejemplo, si (1) es válida con, por ejemplo, $c_1 \neq 0$, la ecuación (1) puede resolverse para $\mathbf{a}_{(1)}$:

$$\mathbf{a}_{(1)} = k_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + k_m\mathbf{a}_{(m)} \qquad \text{donde } k_j = -c_j/c_1$$

(y alguna o incluso todas las k pueden ser cero).

EJEMPLO 1 Independencia y dependencia lineal

Los tres vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{(1)} &= [\ 3 \quad 0 \quad 2 \quad 2] \\ \mathbf{a}_{(2)} &= [-6 \quad 42 \quad 24 \quad 54] \\ \mathbf{a}_{(3)} &= [\ 21 \quad -21 \quad 0 \quad -15] \end{aligned}$$

son linealmente dependientes porque

$$6\mathbf{a}_{(1)} - \tfrac{1}{2}\mathbf{a}_{(2)} - \mathbf{a}_{(3)} = \mathbf{0}.$$

Aun cuando es sencillo comprobar este hecho (¡hágalo), no lo es determinarlo; sin embargo, a continuación se presenta un método para determinar la independencia o dependencia lineal.

De los tres vectores anteriores, los dos primeros son linealmente independientes porque $c_1\mathbf{a}_{(1)} + c_2\mathbf{a}_{(2)} = \mathbf{0}$ implica que $c_2 = 0$ (por las componentes del segundo) y entonces $c_1 = 0$ (por cualquier otro par de componentes). ∎

Espacio vectorial, dimensión, base

Dados m vectores $\mathbf{a}_{(1)}, \cdots, \mathbf{a}_{(m)}$ con n componentes cada uno, como antes, puede formarse el conjunto V de todas las combinaciones lineales de estos vectores. V se llama el **generado** de estos m vectores.

V es un **espacio vectorial**.[7] Por definición, esto significa que V es un conjunto de vectores con las dos operaciones algebraicas de *adición* y *multiplicación por un escalar* definidas para estos vectores de modo que se cumple lo siguiente.

1. La suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ de dos vectores cualesquiera $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en V está también en V y el producto $k\mathbf{a}$ de cualquier vector $\mathbf{a}$ en V y el escalar k también está en V.

2. Para todos los vectores y escalares se tienen las conocidas reglas

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \qquad (\text{denotado } \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

[7]Aquí, tan sólo se tratan los puntos necesarios en la siguiente sección. Los espacios vectoriales generales se explican en la sección 7.15.

así como

$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

$$(k + \ell)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + \ell\mathbf{a}$$

$$k(\ell\mathbf{a}) = (k\ell)\mathbf{a} \qquad \text{(denotado } k\ell\mathbf{a}\text{)}$$

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

(Para los vectores aquí tratados, estas reglas se siguen de (1) y (2) de la sección 7.2 — ¡después de todo, los vectores son matrices especiales!)

Al número máximo de vectores linealmente independientes en V se le llama la **dimensión** de V y se denota por dim V.

Evidentemente, si los m vectores dados son linealmente independientes, entonces dim $V = m$; y si son linealmente dependientes, entonces dim $V < m$.

A un conjunto linealmente independiente en V compuesto por el máximo número posible de vectores de V se le llama una **base** de V. Por tanto, el número de vectores de una base de V es igual a dim V.

EJEMPLO 2 Espacio vectorial, dimensión, base

El generado de los tres vectores del ejemplo 1 es un espacio vectorial de dimensión 2 y una base es $\mathbf{a}_{(1)}$, $\mathbf{a}_{(2)}$, por ejemplo, o $\mathbf{a}_{(1)}$, $\mathbf{a}_{(3)}$, etc. ∎

Por **espacio vectorial real n dimensional R^n** se entiende el espacio de todos los vectores con n números *reales* como componentes (*"vectores reales"*) y números reales como escalares. Estos son un nombre y una notación estándares. Por tanto, cada uno de estos vectores es un arreglo ordenado de n números reales, como se sabe.

Por tanto, para $n = 3$ se tiene R^3 compuesto de ternas ordenadas ("vectores en el espacio tridimensional") y para $n = 2$ se tiene R^2 compuesto por pares ordenados ("vectores en el plano"). En los capítulos 8 y 9 se verá que estos casos especiales ofrecen amplias áreas para aplicaciones de geometría, mecánica y cálculo que son de importancia fundamental para el ingeniero y el físico.

Rango de una matriz

El número máximo de vectores renglón linealmente independientes de una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ se llama el **rango de A** y se denota por

$$\text{rango } \mathbf{A}.$$

EJEMPLO 3 Rango

La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

tiene rango 2, ya que el ejemplo 1 indica que los dos primeros vectores renglón son linealmente independientes, mientras que los tres vectores renglón son linealmente dependientes. ∎

Obsérvese asimismo que rango $\mathbf{A} = 0$ si y sólo si $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Esto se sigue directamente de la definición.

En la discusión de la existencia y la unicidad de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales se necesitará el muy importante

Teorema 1 (Rango en términos de vectores columna)

El rango de una matriz A es igual al número máximo de vectores ***columna*** *linealmente independientes de A.*

En consecuencia, A y su transpuesta A^{T} tienen el mismo rango.

Demostración. Sea $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ y sea rango $\mathbf{A} = r$. Entonces, por definición, $\mathbf{A}$ tiene un conjunto linealmente independiente de r vectores renglón, denotados $\mathbf{v}_{(1)}, \cdots, \mathbf{v}_{(r)}$, y todos los vectores renglón $\mathbf{a}_{(1)}, \cdots, \mathbf{a}_{(m)}$ de $\mathbf{A}$ son combinaciones lineales de los que son independientes, es decir,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{(1)} &= c_{11}\mathbf{v}_{(1)} + c_{12}\mathbf{v}_{(2)} + \cdots + c_{1r}\mathbf{v}_{(r)} \\
\mathbf{a}_{(2)} &= c_{21}\mathbf{v}_{(1)} + c_{22}\mathbf{v}_{(2)} + \cdots + c_{2r}\mathbf{v}_{(r)} \\
&\vdots \\
\mathbf{a}_{(m)} &= c_{m1}\mathbf{v}_{(1)} + c_{m2}\mathbf{v}_{(2)} + \cdots + c_{mr}\mathbf{v}_{(r)}
\end{aligned}$$

Estas son ecuaciones vectoriales. Cada una de ellas es equivalente a n ecuaciones de las componentes correspondientes. Al denotar las componentes de $\mathbf{v}_{(1)}$ por $v_{11}, \cdots, v_{1n}$, las componentes de $\mathbf{v}_{(2)}$ por $v_{21}, \cdots, v_{2n}$, etc., y haciendo lo mismo para los vectores del primer miembro, se tiene

$$\begin{aligned}
a_{1k} &= c_{11}v_{1k} + c_{12}v_{2k} + \cdots + c_{1r}v_{rk} \\
a_{2k} &= c_{21}v_{1k} + c_{22}v_{2k} + \cdots + c_{2r}v_{rk} \\
&\vdots \\
a_{mk} &= c_{m1}v_{1k} + c_{m2}v_{2k} + \cdots + c_{mr}v_{rk}
\end{aligned}$$

donde $k = 1, \cdots, n$. Esto puede escribirse

$$\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} = v_{1k}\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + v_{2k}\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + v_{rk}\begin{bmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{mr} \end{bmatrix}$$

donde $k = 1, \cdots, n$. El vector de la izquierda es el k-ésimo vector columna de $\mathbf{A}$. En consecuencia, la ecuación indica que todo vector columna de $\mathbf{A}$ es una combinación

lineal de los r vectores de la derecha. Por tanto, el número máximo de vectores columna linealmente independientes de $\mathbf{A}$ no puede exceder r, que es el número máximo de vectores renglón linealmente independientes de $\mathbf{A}$, por la definición de rango.

Ahora se aplica la misma conclusión a la transpuesta $\mathbf{A}^T$ de $\mathbf{A}$. Puesto que los vectores renglón de $\mathbf{A}^T$ son los vectores columna de $\mathbf{A}$ y los vectores columna de $\mathbf{A}^T$ son los vectores renglón de $\mathbf{A}$, la conclusión anterior significa que el número máximo de vectores renglón linealmente independientes de $\mathbf{A}$ (que es r) no puede exceder el número máximo de vectores columna linealmente independientes de $\mathbf{A}$. Por tanto, ese número debe ser igual a r y se termina así la demostración.

EJEMPLO 4 Ilustración del teorema 1

¿Qué significa el teorema 1 con respecto a la matriz $\mathbf{A}$ de (2)? Puesto que se tiene rango $\mathbf{A} = 2$, los vectores columna deberán contener dos que sean linealmente independientes y los dos restantes deberán ser combinaciones lineales de ellos. De hecho, los dos primeros vectores columna son linealmente independientes y

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 24 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 21 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 42 \\ -21 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 54 \\ -15 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 21 \end{bmatrix} + \frac{29}{21}\begin{bmatrix} 0 \\ 42 \\ -21 \end{bmatrix}.$$

Esto es sencillo de comprobar pero no de ver. Al imaginar que $\mathbf{A}^T$ fuera dada, se observa que la determinación de un rango mediante la aplicación directa de la definición no es la manera adecuada, a menos que la matriz sea lo suficientemente simple. Esto sugiere preguntarse si es posible "simplificar" (transformar) una matriz sin alterar su rango. La respuesta es afirmativa, como se indica en seguida. ∎

La separación de los vectores renglón de una matriz $\mathbf{A}$ se denomina **espacio renglón** de $\mathbf{A}$ y la separación de las columnas, **espacio columna** de $\mathbf{A}$. De esto y del teorema 1 se tiene

Teorema 2 (Espacio renglón y espacio columna)

El espacio renglón y el espacio columna de una matriz A tienen la misma dimensión, igual al rango de A.

Invariancia del rango bajo las operaciones elementales sobre los renglones

Se afirma que las *operaciones elementales sobre los renglones* (sección 7.4) *no alteran el rango de una matriz A.*

Para la primera operación (el intercambio de dos vectores renglón) esto resulta evidente. La segunda operación (la multiplicación de un vector renglón por una constante diferente de cero) tampoco altera el rango, ya que no altera el número máximo de vectores renglón linealmente independientes. Por último, la tercera operación es la adición de c veces un vector renglón $\mathbf{a}_{(j)}$, por ejemplo, a otro vector renglón, por ejemplo, $\mathbf{a}_{(i)}$. Esto produce una matriz que difiere de $\mathbf{A}$ tan sólo por el i-ésimo vector renglón, que es de la forma $\mathbf{a}_{(i)} + c\mathbf{a}_{(j)}$, una combinación lineal de los dos vectores renglón $\mathbf{a}_{(i)}$ y $\mathbf{a}_{(j)}$, por lo que el número de vectores renglón linealmente independientes

se mantiene igual. En consecuencia, la nueva matriz tiene el mismo rango que **A**. Recordando por la sección anterior que dos *matrices equivalentes respecto a los renglones* son aquellas que pueden obtenerse una a partir de la otra mediante un número finito de operaciones elementales sobre los renglones, el resultado es

Teorema 3 (Matrices equivalentes respecto a los renglones)

Las matrices equivalentes respecto a los renglones tienen el mismo rango.

Este teorema indica lo que puede hacerse para determinar el rango de una matriz **A**, a saber, reducirla a la forma escalonada (sección 7.4), usando la técnica de la eliminación de Gauss, porque al aplicarla el rango no se altera, por el teorema 2, y a partir de la forma escalonada puede identificarse directamente el rango.

EJEMPLO 5 Determinación del rango

Para la matriz del ejemplo 3 se obtiene sucesivamente

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix} \quad \text{(dado)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \text{Renglón } 2 + 2 \text{ Renglón } 1 \\ \text{Renglón } 3 - 7 \text{ Renglón } 1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{Renglón } 3 + \frac{1}{2} \text{ Renglón } 2 \end{matrix}$$

La última matriz está en la forma escalonada. Por los vectores renglón y el teorema 3 se observa de inmediato que el rango $\mathbf{A} \leqq 2$ y, por el teorema 1, que $\mathbf{A} = 2$, ya que los dos primeros vectores columna son a todas luces linealmente independientes. ∎

Este método para determinar el rango tiene aplicaciones prácticas en relación con la determinación de la dependencia e independencia lineal de vectores. La clave para ello es el siguiente teorema, que es un resultado inmediato de la definición de rango.

Teorema 4 (Dependencia e independencia lineal)

p vectores $\mathbf{x}_{(1)}, \cdots, \mathbf{x}_{(p)}$ (con n componentes cada uno) son linealmente independientes si la matriz con vectores renglón $\mathbf{x}_{(1)}, \cdots, \mathbf{x}_{(p)}$ tiene rango p; son linealmente dependientes si dicho rango es menor que p.

Puesto que cada uno de los p vectores tiene n componentes, esa matriz, llámese **A**, tiene p renglones y n columnas; y si $n < p$, entonces por el teorema 1 debe tenerse rango $\mathbf{A} \leq n < p$, por lo que el teorema 4 lleva al siguiente resultado, el cual debe tenerse presente.

Teorema 5

p vectores con $n < p$ componentes son siempre linealmente dependientes.

Por ejemplo, tres o más vectores en el plano son linealmente dependientes. De manera similar, cuatro o más vectores en el espacio son linealmente dependientes.

Por la definición de dimensión, se tiene asimismo

Teorema 6

El espacio vectorial R^n que consta de todos los vectores con n componentes tiene dimensión n.

En la siguiente sección se presentan aplicaciones básicas del rango.

Problemas de la sección 7.5

Espacios vectoriales. ¿El conjunto de vectores dado es un espacio vectorial? (Dar una razón.) Si la respuesta es afirmativa, determinar la dimensión y encontrar una base.

1. Todos los vectores $[v_1 \;\; v_2 \;\; v_3]^T$ en R^3 tales que $v_1 + 2v_2 = 0$.
2. Todos los vectores en R^4 tales que $v_1 + v_2 = 0$. $v_3 + v_4 = 0$.
3. Todos los vectores en R^3 tales que $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.
4. Todos los vectores en R^3 tales que $v_1 + v_2 = k$ (= *const*).
5. Todos los números reales.
6. Todos los vectores en R^5 tales que $v_1 + v_2 = 0$, $v_1 + 2v_2 + v_3 - v_4 = 0$.
7. Todos los quintetos ordenados de números reales positivos.
8. Todos los vectores en R^4 tales que $v_1 = 0$, $v_2 + v_3 + v_4 \geq 0$.
9. Todos los vectores en R^n con las primeras $n - 1$ componentes cero.

10. **(Subespacio)** Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V se llama *subespacio* de V si W en sí mismo es un espacio vectorial con respecto a las operaciones algebraicas definidas en V. Dar ejemplos de subespacios de R^3 con una y dos dimensiones.

Rango. Encontrar el rango por inspección o por el método del ejemplo 5.

11. $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -9 \\ -6 & -4 & 18 \\ 12 & 8 & -36 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{bmatrix}$ $a \neq \pm b$ **16.** $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ -8 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ -3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 18. $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ 19. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20. Demostrar con un ejemplo que rango $\mathbf{A}$ = rango $\mathbf{B}$ *no* implica que rango $\mathbf{A}^2$ = rango $\mathbf{B}^2$.
21. Demostrar que $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ = rango $\mathbf{AB}$.
22. Probar que si los vectores renglón de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ son linealmente independientes entonces también lo son los vectores columna de $\mathbf{A}$ (y viceversa).
23. Probar que si $\mathbf{A}$ no es cuadrada, entonces los vectores renglón o bien los vectores columna de $\mathbf{A}$ son linealmente dependientes.
24. Probar que las matrices equivalentes respecto a los renglones tienen el mismo espacio renglón.
25. Encontrar una base del espacio renglón y del espacio columna de la matriz del problema 11.
26. Repetir el procedimiento del problema 25 para la matriz del problema 17.

Independencia lineal. Establecer si los vectores dados son linealmente independientes o dependientes.

27. [1 5 3], [2 4 6], [3 9 11]
28. [4 3 9], [0 0 0], $[1 \ \ \frac{3}{2} \ \ \frac{2}{3}]$
29. [1 0], [1 2], [3 4]
30. [1 1 0], [0 1 1], [1 0 1]
31. [1 2 3], [4 5 6], [7 8 9]
32. [3 −1 4], [6 7 5], [9 6 9]
33. [9 0 9], [0 6 6], [3 3 0]
34. [2 1 0 6], [1 9 9 0]
35. [3 0 2 4 5], [7 2 6 1 0], [1 2 2 −7 −10]

7.6 SISTEMAS LINEALES: PROPIEDADES GENERALES DE LAS SOLUCIONES

Usando el concepto de rango de una matriz, según se definió en la sección anterior, es posible establecer ahora el tema de la existencia y la unicidad de las soluciones de los sistemas lineales. El teorema central (¡que el estudiante deberá memorizar!) es el siguiente. (Para ejemplos ilustrativos, ver la sección 7.4.)

Teorema 1 Teorema fundamental de los sistemas lineales

(a) *Un sistema lineal de m ecuaciones*

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array} \qquad (1)
$$

en n incógnitas $x_1, \cdots, x_n$ tiene soluciones si y sólo si la matriz de coeficientes A y la matriz aumentada A, es decir,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad y \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

tienen el mismo rango.

(b) *Si este rango r es igual a n, el sistema* (1) *tiene exactamente una solución.*

(c) *Si $r < n$, el sistema* (1) *tiene una infinidad de soluciones, la totalidad de las cuales se obtienen al determinar r incógnitas adecuadas (cuya submatriz de coeficientes debe tener rango r) en términos de las $n - r$ incógnitas restantes, a las que pueden asignarse valores arbitrarios.*

(d) *Si existen soluciones, todas ellas pueden obtenerse por la eliminación de Gauss* (ver la sección 7.4). (Esta eliminación puede iniciarse sin considerar primero los rangos de **A** y $\tilde{\mathbf{A}}$, ya que revelará automáticamente si existen o no soluciones; ver, por ejemplo, el ejemplo 5 de la sección 7.4.)

Demostración. **(a)** El sistema (1) puede escribirse en la forma

$$(1) \qquad \boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}}$$

o en términos de vectores columna $\mathbf{c}_{(1)}, \cdots, c_{(n)}$ de **A**:

$$(2) \qquad \mathbf{c}_{(1)}x_1 + \mathbf{c}_{(2)}x_2 + \cdots + \mathbf{c}_{(n)}x_n = \mathbf{b}.$$

Puesto que $\tilde{\mathbf{A}}$ se obtiene agregando a **A** la columna adicional **b**, el teorema 1 de la sección 7.5 implica que rango $\tilde{\mathbf{A}}$ es igual a rango **A** o rango **A** + 1. Ahora bien, si (1) tiene una solución **x**, entonces (2) indica que **b** debe ser una combinación lineal de esos vectores columna. Por tanto, rango $\tilde{\mathbf{A}}$ no puede exceder rango **A**, de donde debe tenerse que rango $\tilde{\mathbf{A}}$ = rango **A**.

Recíprocamente, si rango $\tilde{\mathbf{A}}$ = rango **A**, entonces **b** debe ser una combinación lineal de los vectores columna de **A**, por ejemplo,

$$\mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{c}_{(1)} + \cdots + \alpha_n\mathbf{c}_{(n)}$$

ya que de otro modo rango $\tilde{\mathbf{A}}$ = rango **A** + 1. Pero esto significa que (1) tiene una solución, a saber, $x_1 = \alpha_1, \cdots, x_n = \alpha_n$.

(b) Si rango **A** = $r = n$, entonces el conjunto $C = \{\mathbf{c}_{(1)}, \cdots, c_{(n)}\}$ es linealmente independiente, por el teorema 1 de la sección 7.5. Se sigue entonces que la representación (2) de **b** es única ya que

$$\mathbf{c}_{(1)}x_1 + \cdots + \mathbf{c}_{(n)}x_n = \mathbf{c}_{(1)}\tilde{x}_1 + \cdots + \mathbf{c}_{(n)}\tilde{x}_n$$

implicaría que

$$(x_1 - \tilde{x}_1)\mathbf{c}_{(1)} + \cdots + (x_n - \tilde{x}_n)\mathbf{c}_{(n)} = \mathbf{0}$$

y $x_1 - \tilde{x}_1 = 0, \cdots, x_n - \tilde{x}_n = 0$ por la independencia lineal. En consecuencia, los escalares $x_1, \cdots, x_n$ en (2) se encuentran determinados de manera única, es decir, la solución de (1) es única.

(c) Si rango $\mathbf{A}$ = rango $\tilde{\mathbf{A}} = r < n$, por el teorema 1, sección 7.5, hay un conjunto K linealmente independiente de r vectores columna de $\mathbf{A}$ tal que los $n - r$ vectores columna restantes de $\mathbf{A}$ son combinaciones lineales de esos vectores. Se renumeran columnas e incógnitas, denotando las cantidades renumeradas por $\hat{}$, de tal modo que $\{\hat{\mathbf{c}}_{(1)}, \cdots, \hat{\mathbf{c}}_{(r)}\}$ es ese conjunto K linealmente independiente. Entonces (2) queda

$$\hat{\mathbf{c}}_{(1)}\hat{x}_1 + \cdots + \hat{\mathbf{c}}_{(n)}\hat{x}_n = \mathbf{b},$$

$\hat{\mathbf{c}}_{(r+1)}, \cdots, \hat{\mathbf{c}}_{(n)}$ son combinaciones lineales de los vectores de $\mathbf{K}$, al igual que los vectores $\hat{x}_{r+1}\hat{\mathbf{c}}_{(r+1)}, \cdots, \hat{x}_n\hat{\mathbf{c}}_{(n)}$. Al expresar estos vectores en términos de los vectores de K y agrupando términos, el sistema puede escribirse en la forma

$$\hat{\mathbf{c}}_{(1)}y_1 + \cdots + \hat{\mathbf{c}}_{(r)}y_r = \mathbf{b} \tag{3}$$

$y_j = \hat{x}_j + \beta_j$, donde β_j resulta de los términos $\hat{x}_{r+1}\hat{\mathbf{c}}_{(r+1)}, \cdots, \hat{x}_n\hat{\mathbf{c}}_{(n)}$; aquí, $j = 1, \cdots, r$. Puesto que el sistema tiene una solución, hay $y_1, \cdots, y_r$ que satisfacen (3). Estos escalares son únicos ya que K es linealmente independiente. Al elegir $\hat{x}_{r+1}, \cdots, \hat{x}_n$ se fija la β_j y la $\hat{x}_j = y_j - \beta_j$ correspondiente, donde $j = 1, \cdots, r$.

(d) Esto se demostró en la sección 7.5 y se vuelve a replantear aquí en calidad de recordatorio. ∎

El teorema se ilustra por medio de ejemplos en la sección 7.4; en el ejemplo 3 se tiene rango $\mathbf{A}$ = rango $\tilde{\mathbf{A}} = 2 < n = 4$ y pueden escogerse x_3 y x_4 de manera arbitraria; en el ejemplo 4 hay una solución única ya que rango $\mathbf{A}$ = rango $\tilde{\mathbf{A}} = n = 3$; y en el ejemplo 5 no hay ninguna solución, ya que rango $\mathbf{A} = 2 <$ rango $\tilde{\mathbf{A}} = 3$.

El sistema homogéneo

El sistema (1) se llama **homogéneo** si todas las b_j del segundo miembro son cero. En caso contrario se llama **no homogéneo**. (Ver también la sección 7.4.) Por el teorema fundamental se obtienen con facilidad los siguientes resultados.

Teorema 2 (Sistema homogéneo)

Un sistema lineal homogéneo

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \tag{4}$$

siempre tiene la **solución trivial** $x_1 = 0, \cdots, x_n = 0$. *Existen soluciones no triviales si y sólo si* rango $\mathbf{A} < n$. *Si* rango $\mathbf{A} = r < n$, *estas soluciones, junto con* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *forman un espacio vectorial de dimensión* $n - r$ *(ver la sección 7.5). En particular, si* $\mathbf{x}_{(1)}$ y $\mathbf{x}_{(2)}$ *son vectores solución de* (4), *entonces* $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_{(1)} + c_2\mathbf{x}_{(2)}$, *donde* c_1 *y* c_2 *son escalares cualesquiera, es un vector solución de* (4). *(Esto* ***no se cumple*** *para sistemas no homogéneos.*

Demostración. El primer enunciado es obvio y está en concordancia con el hecho de que para un sistema homogéneo la matriz de coeficientes y la matriz aumentada tienen el mismo rango. Los vectores solución forman un espacio vectorial porque si $\mathbf{x}_{(1)}$ y $\mathbf{x}_{(2)}$ son cualquiera de ellos, entonces $\mathbf{Ax}_{(1)} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Ax}_{(2)} = \mathbf{0}$, y esto implica $\mathbf{A}(\mathbf{x}_{(1)} + \mathbf{x}_{(2)}) = \mathbf{Ax}_{(1)} + \mathbf{Ax}_{(2)} = \mathbf{0}$ así como $\mathbf{A}(c\mathbf{x}_{(1)}) = c\mathbf{Ax}_{(1)} = \mathbf{0}$, donde c es arbitrario. Si rango $\mathbf{A} = r < n$, el teorema fundamental implica que pueden elegirse $n - r$ incógnitas adecuadas, llámense $x_{r+1}, \cdots, x_n$, en una forma arbitraria, y cada solución se obtiene de esta manera. Se sigue que una **base de soluciones** (es decir, una base del espacio vectorial de estas soluciones) es $\mathbf{y}_{(1)}, \cdots, \mathbf{y}_{(n-r)}$, donde el vector solución $\mathbf{y}_{(j)}$, $j = 1, \cdots, n - r$, se obtiene eligiendo $x_{r+j} = 1$ y las otras $x_{r+1}, \cdots, x_n$ cero; entonces se encuentran determinadas las $x_1, \cdots, x_r$ correspondientes. Con esto se prueba que el espacio vectorial de todas las soluciones tiene dimensión $n - r$ y se termina así la demostración. ∎

Cabe mencionar que al espacio vectorial de todas las soluciones de (4) se le llama el **espacio nulo** de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, ya que si se multiplica por $\mathbf{A}$ cualquier $\mathbf{x}$ de este espacio nulo el resultado es $\mathbf{0}$. A la dimensión del espacio nulo se le llama la **nulidad** de $\mathbf{A}$. En términos de estos conceptos, el teorema 2 establece que

$$\text{rango } \mathbf{A} + \text{nulidad } \mathbf{A} = n \qquad (5)$$

donde n es el número de incógnitas (el número de columnas de $\mathbf{A}$). Si se tiene rango $\mathbf{A} = n$, entonces nulidad $\mathbf{A} = 0$, de donde el sistema sólo tiene la solución trivial. Si rango $\mathbf{A} = r < n$, entonces nulidad $\mathbf{A} = n - r > 0$, por lo que se tienen soluciones no triviales que, junto con $\mathbf{0}$, forman un espacio vectorial de dimensión $n - r > 0$.

Obsérvese que rango $\mathbf{A} \leq m$ en (4), por la definición, por lo que rango $\mathbf{A} < n$ cuando $m < n$. Por el teorema 2 esto demuestra el siguiente teorema, que es de considerable importancia práctica.

Teorema 3 (Sistema con menos ecuaciones que incógnitas)

Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que incógnitas siempre tiene soluciones no triviales.

El sistema no homogéneo

Si un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales tiene soluciones, su totalidad puede caracterizarse de la siguiente manera.

Teorema 4 (Sistema no homogéneo)

Si un sistema lineal no homogéneo de ecuaciones de la forma (1) *tiene soluciones, entonces todas estas soluciones son de la forma*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_h$$

donde $\mathbf{x}_0$ *es cualquier solución fija de* (1) *y* $\mathbf{x}_h$ *recorre todas las soluciones del sistema homogéneo* (4) *correspondiente.*

Demostración. Sean $\mathbf{x}$ cualquier solución dada de (1) y $\mathbf{x}_0$ una solución de (1) elegida arbitrariamente. Entonces $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $Ax_0 = \mathbf{b}$ y, por lo tanto,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{Ax} - \mathbf{Ax}_0 = \mathbf{0}.$$

Con esto se demuestra que la diferencia $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ de cualquier solución $\mathbf{x}$ de (1) y cualquier solución fija $\mathbf{x}_0$ de (1) es una solución de (4), por ejemplo, $\mathbf{x}_h$. En consecuencia, todas las soluciones de (1) se obtienen haciendo que $\mathbf{x}_h$ recorra todas las soluciones del sistema homogéneo (4) y se termina así la demostración. ∎

7.7 INVERSA DE UNA MATRIZ

***En esta sección se consideran exclusivamente matrices* cuadradas.**

La **inversa** de una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $n \times n$ se denota por $\mathbf{A}^{-1}$ y es una matriz de $n \times n$ tal que

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}, \tag{1}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz unitaria de $n \times n$ (ver la sección 7.3).

Si $\mathbf{A}$ tiene una inversa, entonces $\mathbf{A}$ se llama **matriz no singular**. Si $\mathbf{A}$ no tiene inversa, entonces $\mathbf{A}$ se llama **matriz singular**.

Si A tiene una inversa, ésta es única.

De hecho, si tanto $\mathbf{B}$ como $\mathbf{C}$ son inversas de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$, por lo que la unicidad se obtiene de

$$\mathbf{B} = \mathbf{IB} = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = \mathbf{CI} = \mathbf{C}.$$

Se demuestra a continuación que $\mathbf{A}$ tiene una inversa (es no singular) si y sólo si tiene rango máximo posible n. La demostración probará asimismo que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ implica $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ siempre que $\mathbf{A}^{-1}$ exista, y se da así una motivación para la inversa así como una relación con los sistemas lineales.[8]

Teorema 1 (Existencia de la inversa)

La inversa $\mathbf{A}^{-1}$ *de una matriz* $\mathbf{A}$ de $n \times n$ *existe si y sólo si* rango $\mathbf{A} = n$. *En consecuencia,* $\mathbf{A}$ *es no singular si* rango $\mathbf{A} = n$, *y es singular si* rango $\mathbf{A} < n$.

---

[8] Pero ***no*** un método para resolver ***numéricamente*** $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ya que la eliminación de Gauss (sección 7.4) requiere menos cálculos.

Demostración. Considérese el sistema lineal

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

con la matriz **A** dada como matriz de coeficientes. Si la inversa existe, entonces al premultiplicar por (1) ambos miembros se obtiene

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Con esto se demuestra que (2) tiene una solución única **x**, por lo que **A** debe tener rango n por el teorema fundamental de la sección anterior.

Recíprocamente, sea rango **A** = n. Entonces por el mismo teorema, el sistema (2) tiene una solución única **x** para cualquier **b** y la eliminación de Gauss (en la sección 7.4) indica que sus componentes x_j son combinaciones lineales de las de **b**, por lo que puede escribirse

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{Bb}.$$

Al hacer la sustitución en (2) se obtiene

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{A}(\mathbf{Bb}) = (\mathbf{AB})\mathbf{b} = \mathbf{Cb} = \mathbf{b} \qquad (\mathbf{C} = \mathbf{AB})$$

para cualquier **b**. Por tanto **C** = **AB** = **I**, la matriz unitaria. De manera similar, si se sustituye (2) en (3) se obtiene

$$\mathbf{x} = \mathbf{Bb} = \mathbf{B}(\mathbf{Ax}) = (\mathbf{BA})\mathbf{x}$$

para cualquier **x** (y **b** = **Ax**). Por tanto **BA** = **I**. En conjunto, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ existe. ∎

Determinación de la inversa

Quiere establecerse que para determinar en la práctica la inversa $\mathbf{A}^{-1}$ de una matriz **A** no singular de $n \times n$ puede usarse la eliminación de Gauss (sección 7.4), en realidad, una variante de la misma, llamada la **eliminación de Gauss-Jordan.**[9] La idea es la siguiente. Usando **A**, se forman los n sistemas $\mathbf{Ax}_{(1)} = \mathbf{e}_{(1)}, \cdots, \mathbf{Ax}_{(n)} = \mathbf{e}_{(n)}$, donde $\mathbf{e}_{(j)}$ tiene la j-ésima componente 1 y las demás componentes cero. Al introducir las matrices $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_{(1)} \cdots \mathbf{x}_{(n)}]$ e $\mathbf{I} = [\mathbf{e}_{(1)} \cdots \mathbf{e}_{(n)}]$, de $n \times n$, los n sistemas se combinan en una sola ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ y las n matrices aumentadas $[\mathbf{A} \;\; \mathbf{e}_{(1)}], \cdots, [\mathbf{A} \;\; \mathbf{e}_{(n)}]$ en una sola matriz aumentada $\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \;\; \mathbf{I}]$. Ahora $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ implica $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}$, y para resolver $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ para **X** puede aplicarse la eliminación de Gauss a $\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \;\; \mathbf{I}]$ para obtener $[\mathbf{U} \;\; \mathbf{H}]$, donde **U** es triangular superior, ya que la eliminación de Gauss

[9] WILHELM JORDAN (1842-1899), matemático y geodesta alemán. [Ver *American Mathematical Monthly* **94** (1987), pp. 130-142.]

No se recomienda como método para resolver sistemas de ecuaciones lineales, ya que el número de operaciones aunadas a las de la eliminación de Gauss es mayor que para la sustitución hacia atrás, la cual evita la eliminación de Gauss-Jordan. Ver también la sección 19.1.

triangulariza los sistemas. La eliminación de Gauss-Jordan opera ahora sobre **[U H]** y, al eliminar los elementos de **U** que están arriba de la diagonal principal, se reduce a **[I K]**, la matriz aumentada de $\mathbf{IX} = \mathbf{A}^{-1}$. Por tanto, debe tenerse $\mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1}$ y $\mathbf{A}^{-1}$ puede leerse al final.

(En la sección 7.9 se presenta una fórmula para los elementos de $\mathbf{A}^{-1}$ en términos de los de **A**, en relación con los determinantes.)

EJEMPLO 1 Inversa de una matriz. Eliminación de Gauss-Jordan

Encontrar la inversa $\mathbf{A}^{-1}$ de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución. Se aplica la eliminación de Gauss (sección 7.4) a

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{Renglón 2} + 3 \text{ Renglón 1} \\ \text{Renglón 3} - \text{Renglón 1} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{Renglón 3} - \text{Renglón 2} \end{array}$$

Esta es **[U H]** según se obtiene por la eliminación de Gauss y **U** concuerda con el ejemplo 4 de la sección 7.4. Se siguen ahora los pasos adicionales de Gauss-Jordan para reducir **U** a **I**, es decir, a la forma diagonal con elementos 1 en la diagonal principal.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -\text{Renglón 1} \\ 0.5 \text{ Renglón 2} \\ -0.2 \text{ Renglón 3} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Renglón 1} + 2 \text{ Renglón 3} \\ \text{Renglón 2} - 3.5 \text{ Renglón 3} \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Renglón 1} + \text{Renglón 2} \\ \\ \\ \end{array}$$

Las tres últimas columnas constituyen $\mathbf{A}^{-1}$. Comprobar:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$. De manera similar, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. ∎

Algunas fórmulas útiles para inversas

Para una matriz no singular de 2×2 se obtiene

$$(4) \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix},$$

donde $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, el cual se discutirá en la siguiente sección. De hecho, se comprueba con facilidad que (1) es válida.

De manera similar, para una matriz diagonal no singular simplemente se tiene

$$(5) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 1/a_{nn} \end{bmatrix};$$

los elementos de $\mathbf{A}^{-1}$ en la diagonal principal son los recíprocos de los de $\mathbf{A}$.

EJEMPLO 2 Inversa de una matriz de 2 × 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$ ∎

EJEMPLO 3 Inversa de una matriz diagonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ∎

La inversa de la inversa es la matriz dada $\mathbf{A}$:

$$(6) \qquad (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}.$$

La sencilla demostración se le deja al lector (problema 16).

Inversa de un producto. La inversa de un producto **AC** puede calcularse obteniendo la inversa de cada factor por separado y multiplicando los resultados en *orden invertido*:

(7) $$\boxed{(\mathbf{AC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.}$$

Para demostrar (7), se empieza con (1), con **AC** en lugar de **A**, es decir,

$$\mathbf{AC}(\mathbf{AC})^{-1} = \mathbf{I}.$$

Al premultiplicar esta expresión por $\mathbf{A}^{-1}$ y usando $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ se obtiene

$$\mathbf{C}(\mathbf{AC})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Al premultiplicar esta expresión por $\mathbf{C}^{-1}$ se llega a la fórmula (7).

Desde luego, (7) puede generalizarse a productos de más de dos matrices; por inducción se obtiene

(8) $$(\mathbf{AC}\cdots\mathbf{PQ})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1}\cdots\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Eliminación de productos matriciales. Ley de cancelación

Puede obtenerse ahora más información acerca del peculiar hecho de que para la multiplicación de matrices, en general la ley de cancelación no se cumple; es decir, $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ no implica necesariamente que $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (como sucede con los números), y tampoco implica que $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$. Estos hechos se establecieron en la sección 7.3 y se ilustraron con

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Cada una de estas dos matrices tiene rango menor que $n = 2$. Esto es típico y la situación cambia cuando las matrices de $n \times n$ tienen rango n:

Teorema 2 (Ley de cancelación)

Sean **A**, **B**, **C** *matrices de* $n \times n$. *Entonces:*

(a) *Si* rango $\mathbf{A} = n$ *y* $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, *entonces* $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

(b) *Si* rango $\mathbf{A} = n$, *entonces* $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ *implica que* $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. *En consecuencia, si* $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, *pero* $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ *así como* $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, *entonces* rango $\mathbf{A} < n$ *y* rango $\mathbf{B} < n$.

(c) *Si* **A** *es singular, entonces también lo son* **AB** *y* **BA**.

Demostración. **(a)** Ambos miembros de $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ se premultiplican por $\mathbf{A}^{-1}$, cuya existencia se sigue del teorema 1.

(b) Ambos miembros de $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ se premultiplican por $\mathbf{A}^{-1}$.

(c_1) Rango $\mathbf{A} < n$ por el teorema 1. En consecuencia, $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tiene soluciones no triviales, por el teorema 2 de la sección 7.6. Al multiplicar se obtiene $\mathbf{BAx} = \mathbf{0}$. Por tanto, esas soluciones también satisfacen $\mathbf{BAx} = \mathbf{0}$. En consecuencia, rango $(\mathbf{BA}) < n$ por el teorema 2 de la sección 7.6 y $\mathbf{BA}$ es singular por el teorema 1.

(c_2) $\mathbf{A}^T$ es singular por el teorema 1 de la sección 7.5. En consecuencia, $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ es singular por el inciso (c_1). Pero $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{AB})^T$; ver la sección 7.3. Por tanto, $\mathbf{AB}$ es singular por el teorema 1 de la sección 7.5. ∎

Problemas de la sección 7.7

Encontrar la inversa y comprobar el resultado o bien establecer que la inversa no existe, dando una razón.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$

Encontrar la inversa y comprobar el resultado o bien establecer que la inversa no existe, dando una razón.

4. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 6 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & .5 & 2 \\ -8 & 24 & 7 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ -0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & -1.5 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 8 & -8 & 5 \\ 4 & 60 & 29 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 17 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 19 & 2 & -9 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 371 & -76 & -40 \\ 36 & -7 & -4 \\ -176 & 36 & 19 \end{bmatrix}$

16. Demostrar (6).

17. Comprobar (4) y (5) demostrando que $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

18. Demostrar que $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$.

19. Demostrar que la inversa de una matriz simétrica no singular es simétrica.

20. Demostrar que $(\mathbf{A}^2)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^2$. Encontrar $(\mathbf{A}^2)^{-1}$ para la matriz del problema 14.

7.8 DETERMINANTES

Los determinantes se definieron primero para resolver sistemas lineales y, aun cuando ***no son prácticos en los cálculos***,[10] tienen aplicaciones importantes para la ingeniería en problemas de eigenvalores (sección 7.10), ecuaciones diferenciales (capítulos 2, 4), álgebra vectorial (productos vectoriales, triples productos escalares, sección 8.3), etc. Pueden introducirse de varias maneras equivalentes, pero la definición que se da aquí resulta particularmente práctica en relación con esos sistemas.

Un *determinante de n-ésimo orden* es una expresión asociada con una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $n \times n$ (¡y, por consiguiente, cuadrada!), como se explica a continuación empezando con $n = 2$.

Determinantes de segundo orden

Un **determinante de segundo orden** se denota y define por

$$(1) \qquad D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Aquí se usan ***barras*** (mientras que una matriz tiene *corchetes*). Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 14.$$

Esta definición es sugerida por los sistemas

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ &\text{(b)} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned}$$

cuya solución puede escribirse $x_1 = D_1/D$, $x_2 = D_2/D$ con D como en (1) y

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

[10] En el trabajo numérico, usar uno de los métodos de las secciones 7.4, 19.1-19.3; ***no se usa la regla de Cramer*** (ver la sección 7.9).

siempre que $D \neq 0$; estas expresiones se conocen como la **regla de Cramer.**[11] Se sigue de la eliminación convencional. De hecho, para eliminar x_2, se multiplica (2a) por a_{22} y (2b) por $-a_{12}$ y se suma, encontrándose

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \text{por tanto} \quad Dx_1 = D_1.$$

Para eliminar x_1, se multiplica (2a) por $-a_{21}$ y (2b) por a_{11} y se suma, encontrándose

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}, \quad \text{por tanto} \quad Dx_2 = D_2.$$

Ahora se divide entre D (si $D \neq 0$) para obtener x_1 y x_2.

EJEMPLO 1 Uso de determinantes de segundo orden

Si

$$4x_1 + 3x_2 = 12$$
$$2x_1 + 5x_2 = -8,$$

entonces

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 14, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 84, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -56,$$

de donde $x_1 = 84/14 = 6$ y $x_2 = -56/14 = -4$. ∎

Si el sistema (2) es homogéneo ($b_1 = b_2 = 0$) y $D \neq 0$, sólo tiene la solución trivial $x_1 = x_2 = 0$, y si $D = 0$, también tiene soluciones no triviales.

Determinantes de tercer orden

Un **determinante de tercer orden** puede definirse por

$$(3) \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Obsérvese lo siguiente. Los signos en el segundo miembro son $+ - +$. Cada uno de los tres términos del segundo miembro es un elemento de la primera columna de D multiplicado por su "**menor**", es decir, el determinante de segundo orden obtenido al eliminar de D el renglón y la columna de dicho elemento (por tanto, para a_{11} se eliminan el primer renglón y la primera columna, etc.).

[11] GABRIEL CRAMER (1704-1752). Matemático suizo.

Si se desarrollan los menores, se obtiene

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}. \tag{4}$$

Para sistemas lineales de tres ecuaciones en tres incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{5}$$

La **regla de Cramer** es

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} \qquad (D \neq 0) \tag{6}$$

con el "*determinante del sistema*" D dado por (3) y

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Esto podría deducirse por eliminación siguiendo el procedimiento anterior, pero, en vez de ello, la regla de Cramer se establecerá para n general en la siguiente sección.

Determinante de cualquier orden n

Un **determinante de orden n** es un escalar asociado con una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $n \times n$, el cual se escribe

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{7}$$

y se define para $n = 1$ por

(8) $$D = a_{11}$$

y para $n \geq 2$ por

(9a) $$\boxed{D = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jn}C_{jn}} \qquad (j = 1, 2, \cdots, \text{ o } n)$$

o

(9b) $$\boxed{D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk}} \qquad (k = 1, 2, \cdots, \text{ o } n)$$

donde

$$\boxed{C_{jk} = (-1)^{j+k}M_{jk}}$$

y M_{jk} es un determinante de orden $n - 1$, a saber, el determinante de la submatriz de **A** obtenida a partir de **A** eliminando el renglón y la columna del elemento a_{jk} (el j-ésimo renglón y la k-ésima columna). ∎

De este modo, D se define en términos de n determinantes de orden $n - 1$, cada uno de los cuales, a su vez, se define en términos de $n - 1$ determinantes de orden $n - 2$, y así sucesivamente; se llega finalmente a determinantes de segundo orden, en los que esas submatrices constan de elementos individuales cuyo determinante está definido por (8).

A partir de la definición se sigue que *es posible* **desarrollar** *D respecto a cualquier renglón o columna*, es decir, elegir en (9) los elementos de cualquier renglón o columna, procediendo de la misma manera que al desarrollar las C_{jk} de (9) y así sucesivamente.

Esta definición no es ambigua, es decir, da el mismo valor de D sin importar las columnas o renglones que se elijan. En el apéndice 4 se presenta la demostración.

Los términos usados en relación con determinantes se toman de las matrices: en D se tienen n^2 **elementos** o *entradas* a_{jk}, también n **renglones** y n **columnas**, así como una **diagonal principal** en la que se encuentran $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$. Dos nombres son nuevos: M_{jk} se llama el **menor** *de* a_{jk} *en* D y C_{jk} se llama el **cofactor** *de* a_{jk} *en* D.

Para uso posterior, se hace notar que (9) también puede escribirse en términos de menores

(10a) $$D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k}a_{jk}M_{jk} \qquad (j = 1, 2, \cdots, \text{ o } n)$$

(10b) $$D = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k}a_{jk}M_{jk} \qquad (k = 1, 2, \cdots, \text{ o } n).$$

EJEMPLO 2 determinante de segundo orden

Para

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

la fórmula (9) da cuatro posibilidades para desarrollarlo, a saber, por

el primer renglón: $D = a_{11}a_{22} + a_{12}(-a_{21})$,

el segundo renglón: $D = a_{21}(-a_{12}) + a_{22}a_{11}$,

la primera columna: $D = a_{11}a_{22} + a_{21}(-a_{12})$,

la segunda columna: $D = a_{12}(-a_{21}) + a_{22}a_{11}$.

Las cuatro producen el mismo valor $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, el cual concuerda con (1). ∎

EJEMPLO 3 Menores y cofactores de un determinante de tercer orden

En el determinante de tercer orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

los menores son

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

y los cofactores son

$$C_{11} = +M_{11}, \quad C_{12} = -M_{12}, \quad C_{13} = +M_{13},$$

$$C_{21} = -M_{21}, \quad C_{22} = +M_{22}, \quad C_{23} = -M_{23},$$

$$C_{31} = +M_{31}, \quad C_{32} = -M_{32}, \quad C_{33} = +M_{33}.$$

Por tanto, los signos forman un **patrón de tablero de ajedrez**:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

∎

EJEMPLO 4 Un determinante de tercer orden

Sea

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

El desarrollo por el primer renglón es

$$D = 1\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1(12 - 0) - 3(4 + 4) = -12.$$

El desarrollo por la tercera columna es

$$D = 0\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 12 + 0 = -12,$$

etcétera. ∎

EJEMPLO 5 Determinante de una matriz triangular

El determinante de cualquier matriz triangular es igual al producto de todos los elementos de la diagonal principal. Para ver este hecho, hacer el desarrollo por renglones si la matriz es triangular inferior y por columnas si es triangular superior. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 \cdot 5 = -60.$$ ∎

Propiedades generales de los determinantes

A partir de la definición pueden ahora obtenerse con facilidad las propiedades más importantes de los determinantes, como sigue.

Puesto que se obtiene el mismo valor si un determinante se desarrolla por cualquier renglón o cualquier columna, se tiene

Teorema 1 (Transposición)

El valor de un determinante no se altera si sus renglones se escriben como columnas, en el mismo orden.

EJEMPLO 6 Transposición

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -12.$$ ∎

Teorema 2 (Multiplicación por una constante)

Si todos los elementos de un renglón (o una columna) de un determinante se multiplican por el mismo factor k, el valor del nuevo determinante es k veces el valor del determinante dado.

Demostración. Desarrollar el determinante por el renglón (o columna) cuyos elementos se multiplican por k. ∎

¡**Atención!** det $k\mathbf{A} = k^n$ det $\mathbf{A}$ (no k det $\mathbf{A}$). Explicar por qué.

EJEMPLO 7 Aplicación del teorema 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12$$ ∎

Por el teorema 2 con $k = 0$, o por desarrollo directo, se obtiene

Teorema 3

Si todos los elementos de un renglón (o una columna) de un determinante son cero, el valor del determinante es cero.

Teorema 4

Si cada elemento de un renglón (o una columna) de un determinante se expresa como un binomio, el determinante puede escribirse como la suma de dos determinantes.

Demostración. Desarrollar el determinante por el renglón (o columna) cuyos elementos son binomios. ∎

EJEMPLO 8 Ilustración del teorema 4

$$\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ∎

Teorema 5 (Intercambio de renglones y columnas

Si dos renglones (o columnas) cualesquiera de un determinante se intercambian, el valor del determinante se multiplica por −1.

Demostración. La demostración se hace por inducción. Se observa que el teorema es válido para determinantes de orden $n = 2$. Suponiendo que se cumple para determinantes de orden $n - 1$, se demuestra que es válido para determinantes de orden n.

Sea D de orden n y sea que E se obtiene a partir de D intercambiando dos renglones. Desarrollar D y E por un renglón que no sea uno de los que se han intercambiado, llámese el j-ésimo renglón. Entonces, por (10a),

$$D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk}, \qquad E = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} N_{jk} \tag{11}$$

donde N_{jk} se obtiene a partir del menor M_{jk} de a_{jk} en D al intercambiar dos renglones. Como estos menores son de orden $n - 1$, la hipótesis de inducción es válida y de ella se obtiene $N_{jk} = -M_{jk}$. En consecuencia, $E = -D$ por (11). Se demuestra así el enunciado para los *renglones*. Para demostrarlo para las *columnas*, se aplica el teorema 1. ∎

EJEMPLO 9 Intercambio de dos renglones

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12$$ ∎

Teorema 6 (Renglones o columnas proporcionales)

Si los elementos correspondientes de dos renglones (o dos columnas) de un determinante son proporcionales, el valor del determinante es cero.

Demostración. Sean proporcionales los elementos de los renglones i-ésimo y j-ésimo de D, por ejemplo, $a_{jk} = ca_{ik}$, $k = 1, \cdots, n$. Si $c = 0$, entonces $D = 0$. Sea ahora $c \neq 0$. Por el teorema 2,

$$D = cB$$

donde los renglones i-ésimo y j-ésimo de B son idénticos. Se intercambian estos renglones. Entonces B pasa a ser $-B$, por el teorema 5. Por otra parte, como los renglones son idénticos, el nuevo determinante sigue siendo B. Por tanto, $B = -B$, $B = 0$ y $D = 0$. ∎

EJEMPLO 10 Renglones proporcionales

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ -6 & -12 & 8 \end{vmatrix} = 0$$ ∎

Teorema 7 (Adición de un renglón o una columna)

El valor de un determinante se mantiene invariable si los elementos de un renglón (o columna) se altera sumándole cualquier múltiplo constante de los elementos correspondientes de cualquier otro renglón (o columna, respectivamente).

Demostración. Se aplica el teorema 4 al determinante que resulta de la adición dada. Se obtiene así una suma de dos determinantes; uno es el determinante original y el

otro contiene dos renglones proporcionales. De acuerdo con el teorema 6, el segundo determinante es cero y se termina así la demostración. ∎

El teorema 7 indica que un determinante puede evaluarse creando primero ceros como en la eliminación de Gauss (sección 7.4), un método que puede programarse con facilidad.[12] Se explica en términos de un ejemplo.

EJEMPLO 11 Evaluación de un determinante por reducción a la "forma triangular"

Las explicaciones de los cálculos, como "Renglón 2 – 2 Renglón 1", se refieren siempre al determinante precedente; se colocan en seguida del renglón donde queda el resultado.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & 10 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \text{Renglón 2} - 2\ \text{Renglón 1} \\ \\ \text{Renglón 4} + 1.5\ \text{Renglón 1} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2.4 & 3.8 \\ 0 & 0 & -11.4 & 29.2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{Renglón 3} - 0.4\ \text{Renglón 2} \\ \text{Renglón 4} - 1.6\ \text{Renglón 2} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2.4 & 3.8 \\ 0 & 0 & 0 & 47.25 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{Renglón 4} + 4.75\ \text{Renglón 3} \end{matrix}$$

$$= 2 \times 5 \times 2.4 \times 47.25 = 1134.$$

Al trabajar con lápiz y papel, se escriben los determinantes de órdenes inferiores cuando aparecen, en vez de llevar ceros,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = 2\begin{vmatrix} 5 & 9 & -12 \\ 2 & 6 & -1 \\ 8 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \cdots = 10\begin{vmatrix} 2.4 & 3.8 \\ -11.4 & 29.2 \end{vmatrix} = 1134. \blacksquare$$

[12] En casos específicos, seleccionar renglones o columnas por inspección puede ahorrar trabajo (por ejemplo, con calculadoras de mano), un arte en el que hacen hincapié los textos anticuados hasta la fecha.

Para los determinantes de productos de matrices, hay una fórmula muy útil que tiene varias aplicaciones. En la siguiente sección se dará una demostración de esta fórmula.

Teorema 8 (Determinante de un producto de matrices)

Para cualesquiera matrices **A** *y* **B** *de* $n \times n$,

$$\boxed{\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.} \tag{12}$$

EJEMPLO 12 Ilustración del teorema 8

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 10 & 14 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 18 \\ 46 & 10 & 76 \\ 29 & 7 & 49 \end{vmatrix} \qquad \blacksquare$$

Si los elementos de una matriz cuadrada son escalares (números), también lo es el determinante. Si son funciones, también lo es el determinante y en este último caso ocasionalmente se necesita el siguiente teorema, que puede obtenerse por la regla del producto.

Teorema 9 (Derivada de un determinante)

La derivada D' de un determinante D de orden n cuyos elementos son funciones derivables puede escribirse

$$D' = D_{(1)} + D_{(2)} + \cdots + D_{(n)} \tag{13}$$

donde $D_{(j)}$ se obtiene a partir de D derivando los elementos del j-ésimo renglón.

EJEMPLO 13 Derivada de un determinante de tercer orden

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f & g & h \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f' & g' & h' \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g & h \\ p' & q' & r' \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g & h \\ p & q & r \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} \qquad \blacksquare$$

Problemas de la sección 7.8

Evaluar

1. $\begin{vmatrix} 17 & 9 \\ -4 & 13 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} \cos n\theta & \operatorname{sen} n\theta \\ -\operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 4.3 & 0.7 \\ 0.8 & -9.2 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1.0 & 0.2 & 1.6 \\ 3.0 & 0.6 & 1.2 \\ 2.0 & 0.8 & 0.4 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 15 & 3 & 6 \\ 10 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 16 & 22 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 12 & 25 & 2 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1.1 & 8.7 & 3.6 \\ 0 & 9.1 & -1.7 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 \\ 9 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} -6 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & 2 & 4 \\ -7 & 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

Evaluar

13. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 9 & 9 \\ -8 & 3 & 5 & -4 \\ -8 & 0 & -2 & -8 \\ -16 & 6 & 14 & -5 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & 1 & 11 \\ 4 & 4 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

16. Demostrar que det $(k\mathbf{A}) = k^n$ det **A** (*no k* det **A**), donde **A** es cualquier matriz de $n \times n$.
17. Escribir el producto de los determinantes de los problemas 5 y 6 como un determinante.
18. Hacer lo mismo que en el problema 17, pero tomando los determinantes en orden inverso.
19. Comprobar que la respuesta del problema 11 es igual al producto de los determinantes de las submatrices de 2×2 que no contienen ningún elemento cero. Explicar por qué.
20. Demostrar que la recta que pasa por dos puntos P_1: (x_1, y_1) y P_2: (x_2, y_2) en el plano xy está dada por la fórmula (a) (siguiente) y deducir a partir de (a) la conocida fórmula (b).

$$\text{(a)} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(b)} \quad \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

7.9 EL RANGO EN TÉRMINOS DE DETERMINANTES. REGLA DE CRAMER

En esta sección se demuestra primero que el rango de una matriz **A** (definido como el número máximo de vectores renglón o columna de **A** linealmente independientes; ver la sección 7.5) también puede caracterizarse en términos de determinantes. Esta notable propiedad se usa con frecuencia para *definir* el rango. Se formula lo anterior como sigue, suponiendo que rango **A** > 0 (ya que rango **A** = 0 si y sólo si **A** = **0**; ver sección 7.5).

Teorema 1 (Rango en términos de determinantes)

Una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $m \times n$ *tiene rango* $r \geq 1$ *si y sólo si* **A** *tiene una submatriz de* $r \times r$ *con determinante diferente de cero, en tanto que el determinante de cualquier submatriz cuadrada con* $r + 1$ *o más renglones de los que* **A** *tiene (¡o no tiene!) es cero.*

En particular, si **A** *es una matriz cuadrada,* **A** *es no singular, por lo que la inversa* $\mathbf{A}^{-1}$ *de* **A** *existe si y sólo si*

$$\det \mathbf{A} \neq 0.$$

Demostración. La clave está en el hecho de que las operaciones elementales sobre los renglones (sección 7.4) que no alteran el rango (por el teorema 3 de la sección 7.5) tampoco alteran la propiedad de un determinante de ser cero o diferente de cero, ya que el determinante se multiplica por

(i) -1 si se intercambian dos renglones (teorema 5, sección 7.8),
(ii) $c \neq 0$ si se multiplica un renglón por $c \neq 0$ (teorema 2, sección 7.8).
(iii) 1 si se suma un múltiplo de un renglón a otro renglón (teorema 7, sección 7.8).

Sea que $\hat{\mathbf{A}}$ que denota la forma escalonada de **A** (ver la sección 7.4). $\hat{\mathbf{A}}$ tiene r vectores renglón diferentes de cero (que son los r primeros vectores renglón) si y sólo si rango $\mathbf{A} = r$. Sea $\hat{\mathbf{R}}$ la submatriz de $r \times r$ de $\hat{\mathbf{A}}$ que consta de los r^2 elementos que se encuentran simultáneamente en los r primeros renglones y en las r primeras columnas de $\hat{\mathbf{A}}$. Puesto que $\hat{\mathbf{R}}$ es triangular y tiene todos los elementos de la diagonal principal diferentes de cero, det $\hat{\mathbf{R}} \neq 0$. Puesto que $\hat{\mathbf{R}}$ se obtiene a partir de de la submatriz **R** de $r \times r$ de **A** mediante operaciones elementales, se tiene $\mathbf{R} \neq 0$. De manera similar, det $\mathbf{S} = 0$ para una submatriz cuadrada de $\hat{\mathbf{S}}$ de $r + 1$ o más renglones posiblemente contenidos en **A**, ya que la correspondiente submatriz **S** de $\hat{\mathbf{A}}$ contiene un renglón de ceros, por lo que det $\hat{\mathbf{S}} = 0$ por el teorema 3 de la sección 7.8. Con esto se demuestra el enunciado del teorema para una matriz de $m \times n$.

Si **A** es cuadrada, por ejemplo, una matriz de $n \times n$, el enunciado que acaba de demostrarse implica que rango $\mathbf{A} = n$ si y sólo si **A** tiene una submatriz de $n \times n$ con un determinante diferente de cero; pero esta submatriz es la propia **A**, de donde $\det \mathbf{A} \neq 0$. ∎

Usando este teorema, a continuación se deducirá la regla de Cramer, con la cual se obtienen las soluciones de sistemas lineales como cocientes de determinantes. ***La regla de Cramer no es práctica en los cálculos*** (para los que los métodos de las secciones 7.4 y 19.1-19-3 son adecuados), pero es de ***interés teórico*** en ecuaciones diferenciales (sección 3.5) en otras teorías que tienen aplicaciones en la ingeniería.

Teorema 2 Teorema de Cramer (Solución de sistemas lineales por determinantes)

(a) *Si el determinante* $D = \det \mathbf{A}$ *de un sistema lineal de n ecuaciones*

$$(1) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

en el mismo número de incógnitas $x_1, \cdots, x_n$ es diferente de cero, el sistema tiene exactamente una solución. Esta solución está dada por las fórmulas

$$(2) \qquad \boxed{x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}} \qquad \textbf{(regla de Cramer)}$$

donde D_k es el determinante obtenido a partir de D al sustituir la k-ésima columna de D por la columna con los elementos $b_1, \cdots, b_n$.

(b) *Por tanto, si* (1) *es* ***homogéneo*** *y $D \neq 0$, únicamente tiene la solución trivial $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$. Si $D = 0$, el sistema homogéneo también tiene soluciones no triviales.*

Demostración. Por el teorema 1 y el teorema fundamental de la sección 7.6 se sigue que (1) tiene una solución única, ya que si

$$(3) \qquad D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces rango $\mathbf{A} = n$. Se demuestra (2). Al desarrollar D por la k-ésima columna se obtiene

$$(4) \qquad D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk},$$

donde C_{ik} es el cofactor del elemento a_{ik} de D. Si se sustituyen los elementos de la k-ésima columna de D por otros números cualesquiera, se obtiene un nuevo determinante, por ejemplo, $\tilde{D}$. Evidentemente, su desarrollo por la k-ésima columna será de la forma (4) con $a_{ik}, \cdots, a_{nk}$ sustituidos por los nuevos números y los cofactores C_{ik} como antes. En particular, si se elige como nuevos números los elementos $a_{1l}, \cdots, a_{nl}$ de la l-ésima columna de D (donde $l \neq k$), entonces el desarrollo del determinante $\tilde{D}$ resultante queda

$$(5) \qquad a_{1l}C_{1k} + a_{2l}C_{2k} + \cdots + a_{nl}C_{nk} = 0 \qquad (l \neq k)$$

ya que $\tilde{D}$ tiene dos columnas idénticas y es cero (por el teorema 6 de la sección 7.8). Si la primera ecuación de (1) se multiplica por C_{1k}, la segunda por $C_{2k}, \cdots$, la última por C_{nk} y se suman las ecuaciones resultantes, se obtiene en primera instancia

$$C_{1k}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + C_{nk}(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)$$
$$= b_1C_{1k} + \cdots + b_nC_{nk}.$$

Al agrupar los términos con la misma x, el primer miembro puede escribirse como

$$x_1(a_{11}C_{1k} + \cdots + a_{n1}C_{nk}) + \cdots + x_n(a_{1n}C_{1k} + \cdots + a_{nn}C_{nk}).$$

En esta expresión se observa que x_k está multiplicada por

$$a_{1k}C_{1k} + \cdots + a_{nk}C_{nk},$$

que es igual a D por (4), y que x_l está multiplicada por

$$a_{1l}C_{1k} + \cdots + a_{nl}C_{nk},$$

que es cero por (5) cuando $l \neq k$. Por tanto el primer miembro es igual a $x_k D$ y se tiene

$$x_k D = b_1 C_{1k} + \cdots + b_n C_{nk}.$$

El segundo miembro es D_k (según se definió en el teorema) desarrollado por su k-ésima columna. Al dividir entre D ($\neq 0$) se obtiene (2).

Si (1) es homogéneo y $D \neq 0$, entonces cada D_k tiene una columna de ceros, de donde $D_k = 0$, por el teorema 3 de la sección 7.8, y (2) da como resultado la solución trivial.

Por último, si (1) es homogéneo y $D = 0$, entonces rango $\mathbf{A} < n$ por el teorema 1, por lo que existen soluciones no triviales por el teorema 2 de la sección 7.6. ∎

Se incluye un ejemplo en la sección 7.8 (ejemplo 1).

Como una consecuencia importante del teorema de Cramer, ahora los elementos de la inversa de una matriz pueden expresarse de la siguiente manera.

Teorema 3 (Inversa de una matriz)

La inversa de una matriz no singular $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $n \times n$ *está dada por*

$$(6) \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} [A_{jk}]^{\mathsf{T}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

donde A_{jk} *es el cofactor de* a_{jk} *en* $\det \mathbf{A}$ (ver la sección 7.8). *Obsérvese bien que en* $\mathbf{A}^{-1}$, *el cofactor* A_{jk} *ocupa el mismo lugar que* a_{kj} *(no* a_{jk}*) en* $\mathbf{A}$.

Demostración. El segundo miembro de (6) se denota por $\mathbf{B}$ y se demuestra que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Se escribe

$$(7) \qquad \mathbf{BA} = \mathbf{G} = [g_{kl}].$$

Aquí, por la definición de multiplicación de matrices y por la forma de los elementos de **B** como en (6),

$$g_{kl} = \sum_{s=1}^{n} \frac{A_{sk}}{\det \mathbf{A}} a_{sl} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (a_{1l}A_{1k} + \cdots + a_{nl}A_{nk}). \tag{8}$$

Ahora (3) y (4) (con C_{jk} escrito en la notación presente A_{jk}) indican que la suma $(\cdots)$ del segundo miembro es $D = \det \mathbf{A}$ cuando $l = k$ y cero cuando $l \neq k$. Por tanto,

$$g_{kk} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det \mathbf{A} = 1, \qquad g_{kl} = 0 \quad (l \neq k),$$

de donde $\mathbf{G} = [g_{kl}] = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ en (7). De manera similar, $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$. Por tanto, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. ∎

La fórmula explícita (6) suele ser útil en estudios teóricos, por oposición a los *métodos para **calcular** realmente inversas* (ver la sección 7.7).

EJEMPLO 1 Ilustración del teorema 3

Usando (6), encontrar la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución. Se obtiene $\det \mathbf{A} = -1(-7) - 13 + 2 \cdot 8 = 10$, y en (6),

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

de donde por (6), en concordancia con el ejemplo 1 de la sección 7.7,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}.$$

∎

Mediante la aplicación del teorema 1 ahora también es posible demostrar el teorema sobre los determinantes de productos de matrices (teorema 8 de la sección 7.8), el cual se reformula primero.

Teorema 4 (Determinante de un producto de matrices)

Para cualesquiera matrices **A** *y* **B** de $n \times n$,

$$\text{(9)} \qquad \boxed{\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.}$$

Demostración. Si **A** es singular, también lo es **AB** por el teorema 2(c) de la sección 7.7. Se tiene por tanto det **A** = 0, det (**AB**) = 0, por el teorema 1, y (9) es 0 = 0, que es una verdadera.

Sea **A** no singular. Entonces **A** puede reducirse a una matriz diagonal $\hat{\mathbf{A}} = [\hat{a}_{jk}]$ por los pasos de Gauss-Jordan (sección 7.7). Bajo estas operaciones, det **A** conserva su valor, por el teorema 7 de la sección 7.8, con la posible excepción de un signo invertido si es necesario intercambiar dos renglones para obtener un pivote diferente de cero (ver el teorema 5 de la sección 7.8). Pero las mismas operaciones reducen **AB** a $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{B}$ con el mismo efecto sobre det (**AB**). En consecuencia, sólo falta demostrar (9) para $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{B}$; haciendo el desarrollo

$$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{a}_{22} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{a}_{11}b_{11} & \hat{a}_{11}b_{12} & \cdots & \hat{a}_{11}b_{1n} \\ \hat{a}_{22}b_{21} & \hat{a}_{22}b_{22} & \cdots & \hat{a}_{22}b_{2n} \\ & & \vdots & \\ \hat{a}_{nn}b_{n1} & \hat{a}_{nn}b_{n2} & \cdots & \hat{a}_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Se toma ahora el determinante det ($\hat{\mathbf{A}}\mathbf{B}$). En el segundo miembro puede sacarse un factor $\hat{a}_{11}$ del primer renglón, $\hat{a}_{22}$ del segundo, $\cdots$, $\hat{a}_{nn}$ del n-ésimo. Pero este producto $\hat{a}_{11}\hat{a}_{22}\cdots\hat{a}_{nn}$ es igual a det $\hat{\mathbf{A}}$, ya que $\hat{\mathbf{A}}$ es diagonal. El determinante que queda es det **B**, y (9) está demostrada. ∎

Concluye de este modo la discusión de los sistemas lineales (secciones 7.4-7.9). (Para los métodos numéricos, ver las secciones 19.1-19.4, que son independientes de las demás secciones sobre métodos numéricos.) Empezando con la sección 7.10, se abordan los *problemas de eigenvalores*, cuya importancia en la ingeniería y la física difícilmente puede sobreestimarse.

Problemas de la sección 7.9

Usando el teorema 1, encontrar el rango de las siguientes matrices.

1. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 30 & -70 & 50 \\ -36 & 84 & -60 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0.4 & 2.0 \\ 3.2 & 1.6 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 21 & -3 & 17 & 13 \\ 46 & 11 & 52 & 14 \\ 33 & 48 & 71 & -23 \end{bmatrix}$

Usando el teorema 3, encontrar la inversa. Comprobar las respuestas.

7. $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & -0.8 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} \cos 3\theta & \operatorname{sen} 3\theta \\ -\operatorname{sen} 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 15 & -6 & 5 \\ -5 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 0 & -0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 19 & 2 & -9 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resolver por la regla de Cramer y por la eliminación de Gauss:

16. $\begin{aligned} 4x - y &= 3 \\ -2x + 5y &= 21 \end{aligned}$ **17.** $\begin{aligned} -x + 3y - 2z &= 7 \\ 3x \qquad + 3z &= -3 \\ 2x + y + 2z &= -1 \end{aligned}$ **18.** $\begin{aligned} 2x + 5y + 3z &= 1 \\ -x + 2y + z &= 2 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$

19. Usando $\mathbf{A}^{1}$ como se da en (6), demostrar que $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.

20. Obtener (4) y (5) de la sección 7.7 a partir del teorema 3 de esta sección.

21. Demostrar que el producto de dos matrices de $n \times n$ es singular si y sólo si al menos una de ellas es singular.

Aplicaciones geométricas. Usando el teorema de Cramer, inciso (b), demostrar que:

22. El **plano que pasa por tres puntos** (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) en el espacio está dado por la fórmula que se da a continuación.

23. La **circunferencia que pasa por tres puntos** (x_1, y_1), (x_2, y_2),(x_3, y_3) en el plano está dada por la fórmula que se da a continuación.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Problema 22

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Problema 23

24. Encontrar el plano que pasa por (1, 1, 1), (5, 0, 5), (3, 2, 6).

25. Encontrar la circunferencia que pasa por (2, 6), (6, 4), (7, 1).

7.10 EIGENVALORES, EIGENVECTORES

Desde el punto de vista de las aplicaciones de ingeniería, los problemas de eigenvalores se encuentran entre los problemas más importantes relacionados con matrices y el estudiante deberá seguir con especial atención la presente discusión. Se definen primero los conceptos básicos y se explican en términos de ejemplos típicos. Después se pasará a las aplicaciones prácticas.

Sea $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ una matriz de $n \times n$ dada y considérese la ecuación vectorial

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{1}$$

donde λ es un número.

Es evidente que el vector cero $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es una solución de (1) para cualquier valor de λ. Un valor de λ para el que (1) tiene una solución $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ se denomina **eigenvalor**[13] o **valor característico** (o *raíz latente*) de la matriz **A**. Las soluciones correspondientes $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ de (1) se llaman **eigenvectores** o **vectores característicos** de **A** que corresponden a ese eigenvalor λ. Al conjunto de los eigenvalores se le llama el **espectro** de **A**. Al mayor de los valores absolutos de los eigenvalores de **A** se le llama el **radio espectral** de **A**.

El conjunto de todos los eigenvectores que corresponden a un eigenvalor de **A**, junto con **0**, forma un espacio vectorial (sección 7.5), llamado **eigenespacio** de **A** correspondiente a este eigenvalor.

El problema de determinar los eigenvalores y eigenvectores de una matriz se conoce como *problema de eigenvalores*.[14] Los problemas de este tipo se presentan en relación con aplicaciones físicas y técnicas, como se verá.

Cómo encontrar eigenvalores y eigenvectores

El siguiente ejemplo ilustra todos los pasos.

EJEMPLO 1 Determinación de eigenvalores y eigenvectores

Encontrar los eigenvalores y eigenvectores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Solución. **(a)** ***Eigenvalores.*** Éstos deben determinarse ***primero***. La ecuación (1) es

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

[13] Del alemán: *Eigenwert*: "*eigen*" significa "propio"; "*wert*" significa "valor".

[14] Con mayor precisión, problema *algebraico* de eigenvalores, ya que hay otros problemas de eigenvalores en los que interviene una ecuación diferencial (ver las secciones 5.8 y 11.3) o una ecuación integral.

escrita en forma de componentes,

$$-5x_1 + 2x_2 = \lambda x_1$$
$$2x_1 - 2x_2 = \lambda x_2.$$

Al pasar los términos del segundo miembro al primero se obtiene

$$(2^*) \qquad \begin{aligned} (-5-\lambda)x_1 + \quad 2x_2 \quad &= 0 \\ 2x_1 \quad + (-2-\lambda)x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Esta expresión puede escribirse en notación de matrices

$$(3^*) \qquad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

[De hecho, (1) es $\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{Ix} = 0$, cuyo resultado es (3).] Se observa que este es un sistema lineal *homogéneo*. Por el teorema de Cramer de la sección 7.9 tiene una solución no trivial $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (un eigenvector de **A** que se está buscando) si y sólo si el determinante de sus coeficientes es cero,

$$(4^*) \qquad \begin{aligned} D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0. \end{aligned}$$

A $D(\lambda)$ se le llama el **determinante característico** o, si se desarrolla, el **polinomio característico**, y a $D(\lambda) = 0$ la **ecuación característica** de **A**. Las soluciones de esta ecuación cuadrática son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -6$. Estos son los eigenvalores de **A**.

(b_1) Eigenvector de **A** *correspondiente a* λ_1. Este vector se obtiene a partir de (2*) con $\lambda = \lambda_1 = -1$, es decir,

$$-4x_1 + 2x_2 = 0$$
$$2x_1 - x_2 = 0.$$

Una solución es x_1 arbitraria, $x_2 = 2x_1$. Si se elige $x_1 = 1$, entonces $x_2 = 2$ y un eigenvector de **A** correspondiente a $\lambda_1 = -1$ es

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Es sencillo comprobar esto:

$$\mathbf{Ax}_1 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1)\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1.$$

(b_2) Eigenvector de **A** *correspondiente a* λ_2. Para $\lambda = \lambda_2 = -6$, la ecuación (2*) queda

$$x_1 + 2x_2 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 = 0.$$

Una solución es $x_2 = -x_1/2$. Si se elige $x_1 = 2$, se obtiene $x_2 = -1$ y un eigenvector de **A** correspondiente a $\lambda_2 = -6$ es

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Comprobar este resultado. ∎

Este ejemplo ilustra el caso general como sigue. La ecuación (1) escrita en forma de componentes es

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2 \\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n.
\end{aligned}
$$

Al pasar los términos del segundo miembro al primero, se tiene

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0.
\end{aligned}
$$

En notación de matrices,

$$
(3) \qquad \boxed{(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}.}
$$

Por el teorema de Cramer de la sección 7.9, este sistema lineal de ecuaciones homogéneo tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante de los coeficientes correspondiente es cero:

$$
(4) \qquad D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.
$$

A $D(\lambda)$ se le llama el **determinante característico** y (4) se conoce como la **ecuación característica** correspondiente a la matriz **A**. Al desarrollar $D(\lambda)$ se obtiene un polinomio de n-ésimo grado en λ. Se le llama el **polinomio característico** correspondiente a **A**.

Con esto se demuestra el importante teorema siguiente.

Teorema 1 (Eigenvalores)

Los eigenvalores de una matriz cuadrada **A** *son las raíces de la ecuación característica* (4) *correspondiente.*

Por tanto, una matriz de $n \times n$ tiene al menos un eigenvalor y a lo sumo n eigenvalores numéricamente diferentes.

Para valores grandes de n, los cálculos reales de eigenvalores en general requerirán del uso del método de Newton (sección 18.2) u otro método de aproximación numérica de las secciones 19.7-19.10. En ocasiones también puede resultar útil observar que el producto y la suma de los eigenvalores son el término constante y $(-1)^{n-1}$ veces el coeficiente del segundo término mayor, respectivamente, del polinomio característico (¿por qué?). Una vez que se ha encontrado un eigenvalor λ_1, el polinomio característico puede dividirse entre $\lambda - \lambda_1$.

Los eigen*valores* deben determinarse primero. Una vez que se conocen, los eigen*vectores* correspondientes se obtienen a partir del sistema (2), por ejemplo, por el método de eliminación de Gauss, donde λ es el eigenvalor del que se quiere un eigenvector. Esto es lo que se hizo en el ejemplo 1 y se hará nuevamente en los ejemplos subsecuentes.

Teorema 2 (Eigenvectores)

Si $\mathbf{x}$ *es un eigenvector de una matriz* $\mathbf{A}$ *correspondiente a un eigenvalor* λ, *también lo es* $k\mathbf{x}$ *con cualquier* $k \neq 0$.

Demostración. $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ implica que $k(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}(k\mathbf{x}) = \lambda(k\mathbf{x})$. ∎

Los ejemplos 2 y 3 ilustrarán que una matriz de $n \times n$ puede tener n eigenvectores linealmente independientes[15], o puede tener un número menor que n. En el ejemplo 4 se verá que una matriz *real* puede tener eigenvalores y eigenvectores *complejos*.

EJEMPLO 2 Eigenvalores múltiples

Encontrar los eigenvalores y eigenvectores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución. Para la matriz considerada, el determinante característico da lugar a la ecuación característica

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0.$$

Las raíces (eigenvalores de $\mathbf{A}$) son $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$. Para encontrar los eigenvectores se aplica la eliminación de Gauss (sección 7.4) al sistema $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, primero con $\lambda = 5$ y después con $\lambda = -3$. Se encuentra que el vector

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

es un eigenvector de $\mathbf{A}$ que corresponde al eigenvalor 5, y los vectores

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[15] Propiedad que se usará en la sección 7.14.

son dos eigenvectores de **A** linealmente independientes que corresponden al eigenvalor -3. Esto concuerda con el hecho de que, para $\lambda = -3$, la matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ tiene rango 1 y entonces, por el teorema 2 de la sección 7.6, una base de soluciones del sistema (2) correspondiente con $\lambda = -3$,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

se compone de dos vectores linealmente independientes. ∎

Si un eigenvalor λ de una matriz **A** es una raíz de orden M_λ del polinomio característico de **A**, entonces a M_λ se le llama la **multiplicidad algebraica** de λ, por oposición a la **multiplicidad geométrica** m de λ_1, la cual se define como el número de eigenvectores linealmente independientes correspondientes a λ y, por tanto, a la dimensión del eigenespacio correspondiente. Puesto que el polinomio característico tiene grado n, la suma de todas las multiplicidades algebraicas es igual a n. En el ejemplo 2, para $\lambda = -3$ se tiene $m_\lambda = M_\lambda = 2$. En general, $m_\lambda \leqq M_\lambda$, como puede demostrarse. A continuación se convencerá el lector de que es posible $m_\lambda < M_\lambda$:

EJEMPLO 3 Multiplicidad algebraica y geométrica

La ecuación característica de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0.$$

Por tanto, $\lambda = 0$ es un eigenvalor de multiplicidad algebraica 2. Pero su multiplicidad geométrica es sólo 1, ya que resultan eigenvectores de $-0x_1 + x_2 = 0$, por tanto $x_2 = 0$, en la forma $[x_1 \;\; 0]^T$. ∎

EJEMPLO 4 Matrices reales con eigenvalores y eigenvectores complejos

Puesto que los polinomios reales pueden tener raíces complejas (las cuales en tal caso se presentan en pares conjugados), una matriz real puede tener eigenvalores y eigenvectores complejos. Por ejemplo, la ecuación característica de la matriz antisimétrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

y da lugar a los eigenvalor $\lambda_1 = i(=\sqrt{-1})$, $\lambda_2 = -i$. Los eigenvectores se obtienen a partir de $-ix_1 + x_2 = 0$ e $ix_1 + x_2 = 0$, respectivamente, y puede elegirse $x_1 = 1$ para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

El lector puede demostrar que, en términos más generales, estos vectores son eigenvectores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \qquad (a, b \text{ reales})$$

y que **A** tiene los eigenvalores $a + ib$ y $a - ib$. ∎

Una vez conseguida una primera impresión de los problemas de eigenvalores de matrices, en la siguiente sección se ilustra su importancia mediante algunas aplicaciones típicas.

Problemas de la sección 7.10

Encontrar los eigenvalores y eigenvectores de las siguientes matrices:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 6 & 10 & 6 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} 32 & -24 & -8 \\ 16 & -11 & -4 \\ 72 & -57 & -18 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -15 \\ -3 & -4 & 9 \\ 5 & 0 & -15 \end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Algunas propiedades generales del espectro. Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ los eigenvalores de una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ dada. En cada caso, demostrar la preposición e ilustrarla con un ejemplo.

22. **(Traza)** La llamada *traza* de **A**, dada por traza $\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$, es igual a $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. El término constante de $D(\lambda)$ es igual a det **A**.

23. Si **A** es real, los eigenvalores son reales o complejos conjugados en pares.

24. **(Inversa)** La inversa $\mathbf{A}^{-1}$ existe si y sólo si $\lambda_j \neq 0$ $(j = 1, \cdots, n)$.

25. La inversa $\mathbf{A}^{-1}$ tiene los eigenvalores $1/\lambda_1, \cdots, 1/\lambda_n$.

26. **(Matriz triangular)** Si **A** es triangular, los elementos de la diagonal principal son los eigenvalores de **A**.

27. **("Desplazamiento espectral")** La matriz $\mathbf{A} - k\mathbf{I}$ tiene los eigenvalores $\lambda_1 - k, \cdots, \lambda_n - k$.

28. La matriz $k\mathbf{A}$ tiene los eigenvalores $k\lambda_1, \cdots, k\lambda_n$.

29. La matriz $\mathbf{A}^m$ (donde m es un entero no negativo) tiene los eigenvalores $\lambda_1^m, \cdots, \lambda_n^m$.

30. **(Teorema de la aplicación mapeo-espectral)** La matriz

$$k_m\mathbf{A}^m + k_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + k_1\mathbf{A} + k_0\mathbf{I},$$

que se llama **matriz polinómica**, tiene los eigenvalores

$$k_m\lambda_j^m + k_{m-1}\lambda_j^{m-1} + \cdots + k_1\lambda_j + k_0 \quad (j = 1, \cdots, n).$$

(Este enunciado se conoce como el *teorema de mapeo espectral para matrices polinómicas.*) los eigenvectores de esa matriz son los mismos que los de **A**.

7.11 ALGUNAS APLICACIONES DE PROBLEMAS DE EIGENVALORES

En esta sección se discuten algunos ejemplos típicos del rango de aplicaciones de los problemas de eigenvalores de matrices, el cual es increíblemente numeroso. En el capítulo 4 se indica que los problemas de eigenvalores de matrices se relacionan con ecuaciones diferenciales que gobiernan sistemas mecánicos y redes eléctricas. A fin de mantener independiente de dicho capítulo la discusión presente, para los estudiantes que no estén familiarizados con el capítulo 4 se incluye una aplicación típica de esa clase como el último ejemplo.

EJEMPLO 1 Estiramiento de una membrana elástica

Una membrana elástica en el plano x_1x_2 cuya frontera es la circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (figura 136) se estira de tal modo que un punto P: (x_1, x_2) pasa al punto Q: (y_1, y_2) dado por

$$(1) \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \text{en forma de componentes,} \quad \begin{aligned} y_1 &= 5x_1 + 3x_2 \\ y_2 &= 3x_1 + 5x_2. \end{aligned}$$

Encontrar las "*direcciones principales*", es decir, las direcciones del vector de posición **x** de P para las que la dirección del vector de posición **y** de Q es la misma o exactamente opuesta. ¿Qué forma asume la circunferencia fronteriza bajo esta deformación?

Solución. Se buscan los vectores **x** tales que $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$. Puesto que $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, se obtiene $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, una ecuación de la forma (1), un problema de eigenvalores. En componentes, $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ es

$$(2) \qquad \begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= \lambda x_1 \\ 3x_1 + 5x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} (5-\lambda)x_1 + \qquad 3x_2 &= 0 \\ 3x_1 + (5-\lambda)\,x_2 &= 0. \end{aligned}$$

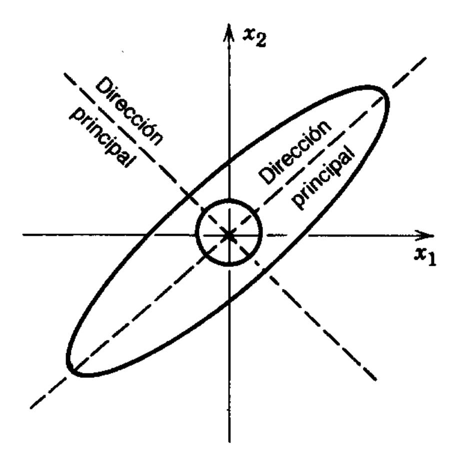


Figura 136. Membrana sin deformar y deformada en el ejemplo 1.

La ecuación característica es

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9 = 0.$$

Sus soluciones son $\lambda_1 = 8$ y $\lambda_2 = 2$. Estos son los eigenvalores del problema en cuestión. Para $\lambda = \lambda_1 = 8$ el sistema (2) queda

$$\begin{aligned} -3x_1 + 3x_2 &= 0, \\ 3x_1 - 3x_2 &= 0. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{Solución } x_2 = x_1, \quad x_1 \text{ arbitraria,} \\ &\text{por ejemplo, } x_1 = x_2 = 1. \end{aligned}$$

Para $\lambda_2 = 2$, el sistema (2) queda

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 &= 0. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{Solución } x_2 = -x_1, \quad x_1 \text{ arbitraria,} \\ &\text{por ejemplo, } x_1 = 1, x_2 = -1. \end{aligned}$$

Se obtienen así como eigenvectores de **A**, por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ correspondiente a } \lambda_1; \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ correspondiente a } \lambda_2;$$

(o un múltiplo escalar diferente de cero de ellos). Estos vectores forman ángulos de 45° y 135° con la dirección x_1 positiva. Dan las direcciones principales, la respuesta al problema dado. Los eigenvalores indican que en las direcciones principales la membrana se estira por factores 8 y 2, respectivamente; ver la figura 136.

Por consiguiente, si se eligen las direcciones principales como las direcciones de un nuevo sistema de coordenadas cartesianas u_1u_2, por ejemplo, con el semieje u_1 positivo en el primer cuadrante y el semieje u_2 positivo en el segundo cuadrante del sistema x_1x_2, y si se hace

$$u_1 = r\cos\phi, \qquad u_2 = r \operatorname{sen}\phi,$$

entonces un punto frontera de la membrana circular sin estirar tiene coordenadas $\cos\phi$, $\operatorname{sen}\phi$. Por tanto, después del estiramiento se tiene

$$z_1 = 8\cos\phi, \qquad z_2 = 2\operatorname{sen}\phi.$$

Puesto que $\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi = 1$, se demuestra así que el contorno deformado es una elipse (figura 136)

$$\frac{z_1^2}{8^2} + \frac{z_2^2}{2^2} = 1$$

con semiejes principales 8 y 2 en las direcciones principales. ∎

EJEMPLO 2 Problemas de eigenvalores que surgen de procesos de Markov

Como otra aplicación, se mostrará que los procesos de Markov también llevan a problemas de eigenvalores. Para ver esto, se determinará el estado límite de la sucesión del uso del suelo del ejemplo 8, sección 7.3.

Solución. Se recuerda que el ejemplo 8 de la sección 7.3 se refiere a un *proceso de Markov* y que tal proceso de transición está gobernado por una **matriz estocástica** $\mathbf{A} = [a_{jk}]$, es decir, una matriz cuadrada con elementos a_{jk} no negativos (los cuales dan las probabilidades de transición) y con la suma de cada renglón igual a 1. Además, el estado **y** (un vector columna) se obtiene a partir de un estado **x** de acuerdo

con $\mathbf{y}^T = \mathbf{x}^T\mathbf{A}$ o, con la expresión equivalente, $\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{x}$. Se alcanza un límite si los estados se mantienen invariables, si $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T\mathbf{A}$ o

$$(4) \qquad \mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Estos significa que $\mathbf{A}^T$ deberá tener el eigenvalor 1. Pero $\mathbf{A}^T$ tiene los mismos eigenvalores que $\mathbf{A}$ (por el teorema 1 de la sección 7.8); y $\mathbf{A}$ tiene el eigenvalor 1, con eigenvector $\mathbf{v}^T = [1 \ \cdots \ 1]$, ya que la suma de cada renglón de $\mathbf{A}$ es igual a 1. En el ejemplo tratado

$$\mathbf{Av} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

como se afirmó. Por tanto (4) tiene una solución no trivial $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, que es el eigenvector de $\mathbf{A}^T$ correspondiente a $\lambda = 1$. Ahora (4) es $(\mathbf{A}^T - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$; desarrollándola,

$$\begin{aligned} -0.2x_1 + 0.1x_2 \qquad\quad &= 0 \\ 0.1x_1 - 0.3x_2 + 0.1x_3 &= 0 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 - 0.1x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Una solución es $\mathbf{x}^T = [12.5 \ \ 25 \ \ 62.5]$. *Respuesta.* Suponiendo que las probabilidades se mantienen iguales con el correr del tiempo, se observa que los estados tienden a 12.5% de uso residencial, 25% de uso comercial y 62.5% de uso industrial. ▮

EJEMPLO 3 Problemas de eigenvalores que surgen de modelos de población. Modelo de Leslie

El modelo de Leslie describe el crecimiento poblacional por edades específicas, como sigue. Sea la edad mayor alcanzada por las hembras de cierta población de animales de 6 años. Dividir la población en tres clases de edad de 2 años cada una. Sea la "*matriz de Leslie*"

$$(5) \qquad \mathbf{L} = [l_{jk}] = \begin{bmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

donde l_{1k} es el número promedio de hijas paridas por una sola hembra durante el tiempo que está en la clase de edad k y $l_{j,j-1}$ ($j = 2, 3$) es la fracción de hembras en la clase de edad $j - 1$ que sobrevivirán y pasarán a la clase j. (a) ¿Cuál es el número de hembras en cada clase después de 2, 4, 6 años si cada clase se compone inicialmente de 500 hembras? (b) ¿Para qué distribución inicial el número de hembras de cada clase cambiará en la misma proporción? ¿Cuál es la razón de cambio?

Solución. **(a)** Inicialmente, $\mathbf{x}_{(0)}^T = [500 \ \ 500 \ \ 500]$. Después de dos años

$$\mathbf{x}_{(2)} = \mathbf{Lx}_{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 500 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1350 \\ 300 \\ 150 \end{bmatrix}.$$

De manera similar, después de 4 años se tiene $\mathbf{x}_{(4)}^T = (\mathbf{Lx}_{(2)})^T = [750 \ \ 810 \ \ 90]$ y después de 6 años se tiene $\mathbf{x}_{(6)}^T = (\mathbf{Lx}_{(4)})^T = [1899 \ \ 450 \ \ 243]$.

(b) Cambio proporcional significa que se está buscando un vector de distribución $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Lx} = \lambda\mathbf{x}$, donde λ es la razón de cambio (crecimiento si $\lambda > 1$, decremento si $\lambda < 1$). La ecuación característica es

$$\det(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 - 0.6(-2.3\lambda - 0.3 \cdot 0.4) = -\lambda^3 + 1.38\lambda + 0.072 = 0.$$

Se encuentra (por ejemplo, por el método de Newton, sección 18.2) que una raíz positiva es $\lambda = 1.2$. El eigenvector correspondiente puede determinarse a partir de $0.6x_1 - 1.2x_2 = 0$, $0.3x_2 - 1.2x_3 = 0$. Por tanto, $\mathbf{x}^T = [1 \ \ 0.5 \ \ 0.125]$. Para obtener una población inicial de 1,500, como antes, se multiplica $\mathbf{x}^T$ por 923. *Respuesta.* 923 hembras en la clase 1, 462 en la clase 2, 115 en la clase 3. Tasa de crecimiento, 1.2. ∎

EJEMPLO 4 Sistema vibratorio de dos masas en dos resortes (figura 57 en la sección 4.1)

Los sistemas masa-resorte compuestos por varias masas y resortes pueden tratarse como problemas de eigenvalores. Por ejemplo, el sistema mecánico de la figura 57 (sección 4.1) está gobernado por las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} y_1'' &= -5y_1 + 2y_2 \\ y_2'' &= 2y_1 - 2y_2 \end{aligned} \tag{6}$$

donde y_1 y y_2 son los desplazamientos de las masas a partir del reposo, como se muestra en la figura, y las primas denotan derivadas con respecto al tiempo t. En forma vectorial, la relación queda

$$\mathbf{y}'' = \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Se intenta una solución vectorial de la forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\omega t}. \tag{8}$$

Esto es sugerido por un sistema mecánico de una sola masa y un solo resorte (sección 2.5), cuyo movimiento está dado por funciones exponenciales (y senos y cosenos). Al sustituir en (7) se obtiene

$$\omega^2 \mathbf{x}e^{\omega t} = \mathbf{A}\mathbf{x}e^{\omega t}.$$

Al dividir entre $e^{\omega T}$ y escribir $\omega^2 = \lambda$, se observa que el sistema mecánico lleva al problema de eigenvalores

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad \text{donde } \lambda = \omega^2. \tag{9}$$

Por el ejemplo 1 de la sección 7.10 se observa que $\mathbf{A}$ tiene los eigenvalores $\lambda_1 = -1$; por consiguiente, $\omega = \sqrt{-1} = \pm i$, y $\lambda_2 = -6$, por tanto $\omega = \sqrt{-6} = \pm i\sqrt{6}$ y los eigenvectores correspondientes

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Por (8) se obtienen las cuatro soluciones complejas [ver (7), sección 2.3]

$$\mathbf{x}_1 e^{\pm it} = \mathbf{x}_1(\cos t \pm i \operatorname{sen} t),$$

$$\mathbf{x}_2 e^{\pm i\sqrt{6}t} = \mathbf{x}_2(\cos \sqrt{6}\,t \pm i \operatorname{sen} \sqrt{6}\,t),$$

y por adición y sustracción (ver la sección 2.3) se obtienen las cuatro soluciones reales

$$\mathbf{x}_1 \cos t, \qquad \mathbf{x}_1 \operatorname{sen} t, \qquad \mathbf{x}_2 \cos \sqrt{6}\,t, \qquad \mathbf{x}_2 \operatorname{sen} \sqrt{6}\,t.$$

Una solución general se obtiene tomando una combinación lineal de estas soluciones,

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1(a_1 \cos t + b_1 \sin t) + \mathbf{x}_2(a_2 \cos \sqrt{6}\,t + b_2 \operatorname{sen} \sqrt{6}\,t)$$

con constantes arbitrarias a_1, b_1, a_2, b_2 (a las que pueden asignarse valores estableciendo un desplazamiento y una velocidad iniciales para cada una de las dos masas). Por (10), las componentes de **y** son

$$y_1 = a_1 \cos t + b_1 \operatorname{sen} t + 2a_2 \cos \sqrt{6}\, t + 2b_2 \operatorname{sen} \sqrt{6}\, t$$

$$y_2 = 2a_1 \cos t + 2b_1 \operatorname{sen} t - a_2 \cos \sqrt{6}\, t - b_2 \operatorname{sen} \sqrt{6}\, t.$$

Estas funciones describen oscilaciones armónicas de las dos masas. ∎

Problemas de la sección 7.11

Encontrar las direcciones principales y los factores de extensión o contracción correspondientes de la deformación elástica $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, donde $\mathbf{A}$ es igual a

1. $\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 3/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2.00 & 1.75 \\ 2.00 & 2.25 \end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 3.50 & 1.00 \\ 0.75 & 2.50 \end{bmatrix}$

Encontrar los estados límite de los procesos de Markov gobernados por las siguientes matrices estocásticas:

7. $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 0.50 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}$ 9. $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}$

Encontrar la tasa de crecimiento en el modelo de Leslie con matriz de Leslie

10. $\begin{bmatrix} 0 & 5.2 & 2.125 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$ 11. $\begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$ 12. $\begin{bmatrix} 0 & 4.5 & 2.5 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$

13. **(Modelo de insumos-producción de Leontief[16])** Suponer que tres industrias se interrelacionan de tal modo que sus producciones se usan a su vez como insumos, de acuerdo con la **matriz de consumo** de 3×3

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

donde a_{jk} es la fracción de la producción de la industria k consumida (comprada) por la industria j. Sea p_j el precio cargado por la industria j para su producción total. Un problema es encontrar precios tales que, para cada industria, los gastos totales sean iguales a los ingresos totales. Demostrar que esto lleva a $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{p}$, donde $\mathbf{p} = [p_1 \; p_2 \; p_3]^T$ y encontrar una solución $\mathbf{p}$ con p_1, p_2, p_3 no negativos.

14. Demostrar que en una matriz de consumo considerada como en el problema 13 la suma de cada una de las columnas debe ser igual a 1 y que dicha matriz siempre tiene el eigenvalor 1.

[16] WASSILY LEONTIEF (1906-). Economista estadunidense. Por sus trabajos se le otorgó el premio Nobel en 1973.

15. **(Modelo abierto de insumos-producción de Leontief)** Si las propias industrias no consumen la totalidad de la producción (como en el problema 13), entonces en lugar de $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ se tiene $\mathbf{x} - \mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, donde $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ es lo producido, $\mathbf{Ax}$ es lo consumido por las industrias y, en consecuencia, $\mathbf{y}$ es la producción neta disponible para otros consumidores. Encontrar para qué producción $\mathbf{x}$ puede alcanzarse una $\mathbf{y} = [0.1 \ \ 0.3 \ \ 0.1]^T$ dada si la matriz de consumo es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

16. **(Teorema de Perron-Frobenius)** Demostrar que la matriz de Leslie $\mathbf{L}$ con l_{12}, l_{13}, l_{21}, l_{32} positivos tiene un eigenvalor positivo. *Sugerencia.* Usar los problemas 22 y 23 de la sección 7.10. (Se trata de un caso especial del famoso *teorema de Perron-Frobenius* de la sección 19.7, cuya demostración en la forma general es difícil.)

Para **ecuaciones diferenciales** y problemas de eigenvalores de matrices relacionados, ver el capítulo 5.

7.12 MATRICES SIMÉTRICA, ANTISIMÉTRICA Y ORTOGONAL

Se consideran las tres clases de matrices cuadradas reales que se presentan con mucha frencuencia en las aplicaciones. Estas se definen de la siguiente manera.

Definiciones de las matrices simétrica, antisimétrica y ortogonal

Una matriz cuadrada ***real*** $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ se llama

simétrica si la transposición la mantiene invariable,

$$(1) \qquad \boxed{\mathbf{A}^T = \mathbf{A},} \qquad \text{por tanto} \qquad a_{kj} = a_{jk},$$

antisimétrica si la transposición da como resultado la negativa de $\mathbf{A}$,

$$(2) \qquad \boxed{\mathbf{A}^T = -\mathbf{A},} \qquad \text{por tanto} \qquad a_{kj} = -a_{jk},$$

ortogonal si la transposición da como resultado la inversa de $\mathbf{A}$

$$(3) \qquad \boxed{\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}.}$$

EJEMPLO 1 Matrices simétrica, antisimétrica y ortogonal

Las matrices

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

son simétrica, antisimétrica y ortogonal, respectivamente, como el estudiante deberá comprobar. En todas las matrices antisimétricas los elementos de la diagonal principal son cero. (¿Puede demostrarlo el lector? ∎

Cualquier matriz cuadrada real **A** puede escribirse como la suma de una matriz simétrica **R** y una matriz antisimétrica **S**, donde

$$(4) \qquad \mathbf{R} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathsf{T}}) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{S} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathsf{T}}).$$

EJEMPLO 2 Ilustración de la fórmula (4)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \\ -3 & 13 & -4 \end{bmatrix} = \mathbf{R} + \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & -7 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 1 (Eigenvalores de las matrices simétrica y antisimétrica)

(a) *Los eigenvalores de una matriz simétrica son reales.*

(b) *Los eigenvalores de una matriz antisimétrica son imaginarios puros o cero.* (En la siguiente sección se dan las demostraciones.)

EJEMPLO 3 Eigenvalores de las matrices simétrica y antisimétrica

Las matrices de (1) y (7) de la sección 7.11 son simétricas y tienen eigenvalores reales. La matriz antisimétrica del ejemplo 1 tiene los eigenvalores 0, $-25i$ y $25i$. (Comprobarlo.) La matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

tiene los eigenvalores reales 1 y 5 y no es simétrica. ¿Contradice lo anterior el teorema 1? ∎

Transformaciones ortogonales y matrices

Las **transformaciones ortogonales** son

$$(5) \qquad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \text{donde } \mathbf{A} \text{ es una matriz ortogonal}$$

Con cada vector **x** en R^n, esta transformación asigna un vector **y** en R^n. Por ejemplo, la rotación del plano en un ángulo θ

$$(6) \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

es una transformación ortogonal y puede demostrarse que cualquier transformación ortogonal en el plano o en el espacio tridimensional es una rotación (combinada posiblemente con una reflexión en una línea recta o en un plano, respectivamente).

La propiedad siguiente de las transformaciones ortogonales es la razón principal de la importancia de las matrices ortogonales.

Teorema 2 (Invariancia del producto interior)

Una transformación ortogonal preserva el valor del producto interior de vectores (ver la sección 7.3)

$$(7) \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T\mathbf{b},$$

y, por consiguiente, también la **longitud** *o* **norma** *de un vector en R^n, dada por*

$$(8) \qquad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}.$$

Demostración. Sean $\mathbf{u} = \mathbf{Aa}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{Ab}$, donde $\mathbf{A}$ es ortogonal. Debe demostrarse que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Ahora bien, por (5) de la sección 7.3 se obtiene $\mathbf{u}^T = (\mathbf{Aa})^T = \mathbf{a}^T\mathbf{A}^T$. Además, $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ por (3). Por tanto,

$$(9) \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = (\mathbf{Aa})^T\mathbf{Ab} = \mathbf{a}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ab} = \mathbf{a}^T\mathbf{Ib} = \mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Las matrices ortogonales poseen interesantes propiedades adicionales, como sigue.

Teorema 3 (Ortonormalidad de los vectores renglón y columna)

Una matriz cuadrada real es ortogonal si y sólo si sus vectores columna $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ (y también sus vectores renglón) forman un **sistema ortonormal**, *es decir,*

$$(10) \qquad \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_j^T\mathbf{a}_k = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq k \\ 1 & \text{if } j = k. \end{cases}$$

Demostración. **(a)** Sea $\mathbf{A}$ ortogonal. Entonces $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, en términos de vectores columna,

$$(11) \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{bmatrix} [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \mathbf{I},$$

donde la última igualdad implica (10), por la definición de la matriz unitaria $\mathbf{I}$ de $n \times n$. Por (3) se sigue que la inversa de una matriz ortogonal es ortogonal (ver el problema 22) y los vectores columna de $\mathbf{A}^{-1}$ ($= \mathbf{A}^T$) son los vectores renglón de $\mathbf{A}$; en consecuencia, los vectores renglón de $\mathbf{A}$ también forman un sistema ortonormal.

(b) Recíprocamente, si los vectores columna de $\mathbf{A}$ satisfacen (10), los elementos que no están en la diagonal de la matriz grande de (11) son 0 y los elementos de la diagonal son 1. Por tanto, $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, como indica (11). De manera similar, $\mathbf{AA}^T = \mathbf{I}$. Esto implica $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ ya que se tiene también $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ y la inversa es única. Por

tanto, **A** es ortogonal. Se cumple lo mismo cuando los vectores renglón de **A** forman un sistema ortonormal, por lo que se estableció al final del inciso **(a)**.

Teorema 4 (Determinante de una matriz ortogonal)

El determinante de una matriz ortogonal tiene el valor +1 *o* −1.

Demostración. Esto se sigue de det **AB** = det **A** det **B** y det $\mathbf{A}^T$ = det **A** (teoremas 1 y 8 de la sección 7.8). De hecho, si **A** es ortogonal, entonces

$$1 = \det \mathbf{I} = \det (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \det (\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^T = (\det \mathbf{A})^2. \quad ■$$

EJEMPLO 4 Ilustración de los teoremas 3 y 4

La última matriz del ejemplo 1 y la matriz de (6) ilustran los teoremas 3 y 4, al ser sus determinantes −1 y +1, como el estudiante deberá comprobar. ■

Teorema 5 (Eigenvalores de una matriz ortogonal)

Los eigenvalores de una matriz ortogonal **A** *son reales o complejos conjugados en pares y tienen valor absoluto* 1.

Demostración. La primera parte del enunciado es válido para cualquier matriz real **A** ya que su polinomio característico tiene coeficientes reales, por lo que sus ceros (los eigenvalores de **A**) deben ser como se indica. La afirmación $|\lambda| = 1$ se demostrará en la siguiente sección. ■

EJEMPLO 5 Eigenvalores de una matriz ortogonal

La matriz ortogonal del ejemplo 1 tiene la ecuación característica

$$-\lambda^3 + \tfrac{2}{3}\lambda^2 + \tfrac{2}{3}\lambda - 1 = 0.$$

Ahora bien, uno de los eigenvalores debe ser real (¿por qué?) y por tanto +1 o −1. Probando se encuentra −1. Al dividir entre $\lambda + 1$ se obtiene $\lambda^2 - 5\lambda/3 + 1 = 0$ y los dos eigenvalores $(5 + i\sqrt{11})/6$ y $(5 - i\sqrt{11})/6$. Comprobar las afirmaciones anteriores. ■

Problemas de la sección 7.12

Escribir las siguientes matrices como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

1. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & -7 \\ -10 & 11 & -1 \end{bmatrix}$

4. Demostrar que todos los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son cero.

¿Las siguientes matrices son simétricas? ¿Antisimétricas? ¿Ortogonales? Encontrar sus eigenvalores (ilustrando así los teoremas 1 y 5).

5. $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 0.50 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 0 & 18 & -24 \\ -18 & 0 & 40 \\ 24 & -40 & 0 \end{bmatrix}$

14. **(Matriz simétrica)** Demostrar que los eigenvectores de una matriz simétrica correspondientes a eigenvalores diferentes son ortogonales. Dar un ejemplo.

15. Encontrar una matriz real que tenga eigenvalores reales pero que no sea simétrica. ¿Contradice esto el teorema 1?

16. Demostrar que (6) es una transformación ortogonal. Comprobar que se cumple el teorema 3. Encontrar la transformación inversa.

17. Sean $\mathbf{v}^T = [4 \;\; 2]$, $\mathbf{x}^T = [-2 \;\; 1]$, $\mathbf{w} = \mathbf{Av}$, $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ con la matriz $\mathbf{A}$ dada en (6). Encontrar $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{x}|$, $|\mathbf{w}|$, $|\mathbf{y}|$. ¿Cuáles teoremas ilustran los resultados?

18. Encontrar $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ sea una rotación de 30°en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj en el plano.

19. Interpretar la transformación $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ geométricamente, donde $\mathbf{A}$ es la matriz del problema 10 y las componentes de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son coordenadas cartesianas.

20. Encontrar una matriz de 2×2 que sea tanto ortogonal como antisimétrica. Encontrar sus eigenvalores.

21. ¿Existe una matriz ortogonal antisimétrica de 3×3? ¿Una matriz ortogonal simétrica de 3×3? (Dar una razón.)

22. Demostrar que la inversa de una matriz ortogonal es ortogonal.

23. Demostrar que el producto de dos matrices ortogonales de $n \times n$ es ortogonal.

24. ¿Es ortogonal la suma de dos matrices ortogonales?

25. Demostrar que la inversa de una matriz no singular antisimétrica es antisimétrica.

7.13 MATRICES HERMITIANA, ANTIHERMITIANA Y UNITARIA

Se introducirán ahora tres clases de matrices cuadradas complejas que generalizan las tres clases de matrices reales que se acaban de considerar y que tienen importantes aplicaciones, por ejemplo, en la mecánica cuántica.

En esta conexión nosotros utilizaremos la notación normal

$$\overline{\mathbf{A}} = [\overline{a}_{jk}]$$

para la matriz obtenida a partir de $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ al sustituir cada elemento por su conjugado complejo y también se usa la notación

$$\boxed{\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = [\bar{a}_{kj}]}$$

para la transpuesta conjugada. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3+4i & -5i \\ -7 & 6-2i \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad \overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 3-4i & -7 \\ 5i & 6+2i \end{bmatrix}.$$

Definiciones de las matrices hermitiana[17], antihermitiana y unitaria

Una matriz cuadrada $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ se llama

hermitiana si $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$, es decir, $\bar{a}_{kj} = a_{jk}$

antihermitiana si $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A}$, es decir, $\bar{a}_{kj} = -a_{jk}$

unitaria si $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{-1}$.

A partir de estas definiciones se observa lo siguiente. Si $\mathbf{A}$ es hermitiana, los elementos de la diagonal principal deben satisfacer $\bar{a}_{jj} = a_{jj}$, es decir, son reales. De manera similar, si $\mathbf{A}$ es antihermitiana, entonces $\bar{a}_{jj} = -a_{jj}$ o, si se hace $a_{jj} = \alpha + i\beta$, esta expresión queda $\alpha - i\beta = -(\alpha + i\beta)$, de donde $\alpha = 0$ y a_{jj} es imaginario puro o 0.

EJEMPLO 1 Matrices hermitiana, antihermitiana y unitaria

Las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1-3i \\ 1+3i & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3i & 2+i \\ -2+i & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}i \end{bmatrix}$$

son hermitiana, antihermitiana y unitaria, respectivamente, como el lector puede comprobar. ∎

Si una matriz hermitiana es real, entonces $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$. Por tanto, una matriz hermitiana real es una matriz simétrica (sección 7.12).

De manera similar, si una matriz antihermitiana es real, entonces $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A}$. Por tanto, una matriz antihermitiana real es una matriz antisimétrica.

Por último, si una matriz unitaria es real, entonces $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{-1}$. Por tanto, una matriz unitaria real es una matriz ortogonal.

Con esto se demuestra que las *matrices hermitiana, antihermitiana y unitaria generalizan las matrices simétrica, antisimétrica y ortogonal, respectivamente.*

Eigenvalores

Resulta notable, y explica en parte la importancia de las matrices bajo consideración, el hecho de que sus espectros (sus conjuntos de eigenvalores; ver la sección 7.10) puedan caracterizarse en una forma general como sigue (ver la figura 137).

---

[17] Ver nota de pie de página 22 en los problemas de la sección 5.9, página 293.

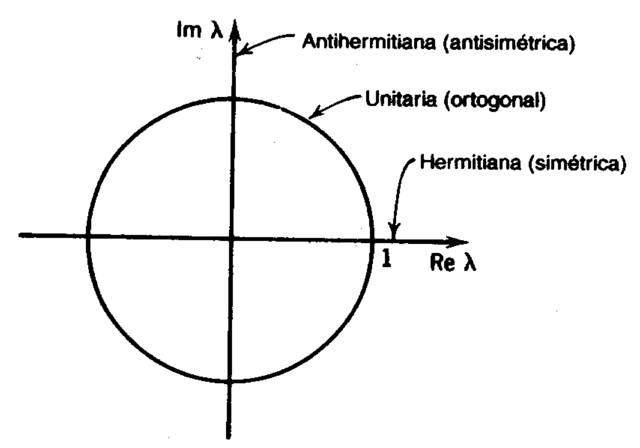


Figura 137. Localización de los eigenvalores de las matrices hermitiana, antihermitiana y unitaria en el plano complejo.

Teorema 1 (Eigenvalores)

(a) *Los eigenvalores de una matriz hermitiana (y por tanto de una matriz simétrica) son reales.*

(b) *Los eigenvalores de una matriz antihermitiana (y por tanto de una matriz antisimétrica) son imaginarios puros o cero.*

(c) *Los eigenvalores de una matriz unitaria (y por tanto de una matriz ortogonal) tienen valor absoluto* 1.

Demostración. Sean λ un eigenvalor de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{x}$ el eigenvector correspondiente. Entonces

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}. \tag{1}$$

(a) Sea $\mathbf{A}$ hermitiana. Al premultiplicar (1) por $\bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}$ se obtiene

$$\bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{Ax} = \bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\lambda\mathbf{x} = \lambda\bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}.$$

Ahora $\bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = \bar{x}_1x_1 + \cdots + \bar{x}_nx_n = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$ es real y es diferente de cero ya que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Por tanto, puede dividirse para obtener

$$\lambda = \frac{\bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{Ax}}{\bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}}. \tag{2}$$

Se observa que λ es real si el numerador es real. Se demuestra que el numerador es real probando que es igual a su conjugado complejo, usando $\bar{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$ o $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ y (5) de la sección 7.3. De hecho, empezando con la aplicación de una transposición, la cual no afecta a un número (el numerador), se obtiene

$$\bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{Ax} = (\bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{Ax})^{\mathsf{T}} = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = (\overline{\bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{Ax}}). \tag{3}$$

A partir de esta expresión y de (2), cuyo denominador es real, se observa que λ es real.

(b) Si **A** es antihermitiana, entonces $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A}$ y en consecuencia $\overline{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$, por lo que se obtiene un signo menos en (3),

$$\overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = -\overline{(\overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x})}. \tag{4}$$

Así, se trata de un número complejo $c = a + ib$ que es igual al negativo de su conjugado $\bar{c} = a - ib$, es decir, $a + ib = -(a - ib)$. Por tanto, $a = 0$, de donde c es un imaginario puro o cero, y al dividir entre el real $\overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ en (2) se obtiene un λ imaginario puro λ o $\lambda = 0$.

(c) Sea **A** unitaria. Se toma (1) y su transpuesta conjugada,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad \text{y} \qquad (\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}})^{\mathsf{T}} = (\bar{\lambda}\overline{\mathbf{x}})^{\mathsf{T}} = \bar{\lambda}\overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}$$

y se multiplican los dos primeros miembros y los dos segundos,

$$(\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}})^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \bar{\lambda}\lambda\overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = |\lambda|^2\overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}.$$

Pero **A** es unitaria, $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{-1}$, por lo que en el primer miembro se obtiene

$$(\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}})^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{I}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}.$$

En conjunto, $\overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = |\lambda|^2\,\overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$. Se divide ahora entre $\overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ ($\neq 0$) para obtener $|\lambda|^2 = 1$, de donde $|\lambda| = 1$.

Con esto se demuestra el presente teorema y los teoremas 1 y 5 de la sección anterior. ∎

EJEMPLO 2 Ilustración del teorema 1

Para las matrices del ejemplo 1 se encuentra por cálculo directo

Matriz	Ecuación característica	Eigenvalores
A Hermitiana	$\lambda^2 - 11\lambda + 18 = 0$	$9, \quad 2$
B Antihermitiana	$\lambda^2 - 2i\lambda + 8 = 0$	$4i, \quad -2i$
C Unitaria	$\lambda^2 - i\lambda - 1 = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$

y $|\pm\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i|^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$ ∎

Formas

Cabe mencionar que al numerador $\overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ de (2) se le llama una **forma** en las componentes $x_1, \cdots, x_n$ de **x**, y a **A** se le llama su *matriz de coeficientes*. Cuando $n = 2$ se obtiene

$$\overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2]\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{cases} a_{11}\bar{x}_1x_1 + a_{12}\bar{x}_1x_2 \\ + a_{21}\bar{x}_2x_1 + a_{22}\bar{x}_2x_2. \end{cases}$$

Y para n general,

$$\bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\bar{x}_j x_k = \begin{aligned}[t] & a_{11}\bar{x}_1 x_1 + \cdots + a_{1n}\bar{x}_1 x_n \\ & + a_{21}\bar{x}_2 x_1 + \cdots + a_{2n}\bar{x}_2 x_n \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{n1}\bar{x}_n x_1 + \cdots + a_{nn}\bar{x}_n x_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Si **x** y **A** son reales, entonces (5) queda

$$\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k = \begin{aligned}[t] & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \tag{6}$$

y se llama **forma cuadrática**. Entonces puede suponerse sin restricción que la matriz de coeficientes es ***simétrica***, ya que los términos que no están en la diagonal pueden tomarse por parejas para después escribir el resultado como una suma de dos términos iguales, como se ilustra en el ejemplo siguiente. Las formas cuadráticas se presentan en física y geometría, por ejemplo, en relación con secciones cónicas (elipses $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1$, etc.) y superficies cuadráticas. (Su "transformación a los ejes principales" se discutirá en la siguiente sección.)

EJEMPLO 3 Forma cuadrática. Matriz de coeficientes simétrica C

Sea

$$\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2x_1 + 2x_2^2 = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Aquí $4 + 6 = 10 = 5 + 5$. A partir de la matriz ***simétrica*** correspondiente $\mathbf{C} = [c_{jk}]$, donde $c_{jk} = \frac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj})$, por tanto $c_{11} = 3$, $c_{12} = c_{21} = 5$, $c_{22} = 2$, se obtiene el mismo resultado

$$\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2x_1 + 2x_2^2 = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2. \quad \blacksquare$$

Si la matriz **A** en (5) es hermitiana o antihermitiana, la expresión (5) se llama **forma hermitiana** o **forma antihermitiana**, respectivamente. Estas formas tienen la siguiente propiedad, la cual explica su importancia en física.

Teorema 1* (Formas hermitiana y antihermitiana)

Para cualquier elección del vector **x**, *el valor de una forma hermitiana es real, y el valor de una forma antihermitiana es un imaginario puro o* 0.

Demostración. En la demostración de (3) y (4) no se usó el hecho de que $\mathbf{x}$ era un eigenvector, y las demostraciones siguen siendo válidas para vectores (y matrices hermitianas o antihermitianas) cualesquiera. De lo anterior se sigue el presente teorema.

EJEMPLO 4 Forma hermitiana

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2i \end{bmatrix},$$

entonces

$$\bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = [1-i \quad -2i] \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i \\ 2i \end{bmatrix}$$

$$= [1-i \quad -2i] \begin{bmatrix} 3(1+i)+(2-i)2i \\ (2+i)(1+i)+4\cdot 2i \end{bmatrix} = 34. \qquad \blacksquare$$

Propiedades de las matrices unitarias. Espacio vectorial complejo C^n

Se amplía ahora la discusión de las matrices ortogonales de la sección 7.12 a las matrices unitarias. En lugar del espacio vectorial real R^n de todos los vectores reales con n componentes y números reales como escalares, ahora se usa el **espacio vectorial complejo** C^n de todos los vectores complejos con n números complejos como componentes y números complejos como escalares. Para tales vectores complejos, el **producto interior** está definido por

$$\text{(7)} \qquad \boxed{\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = \bar{\mathbf{a}}^{\mathsf{T}}\mathbf{b}}$$

y la **longitud** o **norma** de un vector por

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} \|\mathbf{a}\| &= \sqrt{\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}} = \sqrt{\bar{\mathbf{a}}^{\mathsf{T}}\mathbf{a}} = \sqrt{\bar{a}_1 a_1 + \cdots + \bar{a}_n a_n} \\ &= \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}. \end{aligned}$$

Obsérvese que para vectores *reales* esta expresión se reduce al producto interior según se definió en la sección 7.3.

Teorema 2 (Invariancia del producto interior)

Una **transformación unitaria**, *es decir,* $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *con una matriz unitaria* $\mathbf{A}$, *preserva el valor del producto interior* (7) *y en consecuencia también la norma* (8).

Demostración. La demostración es igual a la del teorema 2 de la sección 7.12, que el teorema generaliza; en el análogo de (9), sección 7.12, se tienen ahora barras,

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = (\overline{\mathbf{A}\mathbf{a}})^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{a}}^{\mathsf{T}}\bar{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{a}}^{\mathsf{T}}\mathbf{I}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{a}}^{\mathsf{T}}\mathbf{b} = \mathbf{a}\bullet\mathbf{b}. \qquad \blacksquare$$

El análogo complejo de un *sistema ortonormal* de vectores reales (ver la sección 7.12) es un **sistema unitario**, definido por

(9) $$\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k = \bar{\mathbf{a}}_j^{\mathsf{T}} \mathbf{a}_k = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k, \end{cases}$$

y la ampliación del teorema 3, sección 7.12, a los complejos es la siguiente.

Teorema 3 (Sistemas unitarios de vectores columna y renglón)

Una matriz cuadrada es unitaria si y sólo si sus vectores columna (y también sus vectores renglón) forman un sistema unitario.

Demostración. La demostración es igual a la del teorema 3 de la sección 7.12, salvo por las barras requeridas por las definiciones $\bar{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{-1}$ y (7) y (9). ∎

Teorema 4 (Determinante de una matriz unitaria)

El determinante de una matriz unitaria tiene valor absoluto 1.

Demostración. De manera similar a la sección 7.12, se obtiene

$$1 = \det \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \det (\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}) = \det \mathbf{A} \det \bar{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \det \mathbf{A} \det \bar{\mathbf{A}}$$
$$= \det \mathbf{A}\, \overline{\det \mathbf{A}} = |\det \mathbf{A}|^2.$$

Por tanto, $|\det \mathbf{A}| = 1$ (donde det **A** ahora puede ser complejo). ∎

EJEMPLO 5 Matriz unitaria que ilustra los teoremas 2-4

Para los vectores $\mathbf{a}^{\mathsf{T}} = [1 \quad i]$ y $\mathbf{b}^{\mathsf{T}} = [3i \quad 2+i]$ se obtiene $\bar{\mathbf{a}}^{\mathsf{T}}\mathbf{b} = 3i - i(2+i) = 1 + i$, y con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6i & 0.8 \\ 0.8 & 0.6i \end{bmatrix} \quad \text{además} \quad \mathbf{Aa} = \begin{bmatrix} 1.4i \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} -0.2 + 0.8i \\ -0.6 + 3.6i \end{bmatrix},$$

como puede comprobarse con facilidad. Se obtiene así $(\overline{\mathbf{A}\mathbf{a}})^{\mathsf{T}}\mathbf{Ab} = 1 + i$, que ilustra el teorema 2. La matriz es unitaria. Sus columnas forman un sistema unitario, al igual que los renglones, como se observa. Asimismo, det $\mathbf{A} = -1$. ∎

Problemas de la sección 7.13

1. Comprobar los eigenvalores del ejemplo 2.

En los ejemplos 1 y 2, encontrar los eigenvectores de

2. la matriz **A**.
3. la matriz **B**.
4. la matriz **C**.

Indicar si las matrices siguientes son hermitianas, antihermitianas o unitarias y encontrar sus eigenvalores (comprobando así el teorema 1) y eigenvectores.

5. $\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 4 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & i\sqrt{2/3} \\ -i\sqrt{2/3} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$

11. Demostrar que el producto de dos matrices unitarias de $n \times n$ es unitario.

12. Demostrar que la inversa de una matriz unitaria es unitaria. Comprobar esto para la matriz del problema 10.

13. Comprobar los teoremas 3 y 4 para la matriz del problema 9.

14. Demostrar que cualquier matriz cuadrada puede escribirse como la suma de una matriz hermitiana y una matriz antihermitiana.

15. **(Matriz normal)** Por definición, una *matriz normal* es una matriz cuadrada que se conmuta con su transpuesta conjugada,

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \bar{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}.$$

Demostrar que las matrices hermitiana, antihermitiana y unitaria son normales.

Formas cuadráticas. Encontrar una matriz simétrica **C** tal que $Q = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{C}\mathbf{x}$, donde Q es igual a

16. $x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2$

17. $(x_1 - 3x_2)^2$

18. $(x_1 + x_2 + x_3)^2$

19. $-3x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + 2x_1x_3 - 5x_3^2$

20. $(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)^2$

21. $(x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2$

22. **(Definitividad)** Se dice que una forma cuadrática real $Q = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{C}\mathbf{x}$ y su matriz simétrica $\mathbf{C} = [c_{jk}]$ son **positivas definidas** si $Q > 0$ para toda $[x_1 \cdots x_n] \neq [0 \cdots 0]$. Una condicion necesaria y suficiente de la definitividad positiva es que todos los determinantes

$$C_1 = c_{11}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad C_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \cdots, \quad C_n = \det \mathbf{C}$$

sean positivos (ver referencia [B2], vol. 1, 346). Demostrar que la forma en el problema 16 es positiva definida, en tanto que en el ejemplo 3 no es positiva definida.

Formas hermitianas y antihermitianas. ¿**A** es hermitiana o antihermitiana? Encontrar $\bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$.

23. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

24. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

25. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & 2i \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

26. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b+ic \\ b-ic & k \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

27. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 1 & -2i \\ 0 & 2i & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}$

28. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2 \\ -1+i & -3i & 3+i \\ -2 & -3+i & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}$

¿**A** es hermitiana o antihermitiana? Encontrar $\overline{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$.

29. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 0 & 2i \\ 0 & -2i & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

30. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2i & 0 & 4 \\ 0 & i & 5-i \\ -4 & -5-i & 4i \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2i \\ -3 \end{bmatrix}$

7.14 PROPIEDADES DE LOS EIGENVECTORES. DIAGONALIZACIÓN

Hasta este punto, en la discusión de los problemas de eigenvalores se ha hecho hincapié en las propiedades de los eigen*valores*. Se estudian ahora los eigen*vectores* y sus propiedades. Los eigenvectores de una matriz **A** de $n \times n$ pueden (¡o no!) formar una base de R^n o C^n (ver la sección 7.13) y si lo hacen, pueden usarse para "*diagonalizar*" **A**, es decir, para transformarla en la forma diagonal con eigenvalores en la diagonal principal. Estos son los temas claves de esta sección.

Se empieza con un concepto de interés fundamental en los problemas de eigenvalores:

Semejanza de matrices

Se dice que una matriz $\hat{\mathbf{A}}$ de $n \times n$ es **semejante** a una matriz **A** de $n \times n$ si

(1) $$\boxed{\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}$$

para alguna matriz (¡no singular!) **T** de $n \times n$. Esta transformación, de la que se obtiene $\hat{\mathbf{A}}$ a partir de **A**, se denomina **transformación de semejanza**.

Las transformaciones de semejanza son importantes ya que preservan los eigenvalores.

Teorema 1 (Eigenvalores y eigenvectores de matrices semejantes)

Si $\hat{\mathbf{A}}$ *es semejante a* **A**, *entonces* $\hat{\mathbf{A}}$ *tiene los mismos eigenvalores que* **A**.

Además, si **x** *es un eigenvector de* **A**, *entonces* $\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ *es el eigenvector de* $\hat{\mathbf{A}}$ *correspondiente al mismo eigenvalor.*

Demostración. A partir de $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ (donde λ es un eigenvalor, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) se obtiene $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$. Ahora bien, $\mathbf{I} = \mathbf{TT}^{-1}$, de donde

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AIx} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{ATT}^{-1}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}.$$

Por tanto, λ es un eigenvalor de $\hat{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ el eigenvector correspondiente, ya que si $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se obtendría $\mathbf{x} = \mathbf{Ix} = \mathbf{TT}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{T0} = \mathbf{0}$, contradiciendo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. ∎

Propiedades de los eigenvectores

El teorema siguiente es de interés en sí mismo y de utilidad en relación con las bases de eigenvectores.

Teorema 2 (Independencia lineal de los eigenvectores)

*Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ eigenvalores **diferentes** de una matriz de $n \times n$. Entonces los eigenvectores correspondientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_k$ forman un conjunto linealmente independiente.*

Demostración. Suponer que la conclusión es falsa. Sea r el mayor entero tal que $\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_r\}$ es un conjunto linealmente independiente. Entonces $r < k$ y el conjunto $\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{r+1}\}$ es linealmente dependiente. Por tanto, existen escalares $c_1, \cdots, c_{r+1}$, no todos cero, tales que

$$c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{r+1}\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{0} \tag{2}$$

(ver la sección 7.5). Al multiplicar ambos miembros por $\mathbf{A}$ y usando $\mathbf{Ax}_j = \lambda_j\mathbf{x}_j$ se obtiene

$$c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_{r+1}\lambda_{r+1}\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Para cancelar el último término, se resta de esta expresión (2) λ_{r+1} veces, obteniéndose

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\mathbf{x}_1 + \cdots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\mathbf{x}_r = \mathbf{0}.$$

Aquí $c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = 0, \cdots, c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$, ya que $\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_r\}$ es linealmente independiente. Por tanto, $c_1 = \cdots = c_r = 0$, ya que todos los eigenvalores son diferentes. Pero con esto (2) se reduce a $c_{r+1}\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{0}$, de donde $c_{r+1} = 0$, ya que $\mathbf{x}_{r+1} \neq \mathbf{0}$ (¡un eigenvector!). Esto contradice el hecho de que no todos los escalares de (2) son cero. Por lo tanto, la conclusión del teorema debe ser válida. ∎

Este teorema tiene la implicación inmediata siguiente.

Teorema 3 (Base de eigenvectores)

Si una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ *tiene* n *eigenvalores **diferentes**, entonces* $\mathbf{A}$ *tiene una base de eigenvectores para* C^n (*o* R^n).

EJEMPLO 1 Base de eigenvectores

La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{tiene una base de eigenvectores} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

correspondiente a los eigenvalores $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$. (Ver el ejemplo 1 de la sección 7.11.) ∎

EJEMPLO 2 Base cuando no todos los eigenvalores son diferentes. Inexistencia de una base

Aun cuando no todos los n eigenvalores sean diferentes, una matriz $\mathbf{A}$ todavía puede proporcionar una base de eigenvectores para C^n o R^n. Esto se ilustra con el ejemplo 2 de la sección 7.10, donde $n = 3$. Por otra parte, $\mathbf{A}$ puede no tener suficientes eigenvectores linealmente independientes para formar una base. Por ejemplo, la matriz del ejemplo 3, sección 7.10,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{tiene un solo eigenvector} \quad \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde k es arbitrario, diferente de cero. Por tanto, $\mathbf{A}$ no proporciona una base de eigenvectores para R^2. ∎

En realidad, las bases de eigenvectores existen bajo condiciones mucho más generales que las dadas en el teorema 3 y para las matrices de la sección anterior incluso puede escogerse un sistema unitario de eigenvectores, como sigue.

Teorema 4 (Base de eigenvectores)

Una matriz hermitiana, antihermitiana o unitaria tiene una base de eigenvectores para C^n que es un sistema unitario (ver la sección 7.13). *Una matriz simétrica tiene una base ortonormal de eigenvectores para R^n.* (La demostración se encuentra en la referencia [B2], vol. 1, *pp. 309-311.)*

EJEMPLO 3 Base ortonormal de eigenvectores

La matriz del ejemplo 1 es simétrica y una base ortonormal de eigenvectores es $[1/\sqrt{2} \;\; 1/\sqrt{2}]^T$, $[1/\sqrt{2} \;\; -1/\sqrt{2}]^T$. ∎

Una base de eigenvectores de una matriz $\mathbf{A}$ resulta sumamente conveniente si se tiene interés en una transformación $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, porque entonces es posible representar cualquier $\mathbf{x}$ de manera única como

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

en términos de una base $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ y si estos eigenvectores de $\mathbf{A}$ corresponden a los eigenvalores (no necesariamente diferentes) $\lambda_1, \cdots, \lambda_1$ de $\mathbf{A}$, se obtiene entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n) \\ &= c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{A}\mathbf{x}_n \qquad (4) \\ &= c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\lambda_n\mathbf{x}_n. \end{aligned}$$

Esto muestra la ventaja: se ha descompuesto la complicada acción de $\mathbf{A}$ sobre los vectores arbitrarios $\mathbf{x}$ en una suma de acciones simples (multiplicación por escalares) sobre los eigenvectores de $\mathbf{A}$.

Diagonalización

Las bases de eigenvectores también desempeñan un papel central en la diagonalización de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$, como se explica con el siguiente teorema.

Teorema 5 (Diagonalización de una matriz)

Si una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ *tiene una base de eigenvectores, entonces*

$$(5) \qquad \boxed{\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}}$$

es diagonal, con los eigenvalores de $\mathbf{A}$ *como elementos de la diagonal principal. Aquí* $\mathbf{X}$ *es la matriz con estos eigenvectores como vectores columna. Además,*

$$(5^*) \qquad \mathbf{D}^m = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}^m\mathbf{X}.$$

Demostración. Sean $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ que forman una base de eigenvectores de $\mathbf{A}$ para C^n (o R^n) correspondientes a los eigenvalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, respectivamente, de $\mathbf{A}$. Entonces $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n]$ tiene rango n, por el teorema 1 de la sección 7.5. Por tanto, existe $\mathbf{X}^{-1}$ por el teorema 1 de la sección 7.7. Ahora bien, por (9) de la sección 7.3 y $\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \lambda \mathbf{x}_j$ se obtiene

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n] = [\mathbf{A}\mathbf{x}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_n] = [\lambda_1\mathbf{x}_1 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{x}_n].$$

En conjunto, $\mathbf{AX} = \mathbf{XD}$. Ambos miembros de esta última expresión se premultiplican por $\mathbf{X}^{-1}$ para obtener $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{XD} = \mathbf{D}$, que es (5). Asimismo, (5*) se establece observando que

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{DD} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{AXX}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{AAX} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{X}, \qquad \text{etc.} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Diagonalización

Cálculos similares a los de los ejemplos de la sección 7.10, etc., muestran que la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ tiene eigenvectores } \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \text{ Por tanto, } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y, utilizando (4) de la sección 7.7, se obtiene

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & -0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El estudiante puede demostrar que un intercambio de las columnas de $\mathbf{X}$ resulta en un intercambio de los eigenvalores 6 y 1 de la matriz diagonal. ∎

EJEMPLO 5 Diagonalización

Diagonalizar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7.3 & 0.2 & -3.7 \\ -11.5 & 1.0 & 5.5 \\ 17.7 & 1.8 & -9.3 \end{bmatrix}.$$

Solución. El determinante característico da la ecuación característica $-\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = 0$. Las raíces (eigenvalores de **A**) son $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 0$. Por el método de eliminación de Gauss aplicado a $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ con $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, se encuentran los eigenvectores y en seguida $\mathbf{X}^{-1}$ por la eliminación de Gauss-Jordan (sección 7.7, ejemplo 1). Los resultados son

$$\begin{bmatrix}-1\\3\\-1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\3 & -1 & 1\\-1 & 3 & 4\end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix}-0.7 & 0.2 & 0.3\\-1.3 & -0.2 & 0.7\\0.8 & 0.2 & -0.2\end{bmatrix}.$$

Al calcular **AX** y premultiplicar por $\mathbf{X}^{-1}$, se obtiene

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix}-0.7 & 0.2 & 0.3\\-1.3 & -0.2 & 0.7\\0.8 & 0.2 & -0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & -4 & 0\\9 & 4 & 0\\-3 & -12 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & -4 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Transformación de formas a los ejes principales

Se trata de un importante procedimiento práctico relacionado con la diagonalización de matrices. Se explica la idea para formas cuadráticas (ver la sección 7.13)

(6) $$\boxed{Q = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}.}$$

Se supone sin restricción que **A** es ***simétrica*** real (ver la sección 7.13). Entonces **A** tiene una base ortonormal de n eigenvectores, por el teorema 4. En consecuencia, la matriz **X** con estos vectores como vectores columna es ortogonal, por lo que $\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^{\mathsf{T}}$. Así, por (5) se tiene $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}$. Al sustituir en (6) se obtiene

$$Q = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}.$$

Si se hace $\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, entonces, como $\mathbf{X}^{\mathsf{T}} = \mathbf{X}^{-1}$, se obtiene

(7) $$\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{y}$$

y Q se reduce a

(8) $$Q = \mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{D}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1{}^2 + \lambda_2 y_2{}^2 + \cdots + \lambda_n y_n{}^2.$$

Con esto se demuestra

Teorema 6 (Teorema de los ejes principales)

La sustitución (7) *transforma una forma cuadrática*

$$Q = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_j x_k$$

a la forma de los ejes principales (8), *donde* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *son los eigenvalores (no necesariamente diferentes) de la matriz (¡simétrica!)* **A**, *y* **X** *es una matriz ortogonal*

con eigenvectores correspondientes $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$, *respectivamente, como vectores columna.*

EJEMPLO 6 Transformación a los ejes principales. Secciones cónicas

Determinar el tipo de sección cónica representa la siguiente forma cuadrática y transformarla a los ejes principales:

$$Q = 17x_1^2 - 30x_1x_2 + 17x_2^2 = 128.$$

Solución. Se tiene $Q = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Se obtiene así la ecuación característica $(17 - \lambda)^2 - 15^2 = 0$. Tiene las raíces $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 32$. Por tanto (8) queda

$$Q = 2y_1^2 + 32y_2^2.$$

Se observa que $Q = 128$ representa la elipse $2y_1^2 + 32y_2^2 = 128$, es decir,

$$\frac{y_1^2}{8^2} + \frac{y_2^2}{2^2} = 1.$$

Si desea conocerse la dirección de los ejes principales en las coordenadas x_1x_2, es necesario determinar eigenvectores normalizados a partir de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ con $\lambda = \lambda_1 = 2$ y $\lambda = \lambda_2 = 32$ y después usar (7). Se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

por tanto,

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} x_1 &= y_1/\sqrt{2} - y_2/\sqrt{2} \\ x_2 &= y_1/\sqrt{2} + y_2/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Esta es una rotación de 45°. Los resultados obtenidos concuerdan con los de la sección 7.11, ejemplo 1, excepto por la notación. Ver también la figura 136 en dicho ejemplo. ▮

Problemas de la sección 7.14

Transformaciones de semejanza

Encontrar $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. Encontrar los eigenvalores de $\hat{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{A}$ y comprobar que son iguales. Encontrar los eigenvectores correspondientes y de $\hat{\mathbf{A}}$, calcular $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ y comprobar que son eigenvectores de $\mathbf{A}$.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -15 \\ -3 & -4 & 9 \\ 5 & 0 & -15 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Trazas de matrices semejantes

La suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $n \times n$ se llama la **traza de A**; en consecuencia, traza $\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

9. Demostrar que traza $\mathbf{AB} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{li}$ = traza **BA**, donde $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ y $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ son matrices de $n \times n$.
10. Usando el problema 9, demostrar que las matrices semejantes tienen trazas iguales.
11. **(Suma de los eigenvalores)** Demostrar que traza **A** es igual a la suma de los eigenvalores de **A**, cada uno considerado tantas veces como lo indica su multiplicidad algebraica.
12. Usando el problema 11, demostrar que traza $\hat{\mathbf{A}}$ = traza **A** cuando $\hat{\mathbf{A}}$ es semejante a **A**.

Encontrar una base de eigenvectores que formen un sistema unitario (o un sistema ortogonal real).

13. $\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$
14. $\begin{bmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{bmatrix}$
15. $\begin{bmatrix} 0.8i & 0.6i \\ 0.6i & -0.8i \end{bmatrix}$
16. $\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$
17. $\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$
18. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}i \end{bmatrix}$

Diagonalización

Encontrar una base de eigenvectores y diagonalizar:

19. $\begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$
20. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
22. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
23. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
24. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Transformación de formas cuadráticas a los ejes principales. Secciones cónicas

Determinar el tipo de sección cónica (o pares de rectas) que representan las formas cuadráticas dadas. Transformarlas a los ejes principales. Expresar $\mathbf{x}^{\mathsf{T}} = [x_1 \ \ x_2]$ en términos del nuevo vector de coordenadas $\mathbf{y}^{\mathsf{T}} = [y_1 \ \ y_2]$, como en el ejemplo 6.

25. $x_1^2 + 24x_1x_2 - 6x_2^2 = 5$
26. $2x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 4x_2^2 = 5$
27. $3x_1^2 + 4\sqrt{3}x_1x_2 + 7x_2^2 = 9$
28. $-3x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2 = 0$
29. $x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 = 10$
30. $6x_1^2 + 16x_1x_2 - 6x_2^2 = 10$

7.15 ESPACIOS VECTORIALES, ESPACIOS CON PRODUCTO INTERIOR, TRANSFORMACIONES LINEALES. *OPCIONAL*

De la sección 7.5 se recuerda que el **espacio vectorial real $\mathbf{R}^n$** es el conjunto de todos los vectores reales con n componentes (por tanto, cada vector es un conjunto ordenado de n números reales), con las dos operaciones algebraicas de adición de vectores y multiplicación por escalares (números reales). Asimismo, al tomar n números *complejos* ordenados como vectores y números *complejos* como escalares, se obtiene el **espacio vectorial complejo** C^n (ver la sección 7.13).

Hay otros conjuntos de interés práctico (conjuntos de matrices, de funciones, de transformaciones, etc.) para los que pueden definirse de manera natural la adición y la multiplicación por escalares. El deseo de tratar tales conjuntos como "espacios vectoriales" sugiere la creación, a partir del "**modelo concreto**" R^n, del "**concepto abstracto**" de un "espacio vectorial real" V tomando las propiedades más básicas de R^n como axiomas mediante los cuales se define V, propiedades sin las cuales no sería posible crear una teoría útil y aplicable de esas situaciones más generales. La elección de axiomas adecuados no es es fácil, sino que requiere de experiencia, obtenida en ocasiones durante un largo periodo de tiempo. En el presente caso, el siguiente sistema de axiomas resultó ser de utilidad; de hecho, obsérvese que cada axioma expresa una propiedad simple de R^n, o de R^3.

Definición de espacio vectorial real

Un conjunto no vacío V de elementos $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \cdots$ se denomina *espacio vectorial real* (o *espacio lineal real*), y estos elementos se llaman **vectores**[18] si en V están definidas dos operaciones algebraicas (llamadas *adición de vectores* y *multiplicación por escalares*) como sigue.

I. La ***adición de vectores*** asocia con cada par de vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ de V un vector único de V, llamado la *suma* de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ y denotada por $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, de tal modo que los siguientes axiomas se satisfacen.

I.1 *Conmutatividad.* Para dos vectores cualesquiera $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ de V,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

I.2 *Asociatividad.* Para tres vectores cualesquiera $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ de V,

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \qquad (\text{denotada } \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

I.3 Existe un vector único en V, llamado el *vector cero* y denotado por $\mathbf{0}$, tal que para cualquier $\mathbf{a}$ en V,

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}.$$

[18] Sin importar lo que sean en realidad; esta convención no produce confusión ya que en cualquier caso específico la naturaleza de esos elementos es clara por el contexto.

I.4 Para toda **a** en V existe un vector único en V que se denota por $-\mathbf{a}$ y es tal que

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

II. Multiplicación por escalares. Los números reales se denominan **escalares.** La multiplicación por escalares asocia con cada **a** en V y cualquier escalar c un vector único de V, llamado el *producto* de c y **a** y denotado por $c\mathbf{a}$ (o $\mathbf{a}c$) de tal modo que los siguientes se satisfacen.

II.1 *Distributividad.* Para cualquier escalar c y cualesquiera vectores **a** y **b** en V,

$$c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}.$$

II.2 *Distributividad.* Para cualesquiera escalares c y k y cualquier **a** en V,

$$(c + k)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + k\mathbf{a}.$$

II.3 *Asociatividad.* Para cualesquiera escalares c y k y cualquier **a** en V,

$$c(k\mathbf{a}) = (ck)\mathbf{a} \qquad \text{(denotado } ck\mathbf{a}\text{)}$$

II.4 Para toda **a** en v,

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$ ∎

Un **espacio vectorial complejo** se obtiene si, en lugar de números reales, se toman números complejos como escalares.

Conceptos básicos relacionados con un espacio vectorial

Estos se definen como en la sección 7.5.

Una **combinación lineal** de vectores $\mathbf{a}_{(1)}, \cdots, \mathbf{a}_{(m)}$ en un espacio vectorial V es una expresión

$$c_1\mathbf{a}_{(1)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} \qquad (c_1, \cdots, c_m \text{ escalares cualesquiera}).$$

Estos vectores forman un **conjunto linealmente independiente** (abreviando, se llaman **linealmente independientes**) si

$$(1) \qquad c_1\mathbf{a}_{(1)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{0}$$

implica que $c_1 = 0, \cdots, c_m = 0$; en caso contrario se llaman **linealmente dependientes.** Obsérvese que (1) con $m = 1$ es $c\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e indica que un solo vector **a** es linealmente independiente si y sólo si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

V tiene **dimensión n**, o es **n-dimensional**, si contiene un conjunto linealmente independiente de n vectores, llamado una **base** de V, en tanto que cualquier conjunto con más de n vectores en V es linealmente dependiente. Entonces cada vector en V puede escribirse de manera única como una combinación lineal de los vectores de la base.

EJEMPLO 1 Espacio vectorial de matrices

Las matrices reales de 2×2 forman un espacio vectorial real de cuatro dimensiones. Una base es

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ya que cualquier $\mathbf{A} = [a_{jk}] = a_{11}\mathbf{B}_{11} + a_{12}\mathbf{B}_{12} + a_{21}\mathbf{B}_{21} + a_{22}\mathbf{B}_{22}$ en forma única. De manera similar, las matrices de $m \times n$ con m y n fijas forman un espacio vectorial de dimensión mn. ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial de todas las matrices antisimétricas de 3×3? ¿Puede el lector encontrar una base? ∎

EJEMPLO 2 Polinomios

El conjunto de todos los polinomios constantes, lineales y cuadráticos en x forma un espacio vectorial bajo las operaciones comunes de adición y multiplicación por un número real, ya que estas dos operaciones dan como resultado polinomios cuyo grado no excede 2, y los axiomas de la definición dada se establecen por cálculo directo. Este espacio tiene dimensión 3. Una base es $\{1, x, x^2\}$. ∎

EJEMPLO 3 Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden

Las soluciones de una de estas ecuaciones en un intervalo fijo $a < x < b$ forman un espacio vectorial bajo las operaciones comunes de adición y multiplicación por un número ya que ambas producen de nuevo una solución, por el teorema fundamental 1 de la sección 2.1, y I.1 a II.4 se establecen por cálculo directo. ¿Las soluciones de una ecuación diferencial lineal no homogénea forman un espacio vectorial? ∎

Si un espacio vectorial V contiene un conjunto linealmente independiente de n vectores para cada n, sin importar lo grande que sea, entonces V se llama **de dimensión infinita**, (n-dimensional) por oposición a un espacio vectorial de *dimensión finita* como se definió antes. Un ejemplo es el espacio de todas las funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ del eje x, como se menciona sin demostración.

Espacios con producto interior

Por la sección 7.3 se sabe que para los vectores **a** y **b** en R^n puede definirse un producto interior $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$. Esta definición puede ampliarse a espacios vectoriales reales generales tomando las propiedades básicas de $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ como axiomas de un producto interior "abstracto", denotado por $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Definición de un espacio con producto interior real

Un espacio vectorial real V se llama *espacio con producto interior real* (o *preespacio real de Hilbert*[19]) si tiene la siguiente propiedad. Con cada par de vectores **a** y **b** en V

[19] DAVID HILBERT (1862-1943), gran matemático alemán, enseñó en Königsberg y Göttingen y fue el creador de la famosa escuela matemática de Göttingen. Se le conoce por su trabajo básico en álgebra, cálculo de variaciones, ecuaciones integrales, análisis funcional y lógica matemática. Sus "Fundamentos de geometría" contribuyeron a que el método axiomático obtuviera reconocimiento general. Sus famosos 23 problemas (presentados en 1900 en el Congreso Internacional de Matemáticas en París) influyeron de manera considerable en el desarrollo de las matemáticas modernas.

Si V es de dimensión finita, se trata en realidad del llamado *espacio de Hilbert*; ver la referencia [9] p. 98, mencionada en el apéndie 1.

está asociado un número real, el cual se denota por (**a**, **b**) y se llama el **producto interior** de **a** y **b**, de tal modo que los siguientes axiomas se satisfacen.

I. Para cualesquiera escalares q_1 y q_2 y cualesquiera vectores **a**, **b**, **c** en V,

$$(q_1\mathbf{a} + q_2\mathbf{b}, \mathbf{c}) = q_1(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + q_2(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \qquad (\textit{Linealidad}).$$

II. Para cualesquiera vectores **a** y **b** en V,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) \qquad (\textit{Simetría}).$$

III. Para cualquier **a** en V,

$$\left.\begin{array}{r} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geqq 0, \quad \text{y} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathbf{a} = \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad (\textit{Ser positivo definido}).$$

Los vectores cuyo producto interior es cero se llaman **ortogonales**.

La *longitud* o **norma** de un vector en V se define ahora por

(2) $$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \qquad (\geqq 0),$$

Ésta expresión generaliza (8) de la sección 7.12.

Un vector de norma 1 se llama **vector unitario**.

A partir de estos axiomas y de (2) puede deducirse la desigualdad básica

(3) $$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leqq \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \qquad (\textit{Desigualdad de Schwarz}^{20}),$$

a partir de esta expresión

(4) $$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leqq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \qquad (\textit{Desigualdad del triángulo}),$$

y por un cálculo directo simple

(5) $$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2) \qquad (\textit{Igualdad del paralelogramo}).$$

EJEMPLO 4 Espacio euclidiano de dimensión *n*

R^n con el producto interior de la sección 7.3,

(6) $$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n,$$

[20] HERMANN AMANDUS SCHWARZ (1843-1921), matemático alemán, sucesor de Weierstrass en Berlín, conocido por su trabajo en análisis complejo (mapeo conforme), geometría diferencial y cálculo de variaciones (superficies mínimas).

se llama *espacio euclidiano de dimensión n* y se denota por E^n o simplemente por R^n. Los axiomas I-III se cumplen, como se demuestra con cálculos directos. La ecuación (2) da como resultado la "**norma euclidiana**" (8) de la sección 7.12,

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}. \tag{7}$$

EJEMPLO 5 Un producto interior para funciones

El conjunto de todas las funciones continuas con valores reales $f(x)$, $g(x)$, $\cdots$ en un intervalo dado $a \leqq x \leqq \beta$ forma un espacio vectorial real bajo las operaciones comunes de adición de funciones y multiplicación por escalares (números reales). En este espacio puede definirse un producto interior por la integral

$$(f, g) = \int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx. \tag{8}$$

Los axiomas I-III pueden comprobarse por cálculo directo. La ecuación (2) da como resultado la norma

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_\alpha^\beta f(x)^2\,dx}. \tag{9}$$

Los ejemplos citados ofrecen una primera impresión de la amplia generalidad de los conceptos abstractos de espacios vectoriales y espacios con producto interior. Los detalles adicionales pertenecen a cursos más avanzados (sobre análisis funcional, que significa análisis abstracto moderno; ver la referencia [9] en el apéndice 1) y no pueden discutirse aquí. En su lugar, se aborda ahora un tema relacionado en el que las matrices desempeñan un papel central.

Transformaciones lineales

Sean X y Y espacios vectoriales cualesquiera. A cada vector $\mathbf{x}$ en X se le asigna un vector único $\mathbf{y}$ en Y. Se dice entonces que se da un **mapeo** (o **transformación** u **operador**) de X en Y. Dicho mapeo se denota por una letra mayúscula, por ejemplo F. El vector $\mathbf{y}$ en Y asignado a un vector $\mathbf{x}$ en X se llama la **imagen** de $\mathbf{x}$ y se denota por $F(\mathbf{x})$ [o $F\mathbf{x}$, sin paréntesis].

F se llama **mapeo lineal** o **transformación lineal** si para todos los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{x}$ en X y los escalares c,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v} + \mathbf{x}) &= F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{x}) \\ F(c\mathbf{x}) &= cF(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{10}$$

Transformación lineal del espacio R^n en el espacio R^m

En adelante, se hace $X = R^n$ y $Y = R^m$. Entonces cualquier matriz real $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $n \times n$ da una transformación de R^n en R^m,

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{11}$$

Puesto que $\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{x}$ y $\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{A}\mathbf{x}$, esta transformación es lineal.

Se demuestra que, recíprocamente, cualquier transformación lineal F de R^n en R^m puede darse en términos de una matriz **A** de $m \times n$, después de que se ha elegido una base de R^n y una base de R^m. Esto puede probarse como sigue.

Sea $\mathbf{e}_{(1)}, \cdots, \mathbf{e}_{(n)}$ cualquier base de R^n. Entonces todo **x** en R^n tiene una representación única

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_{(1)} + \cdots + x_n\mathbf{e}_{(n)}.$$

Puesto que F es lineal, esto implica que para la imagen $F(\mathbf{x})$:

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1\mathbf{e}_{(1)} + \cdots + x_n\mathbf{e}_{(n)}) = x_1F(\mathbf{e}_{(1)}) + \cdots + x_nF(\mathbf{e}_{(n)}).$$

Por tanto, F se encuentra determinada de manera única por las imágenes de los vectores de una base de R^n. Se elige ahora para R^n la "**base normal**"

$$(12) \qquad \mathbf{e}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{e}_{(j)}$ tiene su j-ésima componente igual a 1 y las demás 0. Puede determinarse ahora una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $m \times n$ tal que para todo **x** en R^n y toda imagen $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ en R^m,

$$\mathbf{y} = F(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

De hecho, de la imagen $\mathbf{y}^{(1)} = F(\mathbf{e}_{(1)})$ de $\mathbf{e}_{(1)}$ se obtiene la condición

$$\mathbf{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_m^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a partir de la cual puede determinarse la primera columna de **A**, a saber, $a_{11} = y_1^{(1)}$, $a_{21} = y_2^{(1)}, \cdots, a_{m1} = y_m^{(1)}$. De manera similar, a partir de la imagen de $\mathbf{e}_{(2)}$ se obtiene la segunda columna de **A** y así sucesivamente. Se termina así la demostración. ∎

Se dice que **A representa** a F, o que *es una representación de F*, con respecto a las bases de R^n y R^m. En términos muy generales, la finalidad de una "*representación*" es la sustitución de un objeto de estudio por otro objeto cuyas propiedades sean accesibles con mayor facilidad.

La base normal (12) de R^3 acostumbra escribirse $\mathbf{e}_{(1)} = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_{(2)} = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_{(3)} = \mathbf{k}$; por tanto

$$(13) \qquad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 6 Transformaciones lineales

Interpretadas como transformaciones de coordenadas cartesianas en el plano, las matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representan una reflexión en la recta $x_2 = x_1$, una reflexión en el eje x_1, una reflexión en el origen y un alargamiento (cuando $a > 1$, o una contracción cuando $0 < a < 1$) en la dirección x_1, respectivamente. ∎

EJEMPLO 7 Transformaciones lineales

La discusión que precede al ejemplo 6 es más simple de lo que podría parecer a primera vista. Para ver esto, encontrar **A** que represente la transformación lineal que mapea (x_1, x_2) sobre $(2x_1 - 5x_2, 3x_1 + 4x_2)$.
Solución. Puesto que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{se mapean sobre} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix},$$

respectivamente, se obtiene, de acuerdo con la discusión anterior,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Esta expresión se comprueba encontrando

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 5x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}.$$

El lector también puede obtener **A** de inmediato escribiendo la transformación dada en la forma

$$y_1 = 2x_1 - 5x_2$$
$$y_2 = 3x_1 + 4x_2.$$

∎

Si **A** en (11) es cuadrada, de $n \times n$, entonces (11) mapea R^n en R^n. Si esta **A** es no singular, de modo que existe $\mathbf{A}^{-1}$ (ver la sección 7.7), entonces la premultiplicación de (11) por $\mathbf{A}^{-1}$ y el uso de $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ da como resultado la **transformación inversa**

$$(14) \qquad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}.$$

Mapea todo $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ sobre ese $\mathbf{x}$ que por (11) es mapeado sobre $\mathbf{y}_0$. *La inversa de una transformación lineal es en sí misma lineal*, porque está dada por una matriz, como indica (14).

Se llega así al final del capítulo 7 sobre álgebra lineal, en el que se estudiaron las operaciones algebraicas con matrices y vectores y las aplicaciones a sistemas de ecuaciones lineales y a problemas de eigenvalores. El capítulo siguiente se dedica a la aplicación del cálculo diferencial a funciones vectoriales en el espacio tridimensional, un campo de importancia fundamental en la ingeniería y la física.

Problemas de la sección 7.15

Espacios vectoriales, bases

¿El conjunto dado (tomado con la adición y la multiplicación por escalares comunes) es un espacio vectorial o no? (Dar una razón.) Si la respuesta es afirmativa, determinar la dimensión y encontrar una base. (Ver la sección 7.5 para problemas similares.)

1. Todos los polinomios en x, de grado que no exceda 4.
2. Todas las matrices reales simétricas de 3×3.
3. Todas las matrices reales antisimétricas de 2×2.
4. Todos los vectores en R^3 que satisfacen $v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$.
5. Todas las matrices reales de 4×4 con elementos positivos.
6. Todas las matrices reales de 2×3 cuyo primer renglón es cualquier múltiplo de $[1 \;\; 0 \;\; 2]$.
7. Todas las funciones $f(x) = (ax + b)e^{x}$ con constantes a y b arbitrarias.
8. Todos los quintetos ordenados de números reales no negativos.

Independencia lineal, bases. (Ver la sección 7.5 para problemas adicionales.)

9. Si un subconjunto S_0 de un conjunto S es linealmente independiente, demostrar que S es en sí mismo linealmente independiente.
10. Demostrar que un subconjunto de un conjunto linealmente independiente es en sí mismo linealmente independiente.
11. Encontrar tres bases diferentes de R^2.
12. **(Unicidad)** Demostrar que la representación $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_{(1)} + \cdots + c_n\mathbf{a}_{(n)}$ de cualquier vector $\mathbf{v}$ dado en un espacio vectorial V de dimensión n en términos de una base $\mathbf{a}_{(1)}, \cdots, \mathbf{a}_{(n)}$ de V es única.

Producto interior ortogonalidad

Encontrar la norma euclidiana de los vectores:

13. $[1 \;\; 3 \;\; -1]^T$
14. $[2 \;\; 4 \;\; 1 \;\; 3]^T$
15. $[3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 4]^T$
16. $[4 \;\; 2 \;\; 0]^T$
17. $[5 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 6]^T$
18. $[\frac{1}{2} \;\; 3 \;\; \frac{1}{4} \;\; 2]^T$

Usando la norma euclidiana, comprobar:

19. La desigualdad de Schwarz para los vectores de los problemas 13 y 16.
20. La desigualdad de Schwarz para los vectores de los problemas 14 y 18.
21. La desigualdad del triángulo para los vectores de los problemas 15 y 17.
22. La igualdad del paralelogramo para los vectores $[2 \;\; 1]^T$ y $[1 \;\; 3]^T$. Graficar el paralelogramo con estos lados y explicar el significado geométrico de esta igualdad.
23. Encontrar todos los vectores $\mathbf{v}$ ortogonales a $\mathbf{a} = [1 \;\; 2 \;\; 0]^T$. ¿Forman un espacio vectorial?
24. Usando (6), encontrar todos los vectores unitarios $\mathbf{v} = [v_1 \;\; v_2]$ ortogonales a $[3 \;\; -4]$.

Transformaciones lineales

Encontrar la transformación inversa:

25. $y_1 = 3x_1 - x_2$
$y_2 = -5x_1 + 2x_2$

26. $y_1 = 4x_1 + 3x_2$
$y_2 = 3x_1 + 2x_2$

27. $y_1 = 2x_1 + 4x_2 + x_3$
$y_2 = x_1 + 2x_2 + x_3$
$y_3 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$

28. $y_1 = x_1 + 3x_3$
$y_2 = 2x_2 + x_3$
$y_3 = 3x_1 + x_2 + 10x_3$

29. $y_1 = 0.2x_1 - 0.1x_2$
$y_2 = -0.2x_2 + 0.1x_3$
$y_3 = 0.1x_1 + 0.1x_3$

30. $y_1 = 3x_1 - x_2 + x_3$
$y_2 = -15x_1 + 6x_2 - 5x_3$
$y_3 = 5x_1 - 2x_2 + 2x_3$

Preguntas y problemas de repaso del capítulo 7

1. Sea **A** una matriz de 20×20 y **B** una matriz de 20×10. Indicar si las siguientes expresiones están definidas o no: $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}^T$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{AA}^T$, $\mathbf{B}^2$, $\mathbf{BB}^T$, $\mathbf{B}^T\mathbf{BA}$. (Dar razones.)
2. ¿Qué propiedades de la multiplicación de matrices son "no naturales" (es decir, diferentes de las de la multiplicación de números)?
3. ¿De qué manera puede darse el rango de una matriz en términos de vectores renglón? ¿De vectores columna? ¿De determinantes?
4. ¿Qué sabe el lector acerca de la existencia y el número de soluciones de un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales? ¿De un sistema homogéneo?
5. ¿Para qué sirve la eliminación de Gauss? ¿Cuál es la idea básica de este método? ¿Por qué esta eliminación generalmente es mejor que la regla de Cramer? ¿Qué se entiende por pivoteo?
6. ¿Qué es la inversa de una matriz? ¿Cuándo existe? ¿Cómo se determinaría en la práctica?
7. Dar ejemplos simples de sistemas lineales de ecuaciones sin soluciones. Con una solución única. Con más de una solución.
8. Escribir de memoria las fórmulas de $(\mathbf{AB})^T$ y $(\mathbf{AB})^{-1}$. Elaborar un ejemplo.
9. ¿Los vectores renglón de una matriz de 8×6 pueden ser linealmente independientes?
10. ¿Qué son las matrices simétrica, antisimétrica y ortogonal? ¿Las matrices hermitiana, antihermitiana y unitaria?
11. Demostrar que las matrices simétricas de 4×4 forman un espacio vectorial. ¿Cuál es su dimensión? Encontrar una base.
12. ¿Qué es la nulidad de una matriz **A**? ¿El espacio renglón de **A**? ¿El espacio columna de **A**?
13. Formular las definiciones de un eigenvalor y un eigenvector de una matriz **A**. ¿Qué es el espectro de **A**? ¿La ecuación característica?
14. ¿Qué sabe el lector acerca de los eigenvalores de las matrices del problema 10?
15. ¿Existen matrices cuadradas sin eigenvalores? ¿Una matriz real puede tener eigenvalores complejos? ¿Una matriz real siempre tiene un eigenvalor real?

Sean $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 8 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -9 \end{bmatrix}$. Encontrar

Encontrar una base de eigenvectores y diagonalizar:

59. $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$ **60.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **61.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

¿Qué tipo de sección cónica representa la forma cuadrática dada? Transformarla a los ejes principales. Expresar $[x_1 \;\; x_2]^T$ en términos de las nuevas coordenadas.

62. $10x_1^2 - 9x_1x_2 + \frac{25}{4}x_2^2 = 13$ **63.** $7x_1^2 + 48x_1x_2 - 7x_2^2 = 25$

64. $4x_1x_2 + 3x_2^2 = 1$ **65.** $801x_1^2 - 600x_1x_2 + 1396x_2^2 = 169$

Encontrar $\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ donde

66. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5i & 2+i \\ -2+i & i \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2i \\ 3 \end{bmatrix}$

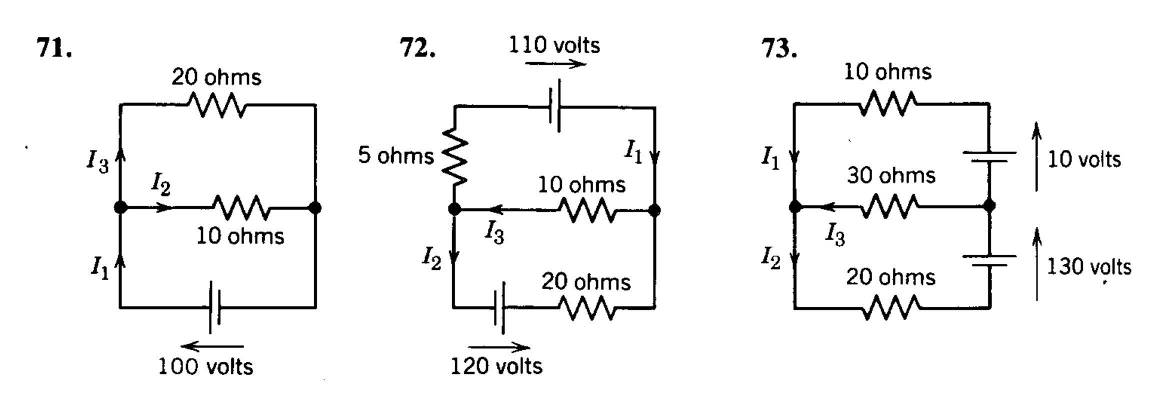
67. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2i & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

68. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ **69.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -i & 2i \\ i & 1 & 0 \\ -2i & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$

70. (**Matrices del spin de Pauli**) Encontrar los eigenvalores y los eigenvectores de las llamadas *matrices del spin de Pauli* y demostrar que $\mathbf{S}_x\mathbf{S}_y = i\mathbf{S}_z$, $\mathbf{S}_y\mathbf{S}_x = -i\mathbf{S}_z$, $\mathbf{S}_x^2 = \mathbf{S}_y^2 = \mathbf{I}$ donde

$$\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Redes. Encontrar las corrientes en las siguientes redes.



Redes de cuatro terminales. Suponer que la corriente i_1 y el voltaje u_1 de entrada de la red de cuatro terminales de la figura 138 se relacionan con la corriente i_2 y el voltaje u_2 de salida de acuerdo con

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{T}\mathbf{v}_2, \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

y donde **T** se denomina la matriz de transmisión de la red. Comprobar la forma de **T**:

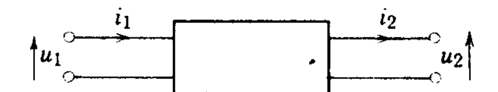
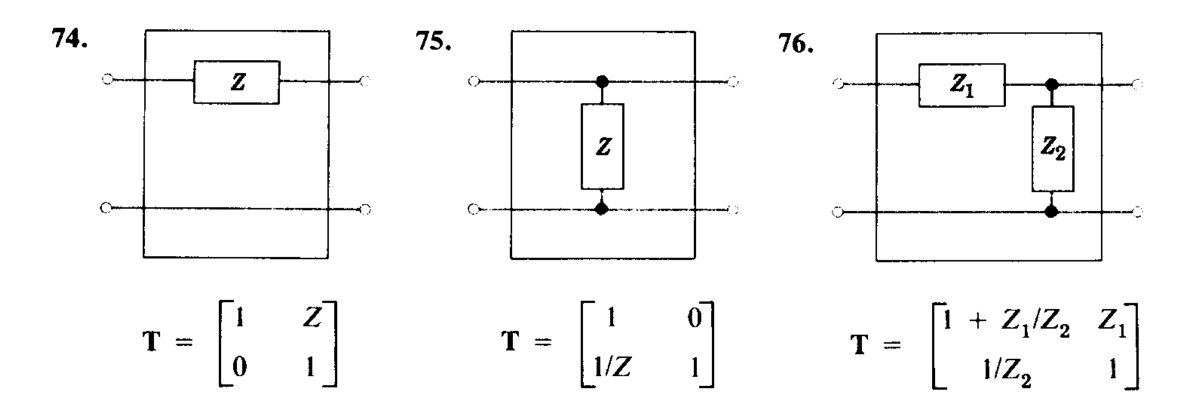


Figura 138. Red de cuatro terminales.



74. $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

75. $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{bmatrix}$

76. $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 + Z_1/Z_2 & Z_1 \\ 1/Z_2 & 1 \end{bmatrix}$

77. Demostrar que para las redes en cascada de la figura 139 se tiene $\mathbf{v}_1 = \mathbf{T}\mathbf{v}_2$ con $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ como antes.

78. Usar el problema 77 para obtener la matriz en el problema 76 a partir de las matrices de los problemas 74 y 75.



Figura 139. Redes de cuatro terminales en cascada.

Resumen del capítulo 7

Álgebra lineal: Matrices, vectores, determinantes

Una **matriz** $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $m \times n$ es un arreglo rectangular de números ("elementos" o "entradas") dispuestos en m renglones horizontales y n columnas verticales. Si $m = n$, la matriz se llama **cuadrada**. Una matriz $1 \times n$ se llama **vector renglón** y una matriz $m \times 1$ **vector columna** (ver la sección 7.1).

La **suma** $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ de matrices del mismo **tamaño** (es decir, ambas de $m \times n$) se obtiene sumando los elementos correspondientes. El **producto** de **A** por un escalar c se obtiene multiplicando cada a_{jk} por c (ver la sección 7.2).

El **producto** $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ de una matriz $\mathbf{A}$ de $m \times n$ y una matriz $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ de $r \times p$ solamente está definido cuando $r = n$ y es la matriz $\mathbf{C} = [c_{jk}]$ de $m \times p$ con elementos

(1) $$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk}$$ (renglón j de $\mathbf{A}$ multiplicado por la columna k de $\mathbf{B}$)

Esta multiplicación se encuentra motivada por la composición de **transformaciones lineales** (secciones 7.3, 7.15). Es asociativa, pero ***no es conmutativa***: si $\mathbf{AB}$ está definida, $\mathbf{BA}$ puede no estarlo, peró aun cuando $\mathbf{BA}$ esté definida, en general $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Asimismo, $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ puede no implicar que $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$ (secciones 7.3, 7.7):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[1 \quad 2] \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [11], \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \quad 2] = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Una de las principales aplicaciones de las matrices se refiere a los **sistemas lineales de ecuaciones**

(2) $$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$ (Sección 7.4)

(m ecuaciones en n incógnitas $x_1, \cdots, x_n$; $\mathbf{b}$ dado). El método de solución más importante es la **eliminación de Gauss** (sección 7.4), que reduce el sistema a la forma "triangular" por medio de *operaciones elementales sobre los renglones*, las cuales dejan invariable al conjunto de soluciones. (Los aspectos numéricos y las variantes tales como el *método de Doolittle* se discuten en las secciones 19.1 y 19.2.)

La *regla de Cramer* (sección 7.9) representa las incógnitas de un sistema (2) de n ecuaciones en n incógnitas como cocientes de determinantes; para el trabajo numérico no resulta práctica. Los **determinantes** (sección 7.8) han perdido importancia, pero conservan su lugar en los problemas de eigenvalores, geometría elemental, etcétera.

La **inversa** $\mathbf{A}^{-1}$ de una matriz cuadrada satisface $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Existe si y sólo si $\det \mathbf{A} \neq 0$. Puede calcularse por medio de la *eliminación de Gauss-Jordan.* Ver las secciones 7.7, 7.9.

El **rango** r de una matriz $\mathbf{A}$ es el número máximo de renglones o columnas de $\mathbf{A}$ linealmente independientes, o de manera equivalente, el número de renglones de la mayor submatriz cuadrada de $\mathbf{A}$ con determinante diferente de cero

(secciones 7.5, 7.9). El sistema (2) tiene soluciones si y sólo si rango **A** = rango [**A** **b**], donde [**A** **b**] es la *matriz aumentada* (teorema fundamental, sección 7.6). El *sistema homogéneo*

$$(3) \qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

tiene soluciones $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ("soluciones no triviales") si y sólo si rango $\mathbf{A} < n$, en el caso $m = n$ o, de manera equivalente, si y sólo si det $\mathbf{A} = 0$ (secciones 7.6, 7.9).

Por tanto el sistema de n ecuaciones en n incógnitas

$$(4) \qquad \mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \qquad \text{o} \qquad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

tiene soluciones $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ si y sólo si λ es una raíz de la *ecuación característica*

$$(5) \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \qquad \text{(Sección 7.10).}$$

A tal número (real o complejo) λ se le llama **eigenvalor** de **A** y a esa solución $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ un **eigenvector** de **A** correspondiente a este λ. La ecuación (4) se denomina **problema** (algebraico) **de eigenvalores** (sección 7.10). Los problemas de eigenvalores son de gran importancia en la física y la ingeniería (sección 7.11) y también tienen aplicaciones en la economía y la estadística. Son básicos en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales (capítulo 4).

La *transpuesta* $\mathbf{A}^T$ de una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ es $\mathbf{A}^T = [a_{kj}]$; los renglones pasan a ser columnas y viceversa (sección 7.1). Para un producto, $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (sección 7.3). El *conjugado complejo* de **A** es $\overline{\mathbf{A}} = [\overline{a}_{jk}]$. Seis clases importantes de matrices cuadradas de importancia práctica surgen de lo anterior: una matriz real **A** se llama **simétrica** *real* si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, **antisimétrica** *real* si $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, **ortogonal** si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ (secciones 7.2, 7.12); una matriz compleja se llama **hermitiana** si $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}$, **antihermitiana** si $\overline{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{A}$ y **unitaria** si $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}^{-1}$ (sección 7.13). Los eigenvalores de las matrices hermitianas (y las simétricas reales) son reales; los de las antihermitianas (y las antisimétricas reales) son imaginarios puros o 0; los de las matrices unitarias (y las ortogonales) tienen valor absoluto 1 (sección 7.13).

La diagonalización de matrices y la transformación de formas cuadráticas a los ejes principales se discuten en la sección 7.14.

Los espacios vectoriales generales y los espacios con producto interior se discuten en la sección 7.15. Para R^n y C^n, ver también las secciones 7.5 y 7.13.

Capítulo

8

Cálculo diferencial vectorial. Gradiente, divergencia, rotacional

El tema de este capítulo son los vectores y las funciones vectoriales en el espacio tridimensional, así como la aplicación del cálculo diferencial a los mismos. Esto lleva a útiles aplicaciones en la física y la ingeniería, particularmente en relación con fuerzas y velocidades de movimientos. En el caso de los vectores y las funciones vectoriales en el espacio tridimensional se tiene la ventaja de que es posible dar interpretaciones *geométricas* de los conceptos y las relaciones, aunadas a los aspectos algebraicos. Se empieza con la caracterización geométrica de los vectores en términos de segmentos dirigidos en el espacio. Se verá que los vectores proporcionan una notación abreviada que simplifica de manera considerable muchos de los cálculos y ayuda a visualizar las cantidades físicas y geométricas así como las relaciones entre ellas. Por todas estas razones, los métodos vectoriales son de uso generalizado en las matemáticas aplicadas. Importante para el ingeniero es el enorme impacto de estos métodos en el estudio de fenómenos físicos, tales como la elasticidad, la dinámica de fluidos, la conducción de calor, la electrostática y las ondas en sólidos y fluidos, que el ingeniero debe entender como la base en el diseño y construcción de sistemas tales como aviones, generadores láser, sistemas termodinámicos y robots.

Las secciones 8.1-8.3 se concentran en las operaciones *algebraicas* elementales con vectores en el espacio tridimensional. El cálculo vectorial, integrado por el **cálculo diferencial vectorial** (tratado en este capítulo) y el **cálculo integral vectorial** (capítulo 9) se inicia con una discusión de las funciones vectoriales, que representan campos vectoriales (sección 8.4) y tienen diversas aplicaciones físicas y geométricas. Después se amplían los conceptos básicos del cálculo diferencial a las funciones vectoriales en una forma simple y natural. En las secciones 8.5-8.7 se muestra que las funciones vectoriales son útiles en el estudio de curvas y de sus aplicaciones como trayectorias de cuerpos en

movimiento en la mecánica (sección 8.6). Conceptos de importancia física y geométrica en relación con campos escalares y vectoriales son los de gradiente (sección 8.9), divergencia (sección 8.10) y rotacional (sección 8.11). (Los teoremas con integrales en los que intervienen estos conceptos se considerarán en el capítulo 9.) En la última sección (opcional, sección 8.12) se muestra la manera en que el gradiente, la divergencia y el rotacional así como el laplaciano pueden transformarse en coordenadas curvilíneas generales.

***Este capítulo se mantendrá independiente del capítulo** 7.*[1]

Prerrequisitos para este capítulo: En la sección 8.3 se hará elemental uso de determinantes de segundo y tercer orden.

Secciones que pueden omitirse en un curso más corto: 8.6-8.8, 8.12.

Bibliografía: Apéndice 1, parte B.

Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

8.1 ÁLGEBRA VECTORIAL EN ESPACIOS BIDIMENSIONALES Y TRIDIMENSIONALES

En geometría y física, así como en aplicaciones de ingeniería, se han usado dos clases de cantidades, escalares y vectores. Un **escalar** es una cantidad que está determinada por su magnitud, el número de unidades que comprende medido en una escala adecuada. Por ejemplo, la longitud, la temperatura y el voltaje son escalares.

Un **vector** es una cantidad que está determinada tanto por su magnitud como por su dirección; así, es una **flecha** o **segmento de recta dirigido**. Por ejemplo, una fuerza es un vector, al igual que la velocidad, que da la rapidez y la dirección del movimiento (figura 140).

Los vectores se denotan por minúsculas en negritas[2] **a**, **b**, **v**, etc.

Un vector (flecha) tiene una cola, llamada su **punto inicial** y una punta, llamada su **punto final**. Por ejemplo, en la figura 141, el triángulo sufre una traslación (des-

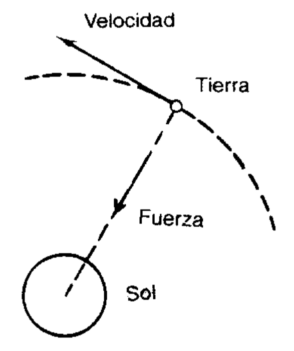


Figura 140. Fuerza y velocidad.

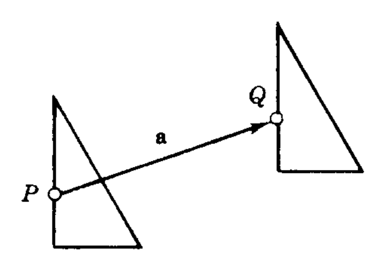


Figura 141. Traslación.

[1] Los lectores familiarizados con el capítulo 7 notarán que el enfoque presente concuerda con el de dicho capítulo. La restricción a dos y tres dimensiones dará lugar a una teoría más rica con aplicaciones físicas, de ingeniería y geométricas básicas.

[2] Es la convención en el material impreso; cuando se escribe a mano, los vectores pueden caracterizarse con flechas, por ejemplo, $\vec{a}$ (en lugar de **a**), $\vec{b}$, etcétera.

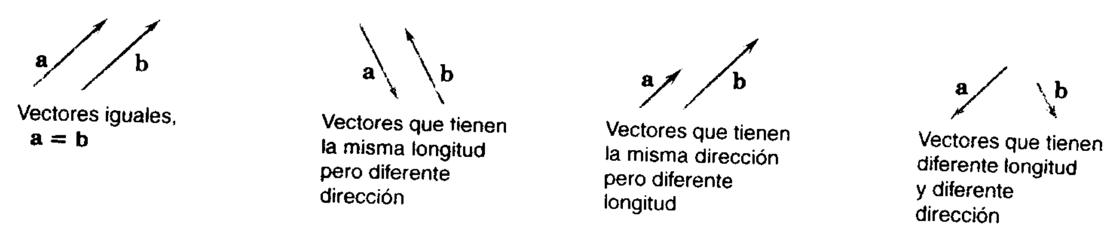


Figura 142. Vectores.

plazamiento sin rotación); el punto inicial P del vector **a** es la posición original de un punto y el punto final Q es su posición después de la traslación.

A la longitud de un vector **a** (la longitud de la flecha) se le llama también la **norma** (o norma euclidiana) de **a** y se denota por $|\mathbf{a}|$.

Un vector de longitud 1 conoce como **vector unitario.**

Por definición, dos vectores **a** y **b** son **iguales**, denotado **a** = **b**, si tienen la misma longitud y la misma dirección (figura 142). Por tanto, puede hacerse la traslación arbitraria de un vector, es decir, su punto inicial puede escogerse de manera arbitraria. Esta definición resulta práctica en relación con fuerzas y otras aplicaciones.

Componentes de un vector

Si se elige un **sistema de coordenadas cartesianas**[3] xyz en el espacio (figura 143), es decir, un sistema convencional de coordenadas rectangulares con la misma escala de medición en los tres ejes de coordenadas mutuamente perpendiculares y un vector dado **a** tiene punto inicial P: (x_1, y_1, z_1) y punto final Q: (x_2, y_2, z_2), entonces los tres números (figura 144)

(1)
$$a_1 = x_2 - x_1, \qquad a_2 = y_2 - y_1, \qquad a_3 = z_2 - z_1$$

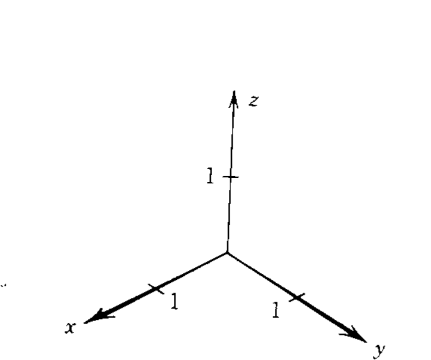


Figura 143. Sistema de coordenadas cartesianas.

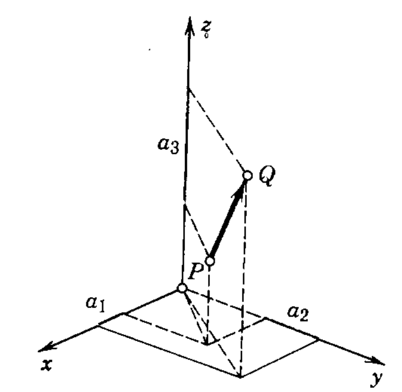


Figura 144. Componentes de un vector.

[3] Nombrado en honor del filósofo y matemático francés RENATUS CARTESIUS, latinizado RENÉ DESCARTES (1596-1650), quien inventó la geometría analítica. Su obra fundamental *Géométrie* se publicó en 1637, como un apéndice al *Discours de la méthode*.

se llaman las **componentes** del vector **a** con respecto a este sistema de coordenadas y se escribe simplemente

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3].$$

La longitud en términos de las componentes. Por definición, la longitud $|\mathbf{a}|$ de un vector **a** es la distancia entre su punto inicial **P** y su punto final Q, y por el teorema de Pitágoras y (1) se observa que

$$(2) \qquad \boxed{|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.}$$

EJEMPLO 1 Componentes y longitud de un vector

El vector **a** con punto inicial P: (3, 1, 4) y punto final Q: (1, -2, 4) tiene las componentes

$$a_1 = 1 - 3 = -2, \qquad a_2 = -2 - 1 = -3, \qquad a_3 = 4 - 4 = 0.$$

Por tanto, **a** = [-2, -3, 0], de donde por (2) se obtiene la longitud

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{13}.$$

Si se elige (-1, 5, 8) como punto inicial de **a**, el punto final correspondiente es (−3, 2, 8). Si se elige el origen (0, 0, 0) como punto inicial de **a**, el punto final correspondiente es (-2, -3, 0); sus coordenadas son iguales a las componentes de **a**. ∎

Vector de posición. Dado un sistema de coordenadas cartesianas, es posible determinar cada punto **A**: (x, y, z) por su **vector de posición** $\mathbf{r} = [x, y, z]$, cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto final es **A** (ver la figura 145). Esto puede observarse directamente de (1).

Vectores como ternas ordenadas de números. Si se hace la traslación de un vector **a**, con punto inicial P y punto final Q, entonces las coordenadas correspondientes de P y Q cambian en la misma cantidad, de tal modo que las diferencias en (1) se mantienen sin cambio. Esto demuestra el teorema 1 de la página siguiente.

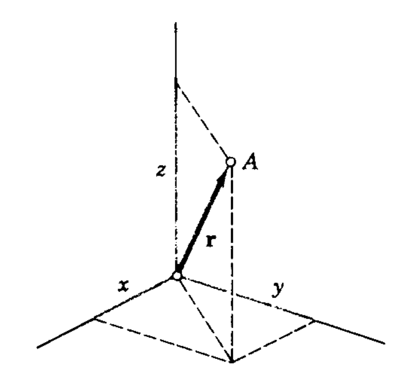


Figura 145. Vector de posición **r** de un punto A: (x, y, z).

Teorema 1 (Vectores como ternas ordenadas de números reales)

Dado un sistema de coordenadas cartesianas fijo, cada vector se encuentra determinado de manera única por la terna ordenada de las componentes correspondientes. Recíprocamente, a cada terna ordenada de números reales (a_1, a_2, a_3) *le corresponde exactamente un vector* $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, *con* $(0, 0, 0)$ *correspondiendo al* **vector cero 0**, *que tiene longitud* 0 *y no tiene dirección.*

Por tanto, una ecuación vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ es equivalente a las tres ecuaciones $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$ para las componentes.

Se observa que partiendo de la definición "geométrica" de los vectores como flechas, por el teorema 1 se ha llegado a una caracterización "algebraica"; pudo haberse empezado de esta última[4] e invertir el proceso. Con esto se demuestra que los dos enfoques son equivalentes.

Adición de vectores, multiplicación por un escalar

Las aplicaciones han sugerido cálculos algebraicos con vectores que resultan de utilidad práctica y casi tan simples como los cálculos con números.

Definición 1. Adición de vectores

La **suma** $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ de dos vectores $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ y $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ se obtiene sumando las componentes correspondientes,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1 + b_1, \quad a_2 + b_2, \quad a_3 + b_3]. \tag{3}$$

Desde el punto de vista geométrico, los vectores se colocan como en la figura 146 (el punto inicial de **b** en el punto final de **a**); entonces $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ es el vector trazado del punto inicial de **a** al punto final de **b**.

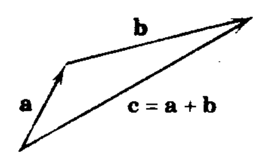


Figura 146. Adición de vectores.

En la figura 147 se ilustra que en el caso de fuerzas, esta adición es la ley del paralelogramo mediante la cual se obtiene la resultante de dos fuerzas en mecánica.

[4] Esto concuerda con el capítulo 7 (que no se usará aquí).

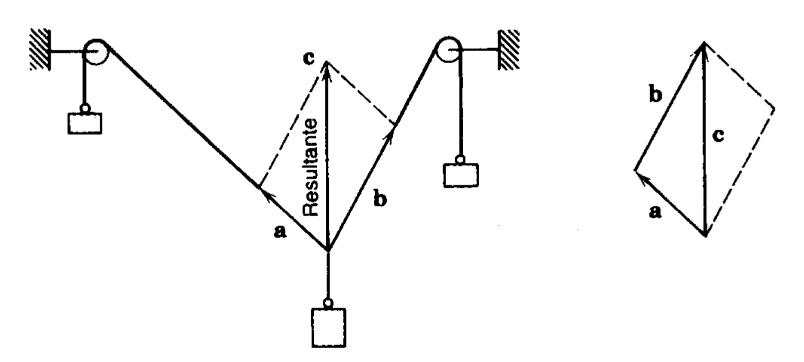


Figura 147. Resultante de dos fuerzas (ley del paralelogramo).

En la figura 148 se ilustra (para el plano) que el procedimiento "algebraico" y el "geométrico" para realizar la adición de vectores llevan al mismo resultado.

Las propiedades fundamentales de la adición de vectores, obtenidas de acuerdo con la definición, son (ver también las figuras 149, 150)

(4)

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (*conmutatividad*)

(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (*asociatividad*)

(c) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$

(d) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

donde $-\mathbf{a}$ denota al vector que tiene la longitud $|\mathbf{a}|$ y la dirección opuesta a la de $\mathbf{a}$.

En (4b) puede escribirse simplemente $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$, al igual que en las sumas de más de tres vectores. En lugar de $\mathbf{a} + \mathbf{a}$ también se escribe $2\mathbf{a}$, etc. Esto (y la notación $-\mathbf{a}$ usada antes) sugiere que la segunda operación algebraica para vectores, la multiplicación de un vector por un escalar, se defina de la siguiente manera.

Definición 2. Multiplicación por un escalar (Multiplicación por un número)

El producto $c\mathbf{a}$ de cualquier vector $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ y cualquier escalar c (el número real c) es el vector

(5)
$$c\mathbf{a} = [ca_1, ca_2, ca_3]$$

obtenido al multiplicar cada componente de $\mathbf{a}$ por c.

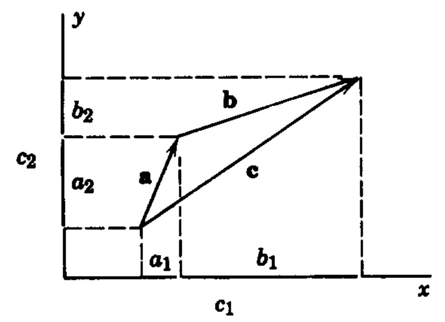


Figura 148. Adición de vectores.

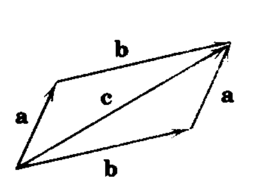


Figura 149. Conmutatividad de la adición de vectores.

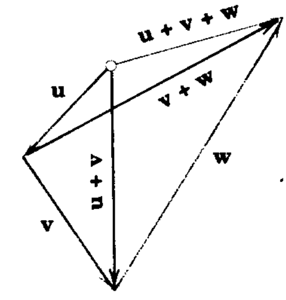


Figura 150. Asociatividad de la adición de vectores.

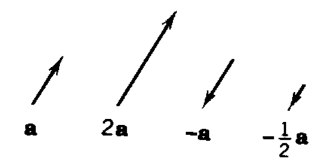


Figura 151. Multiplicación de vectores por escalares (números).

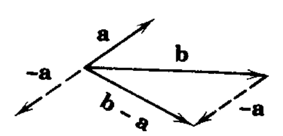


Figura 152. Diferencia de vectores.

Geométricamente, si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, entonces $c\mathbf{a}$ con $c > 0$ tiene la dirección de **a** y con $c < 0$ la dirección opuesta a la de **a**. En ambos casos, la longitud de $c\mathbf{a}$ es $|c\mathbf{a}| = |c||\mathbf{a}|$, y $c\mathbf{a} = \mathbf{0}$ si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $c = 0$ (o ambos). (Ver la figura 151.) ∎

Las propiedades fundamentales, según se obtienen de las definiciones 1 y 2, son

(6)

(a) $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$

(b) $(c + k)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + k\mathbf{a}$

(c) $c(k\mathbf{a}) = (ck)\mathbf{a}$ (denotado $ck\mathbf{a}$)

(d) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$

El estudiante puede demostrar que (4) y (6) implican que para cualquier **a**,

(7)

(a) $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$

(b) $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}.$

En lugar de $\mathbf{b} + (-\mathbf{a})$ se escribe simplemente $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ (figura 152).

EJEMPLO 2 Adición de vectores. Multiplicación por escalares

Con respecto a un sistema de coordenadas dado, sean

$$\mathbf{a} = [4, 0, 1] \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = [2, -5, \tfrac{1}{3}].$$

Entonces $-\mathbf{a} = [-4, 0, -1]$, $7\mathbf{a} = [28, 0, 7]$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [6, -5, \frac{4}{3}]$, y

$$2(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2[2, 5, \tfrac{2}{3}] = [4, 10, \tfrac{4}{3}] = 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b}.$$

Vectores unitarios i, j, k. Otra representación de los vectores usada con frecuencia es

(8) $$\boxed{\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}}$$

donde **i**, **j**, **k** son los vectores unitarios en las direcciones positivas de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas (figura 153); por tanto

(9) $$\mathbf{i} = [1, 0, 0], \qquad \mathbf{j} = [0, 1, 0], \qquad \mathbf{k} = [0, 0, 1]$$

y el segundo miembro de (8) es una suma de tres vectores paralelos a los tres ejes.

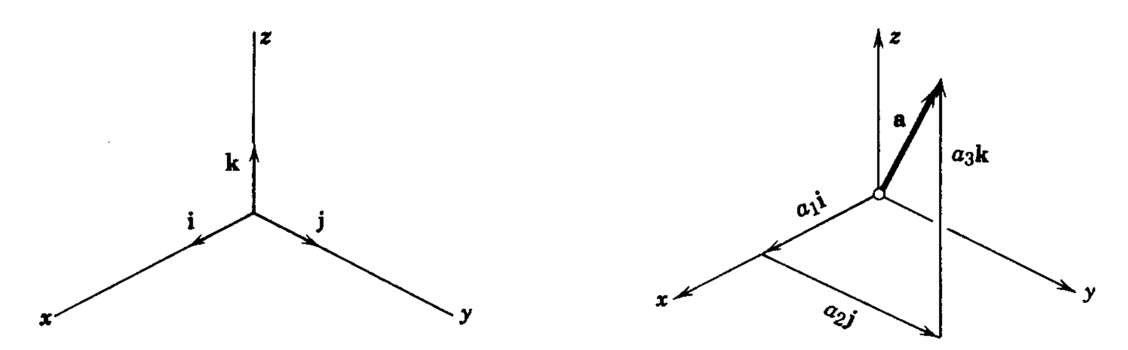


Figura 153. Los vectores unitarios **i**, **j**, **k** y la representación (8).

El espacio vectorial R^3 *(Opcional)*

Cabe mencionar que se dice que el conjunto de todos los vectores considerados forman el *espacio vectorial tridimensional* R^3 con las dos *operaciones algebraicas* de adición de vectores y multiplicación por escalares. Para explicar la "dimensión" se requiere del concepto de independencia lineal. Por una **combinación lineal** de los vectores dados $\mathbf{a}_{(1)}, \mathbf{a}_{(2)}, \cdots, \mathbf{a}_{(m)}$ se entiende una expresión de la forma

$$\boxed{c_1\mathbf{a}_{(1)} + c_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)},}$$

donde $c_1, \cdots, c_m$ son escalares cualesquiera; evidentemente, se trata de un vector. A los vectores dados se les llama *conjunto linealmente independiente* o, abreviando, **linealmente independientes** si y sólo si la única solución de

$$\text{(10)} \qquad \boxed{c_1\mathbf{a}_{(1)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{0}} \qquad (c_1, \cdots, c_m \text{ escalares cualesquiera})$$

es $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$. Si (10) también es válida con escalares que no sean todos cero, entonces esos m vectores se llaman **linealmente dependientes**. Ahora puede demostrarse que 4 o más vectores en R^3 son siempre linealmente dependientes, pero R^3 contiene conjuntos linealmente independientes de 3 vectores, por lo que el mayor número posible de vectores en un conjunto linealmente independiente en R^3 es 3. A este número 3 se le llama la **dimensión** de R^3 y a cualquiera de estos conjuntos se le llama una **base** de R^3. Resulta de particular utilidad la "base normal" (9). Dada cualquier base, todo vector en R^3 puede escribirse de manera única como una combinación lineal de los vectores de la base. La representación (8) es un ejemplo de este hecho.

El espacio vectorial R^3 es un modelo de un *espacio vectorial general*, como se analizó en la sección 7.15 aunque no se necesitará en este capítulo.

Problemas de la sección 8.1

Encontrar las componentes del vector **v** con punto inicial P: (x_1, y_1, z_1) y punto final Q: (x_2, y_2, z_2) dados. Encontrar $|\mathbf{v}|$.

1. P: (1, 0, 0), Q: (4, 2, 0)
2. P: (6, −1, 0), Q: (3, 3, 0)
3. P: (4, 0, −1), Q: (1, 0, 2)
4. P: (0, 0, 0), Q: (a, b, c)
5. P: (−1, −1, −1), Q: (3, 0, 0)
6. P: (8, 6, 1), Q: (−8, 6, 1)
7. P: (−1, 7, 5), Q: (−1, 7, 5)
8. P: (−3, −2, 1), Q: (3, 2, −1)

En cada caso, se dan las componentes v_1, v_2, v_3 de un vector **v** y un punto inicial particular P. Encontrar el punto final correspondiente y la longitud (norma) de **v**.

9. 1, −1, 0, P: (2, 1, 0)
10. 0, 0, 1, P: (−3, 2, 0)
11. 6, 2, 1, P: (−6, −2, −1)
12. 2, 2, 2, P: (4, 4, 0)
13. 0, 0, 0, P: (1, −1, −2)
14. 1, 2, 3, P: (0, 0, 0)
15. 2, −4, 6, P: (4, −2, 6)
16. $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, P: $(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$

Sean $\mathbf{a} = [2, -1, 3] = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $b = [1, 1, -1] = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = [0, 0, 4] = 4\mathbf{k}$. Encontrar

17. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{a}$
18. $-\mathbf{a}$, $2\mathbf{a}$, $0.5\mathbf{a}$
19. $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$
20. $2\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $2(\mathbf{a} + \mathbf{b})$
21. $3\mathbf{b} - 6\mathbf{c}$, $3(\mathbf{b} - 2\mathbf{c})$
22. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
23. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
24. $(1/|\mathbf{b}|)\mathbf{b}$, $(1/|\mathbf{c}|)\mathbf{c}$
25. ¿Qué leyes ilustran los problemas 17, 20 y 22?

Fuerzas. En cada caso, encontrar la resultante (sus componentes) y su magnitud.

26. $\mathbf{p} = [1, 1, 1]$, $\mathbf{q} = [1, -2, 3]$, $\mathbf{u} = [-2, 3, 1]$
27. $\mathbf{p} = [1, 3, -1]$, $\mathbf{q} = [5, 0, -2]$, $\mathbf{u} = [0, -1, 3]$
28. $\mathbf{p} = [3, 2, 1]$, $\mathbf{q} = [4, -1, -1]$, $\mathbf{u} = [-7, -1, 0]$
29. $\mathbf{p} = [3, 2, 1]$, $\mathbf{q} = [4, 1, 1]$, $\mathbf{u} = [7, 1, 0]$
30. $\mathbf{p} = [-1, 0, 2]$, $\mathbf{q} = [0, 4, 13]$, $\mathbf{u} = [1, 2, 3]$, $\mathbf{v} = [3, -8, 0]$
31. Determinar una fuerza **p** tal que **p**, $\mathbf{q} = 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ estén en equilibrio.
32. Determinar tres fuerzas **p**, **q**, **u** en la dirección de los ejes de coordenadas tales que **p**, **q**, **u**, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = -2\mathbf{k}$ estén en equilibrio. ¿Están determinados de manera única **p**, **q**, **u**?
33. Si $|\mathbf{p}| = 1$ y $|\mathbf{q}| = 2$, ¿qué puede decirse acerca de la magnitud y dirección de la resultante?

Aplicaciones geométricas. Usando vectores, demostrar los siguientes enunciados.

34. La recta que pasa por los puntos medios de lados adyacentes de un rectángulo divide una de las diagonales en la razón 1 : 3.
35. Las diagonales de un paralelogramo se bisecan recíprocamente.
36. Las cuatro diagonales en el espacio de un paralelepípedo se cortan y bisecan recíprocamente.
37. La recta que pasa por uno de los vértices de un paralelogramo y por el punto medio de uno de los lados opuestos divide una de las diagonales en la razón 1 : 2.
38. La suma de los vectores trazados desde el centro de un polígono regular a sus vértices es el vector cero.

8.2 PRODUCTO INTERIOR (PRODUCTO PUNTO)

Se definirá ahora una multiplicación de dos vectores que da un escalar como producto y se motiva por varias aplicaciones.

Definición. Producto interior (producto punto) de vectores

El **producto interior** o **producto punto** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (léase "**a** punto **b**") de dos vectores $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ y $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ se define como

$$(1) \qquad \begin{array}{ll} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \gamma & \text{si} \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 & \text{si} \quad \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ o } \mathbf{b} = \mathbf{0} \end{array}$$

donde γ, $0 \leqq \gamma \leqq \pi$, es el ángulo entre **a** y **b** (medido cuando los puntos iniciales de los vectores coinciden, como en la figura 154). En componentes,

$$(2) \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Para deducir (2) a partir de (1), ver más adelante. ∎

Puesto que el coseno en (1) puede ser positivo, cero o negativo, el producto interior puede tener estos valores (figura 154). El caso en que el producto interior es cero es de gran interés práctico y motiva lo siguiente.

Se dice que un vector **a** es **ortogonal** *a un vector* **b** si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Entonces **b** también es ortogonal a **a** y estos vectores reciben el nombre de **vectores ortogonales**. Evidentemente, el vector cero es ortogonal a cualquier vector. Para vectores diferentes de cero se tiene $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ si y sólo si $\cos \gamma = 0$ y, en consecuencia, $\gamma = \pi/2$ (90°). Con esto se demuestra el importante

Teorema 1 (Ortogonalidad)

El producto interior de dos vectores diferentes de cero es cero si y sólo si dichos vectores son perpendiculares.

La longitud en términos del producto interior. De la ecuación (1) con $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ se obtiene $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, de donde se tiene

$$(3) \qquad |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

Figura 154. Ángulo entre vectores y valor del producto interior.

A partir de (3) y (1) se obtiene para el ángulo γ entre dos vectores diferentes de cero

(4)
$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}}.$$

EJEMPLO 1 Producto interior. Angulo entre vectores

Encontrar el producto interior y las longitudes de $\mathbf{a} = [1, 2, 0]$ y $\mathbf{b} = [3, -2, 1]$ así como el ángulo entre estos vectores.

Solución. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1\cdot 3 + 2\cdot(-2) + 0\cdot 1 = -1$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{5}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} = \sqrt{14}$ y por (4) se obtiene el ángulo

$$\gamma = \text{arc cos}\,\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \text{arc cos}\,(-0.11952) = 1.69061 = 96.865°.$$

¿Puede trazar el lector estos vectores y convencerse de que forman un ángulo mayor de 90°, por lo que el producto interior resulta negativo? ∎

A partir de la definición se observa asimismo que el producto interior tiene las siguientes propiedades. Para cualesquiera vectores **a**, **b**, **c** y cualesquiera escalares q_1, q_2,

(5)

(a) $$[q_1\mathbf{a} + q_2\mathbf{b}]\cdot\mathbf{c} = q_1\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + q_2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$$ (*Linealidad*)

(b) $$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$ (*Simetría*)

(c) $$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geqq 0\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathbf{a} = \mathbf{0}\end{array}\right\}$$ (*Definitividad positiva*)

Por tanto el *producto punto es conmutativo* [ver 5(b)] *y es distributivo con respecto a la adición de vectores*; de hecho, por (5a) con $q_1 = 1$ y $q_2 = 1$ se tiene

(5a*) $$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$$ (*Distributividad*)

Además, por (1) y $|\cos\gamma| \leqq 1$ se observa que

(6) $$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leqq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$ (*Desigualdad de Schwarz*[5])

Usando esta expresión y (3), el lector puede probar que

(7) $$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$ **(Desigualdad del triángulo).**

Un cálculo directo simple con productos interiores indica que

(8) $$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)$$ (*Igualdad del paralelogramo*)

[5]Ver la nota de pie de página de la sección 7.15.

Deducción de (2) a partir de (1). Usando (8) de la sección 8.1, puede escribirse

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}.$$

Puesto que **i**, **j** y **k** son vectores unitarios, por (3) se tiene

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1, \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1, \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1,$$

y como son ortogonales (ya que los ejes de coordenadas son perpendiculares), por el teorema 1 se obtiene

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0, \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0, \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0,$$

Por tanto, si se sustituyen esas representaciones de **a** y **b** en **a** · **b** y se usan (5a*) y (5b), se tiene primero una suma de nueve productos interiores

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + \cdots + a_3b_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}.$$

Puesto que seis de estos productos son cero, se obtiene (2). ∎

Aplicaciones de los productos interiores

Las aplicaciones típicas de los productos interiores se muestran en los ejemplos siguientes y en los problemas de la sección 8.2.

EJEMPLO 2 El trabajo realizado por una fuerza considerado como producto interior

Considérese un cuerpo sobre el que actúa una fuerza constante **a**. Al cuerpo se aplica un desplazamiento **d**. Entonces el trabajo realizado por **a** en el desplazamiento se define como

(9) $$\boxed{W = |\mathbf{a}||\mathbf{d}|\cos\alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{d},}$$

es decir, el producto de la magnitud $|\mathbf{a}|$ de la fuerza, la longitud $|\mathbf{d}|$ del desplazamiento y el coseno del ángulo α entre **a** y **d** (figura 155). Si $\alpha < 90°$, como en la figura 155, entonces $W > 0$. Si **a** y **d** son ortogonales, entonces el trabajo es cero (¿por qué?). Si $\alpha > 90°$, entonces $W < 0$, lo que significa que en el desplazamiento tiene que hacerse trabajo en contra de la fuerza. ∎

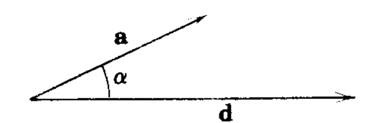


Figura 155. Trabajo realizado por una fuerza.

EJEMPLO 3 Componente de una fuerza en una dirección dada

¿Qué fuerza en la cuerda de la figura 156 mantendrá en equilibrio un automóvil de 5 000 lb si la rampa forma un ángulo de 25° con la horizontal?

Solución. Al introducir coordenadas como se muestra, el peso es $a = [0, -5\,000]$ ya que esta fuerza apunta hacia abajo, en la dirección y negativa. Ahora es necesario representar **a** como una suma (la resultante de

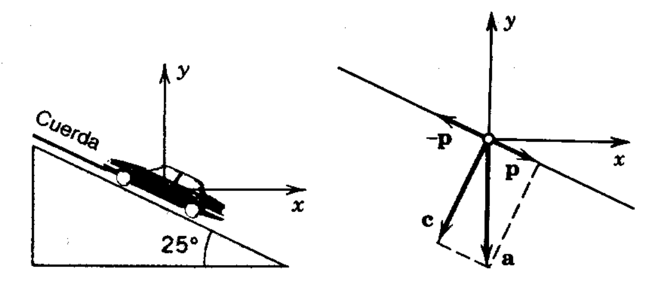


Figura 156. Ejemplo 3.

dos fuerzas, $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{p}$, donde $\mathbf{c}$ es la fuerza que ejerce el automóvil sobre la rampa, la cual no es de interés en este caso, y $\mathbf{p}$ es paralela a la cuerda, de magnitud (ver la figura 156)

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{a}| \cos \gamma = 5000 \cos 65° = 2113 \text{ [lb]}$$

y con la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ opuesta a la dirección de la cuerda; aquí $\gamma = 90° - 25° = 65°$ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{p}$. Ahora un vector en la dirección de la cuerda es

$$\mathbf{b} = [-1, \tan 25°] = [-1, 0.46631], \quad \text{por tanto} \quad |\mathbf{b}| = 1.10338,$$

de donde

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = [0.90631, -0.42262].$$

Puesto que $|\mathbf{u}| = 1$ y $\cos \gamma > 0$, se observa que el resultado también puede escribirse como

$$|\mathbf{p}| = (|\mathbf{a}| \cos \gamma)|\mathbf{u}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{5000 \cdot 0.46631}{1.10338} = 2113 \text{ [lb]}.$$

Respuesta. Aproximadamente 2 100 lb. ∎

El ejemplo 3 es típico de las aplicaciones en que se usa el concepto de **componente** o **proyección** *de un vector* **a** *en la dirección de un vector* **b** ($\neq \mathbf{0}$), definida por (ver la figura 157)

$$p = |\mathbf{a}| \cos \gamma. \tag{10}$$

En consecuencia, p es la longitud de la proyección ortogonal de **a** sobre una recta l paralela a **b**, tomada con signo positivo si $p\mathbf{b}$ tiene la dirección de **b** y con signo

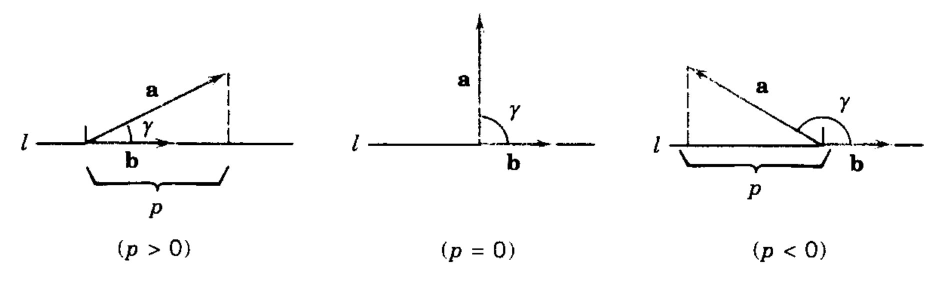


Figura 157. Componente de un vector **a** en la dirección de un vector **b**.

negativo si $p\mathbf{b}$ tiene la dirección opuesta a $\mathbf{b}$; ver la figura 157. Si $\mathbf{b}$ es un vector unitario, entonces de (10) se obtiene $p = |\mathbf{a}| \cos \gamma\, |\mathbf{b}|$; por tanto

$$p = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \qquad (|\mathbf{b}| = 1) \tag{11}$$

y en caso contrario,

$$\boxed{p = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}} \qquad (\mathbf{b} \neq \mathbf{0}). \tag{12}$$

EJEMPLO 4 Base ortonormal

Por definición, una *base ortonormal* del espacio tridimensional es una base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ que consta de vectores unitarios ortogonales. Posee la gran ventaja de que la determinación de los coeficientes en representaciones

$$\mathbf{v} = l_1\mathbf{a} + l_2\mathbf{b} + l_3\mathbf{c} \qquad (\mathbf{v} \text{ un vector dado})$$

es muy sencilla. Se afirma que $l_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$, $l_2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$, $l_3 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}$. De hecho, esto se sigue directamente al tomar los productos interiores de la representación con $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, respectivamente, y usando la ortonormalidad, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = l_1\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + l_2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + l_3\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = l_1$, etcétera.

Por ejemplo, los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ en (8), sección 8.1, asociados con un sistema de coordenadas cartesianas forman una base ortonormal. ∎

EJEMPLO 5 Rectas ortogonales en el plano

Encontrar la recta L_1 que pasa por el punto P: (1, 3) en el plano xy y es perpendicular a la recta L_2: $x - 2y + 2 = 0$; ver la figura 158.

Solución. Toda recta L_1 en el plano xy puede escribirse $a_1x + a_2y = c$ o, por (2), $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = c$, donde $\mathbf{a} = [a_1, a_2] \neq \mathbf{0}$ y $r = [x, y]$. Ahora bien, la recta L_1^* que pasa por el origen y es paralela a L_1 es $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{0}$. En consecuencia, por el teorema 1, el vector $\mathbf{a}$ es perpendicular a $\mathbf{r}$ y, por lo tanto, es perpendicular a L_1^* y también a L_1 ya que L_1 y L_1^* son paralelas. A $\mathbf{a}$ se le llama **vector normal** a L_1 (y a L_1^*).

Entonces, un vector normal a la recta dada $x - 2y + 2 = 0$ es $\mathbf{b} = [2, 1]$, por lo que L_1 es perpendicular a L_2 si $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a_1 - 2a_2 = 0$, por ejemplo, si $\mathbf{a} = [2, 1]$. En consecuencia, L_1 está dada por $2x + y = c$ y pasa por P: (1, 3) cuando $2 \cdot 1 + 3 = c = 5$.

Respuesta. $y = -2x + 5$ (figura 158). ∎

EJEMPLO 6 Vector normal a un plano

Encontrar un vector unitario perpendicular al plano $4x + 2y + 4z = -7$.

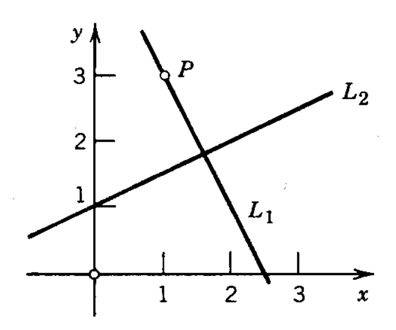


Figura 158. Ejemplo 5.

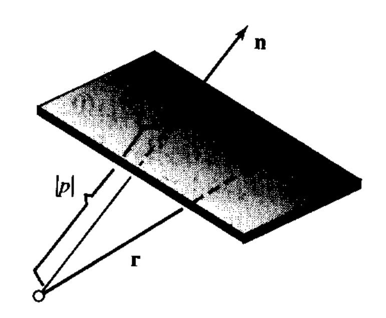


Figura 159. Vector normal a un plano.

Solución. Usando (2), cualquier plano en el espacio puede escribirse como

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{r} = a_1x + a_2y + a_3z = c \tag{13}$$

donde $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3] \neq \mathbf{0}$ y $r = [x, y, z]$. El vector unitario en la dirección de **a** es (figura 159)

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}.$$

Al dividir entre $|\mathbf{a}|$, a partir de (13) se obtiene

$$\mathbf{n}\bullet\mathbf{r} = p \qquad \text{donde} \qquad p = \frac{c}{|\mathbf{a}|}. \tag{14}$$

Por (11) se ve que p es la proyección de **r** en la dirección de **n**, y esta proyección tiene el mismo valor constante $c|\mathbf{a}|$ para el vector de posición **r** de cualquier punto en el plano. Por supuesto, lo anterior se cumple si y sólo si **n** es perpendicular al plano. A **n** se le llama **vector unitario normal** al plano (siendo el otro $-\mathbf{n}$). Además, a partir de lo anterior y de la definición de proyección se sigue que $|p|$ es la distancia del plano al origen. A la representación (14) se le llama **forma normal de Hesse**[6] de un plano. En el caso presente, $\mathbf{a} = [4, 2, 4]$, $c = -7$, $|\mathbf{a}| = 6$, $\mathbf{n} = \frac{1}{6}\mathbf{a} = [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ y la distancia del plano al origen es 7/6. ∎

Cabe mencionar que R^3 con el producto interior como se acaba de definir es un caso especial de un espacio general con producto interior según se definió en la sección 7.15 (el cual no se necesitará aquí).

Problemas de la sección 8.2

Sean $\mathbf{a} = [2, 1, 3]$, $\mathbf{b} = [1, 0, -4]$, $\mathbf{c} = [3, -1, 2]$. Encontrar

1. $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\bullet\mathbf{a}$
2. $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $|\mathbf{c}|$
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\bullet\mathbf{c}$, $\mathbf{a}\bullet\mathbf{c} + \mathbf{b}\bullet\mathbf{c}$
4. $3\mathbf{a}\bullet 2\mathbf{c}$, $6(\mathbf{a}\bullet\mathbf{c})$
5. $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|$
6. $(\mathbf{a} - \mathbf{c})\bullet\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} - \mathbf{c}\bullet\mathbf{b}$
7. $\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b} - \mathbf{c})$, $\mathbf{a}\bullet(\mathbf{c} - \mathbf{b})$
8. $|\mathbf{a} + \mathbf{c}|$, $|\mathbf{a}| + |\mathbf{c}|$
9. $|\mathbf{a} - 2\mathbf{b}|$, $|2\mathbf{b} - \mathbf{a}|$
10. $\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $(\mathbf{a}\bullet\mathbf{b})\mathbf{c}$
11. $|\mathbf{a} - \mathbf{c}|$, $|\mathbf{a}| - |\mathbf{c}|$
12. $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} + \mathbf{b}\bullet\mathbf{c} + \mathbf{c}\bullet\mathbf{a}$
13. ¿Qué leyes ilustran los problemas 1, 3 y 6?
14. Si a está dado y $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, ¿puede concluirse que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?
15. Encontrar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ donde $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}$, y trazar una figura similar a la figura 157.

[6] LUDWIG OTTO HESSE (1811-1874), matemático alemán, quien contribuyó a la teoría de las curvas y las superficies.

Trabajo. Encontrar el trabajo realizado por una fuerza **p** que actúa sobre un cuerpo si éste se desplaza de un punto A a un punto B sobre el segmento de recta AB, donde

16. $\mathbf{p} = [2, 1, 0]$, A: $(0, 0, 0)$, B: $(0, 1, 0)$

17. $\mathbf{p} = [1, 2, 0]$, A: $(4, -7, 3)$, B: $(4, -7, 8)$

18. $\mathbf{p} = [1, 1, 1]$, A: $(1, -1, 2)$, B: $(2, 1, 3)$

19. $\mathbf{p} = [3, -2, 4]$, A: $(8, -2, -3)$, B: $(-2, 0, 6)$

20. Demostrar que el trabajo realizado por la resultante de dos fuerzas constantes **p** y **q** en el desplazamiento de un cuerpo de un punto A a un punto B sobre el segmento de recta AB es igual a la suma de los trabajos realizados por cada una de las fuerzas en este desplazamiento.

21. ¿Por qué el trabajo en el problema 17 es igual a cero?

Ortogonalidad de vectores

22. Demostrar que $\mathbf{a} = [1, -1, 2]$, $\mathbf{b} = [0, 4, 2]$, $\mathbf{c} = [-10, -2, 4]$ son ortogonales.

23. ¿Para qué valores de a_1 son ortogonales $\mathbf{a} = [a_1, 2, 0]$ y $\mathbf{b} = [3, 4, -1]$.

24. Encontrar todos los vectores unitarios $\mathbf{a} = [a_1, a_2]$ ortogonales a $[2, -5]$.

25. Demostrar que las rectas $3x + 5y = 1$ y $10x - 6y = 7$ son ortogonales.

26. Encontrar una base ortonormal $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ en el espacio tridimensional, donde $\mathbf{b} = q_1[3, 4, 0]$, $\mathbf{c} = q_2[4, -3, 0]$ y q_1, q_2 son escalares adecuados.

27. Encontrar un vector unitario normal al plano $2x + y - 2z = 5$.

28. Encontrar todos los vectores **v** ortogonales a $\mathbf{a} = [1, 2, 0]$. ¿Forman un espacio vectorial?

29. ¿Para qué valores de c los planos $x + 2y + 3z = 6$ y $x + cy + z = 2$ son ortogonales?

30. Usando vectores, demostrar que si las diagonales de un rectángulo son ortogonales, el rectángulo debe ser un cuadrado.

Ángulo entre vectores. Sean $\mathbf{a} = [1, 1, 1]$, $\mathbf{b} = [-1, 1, 0]$, $\mathbf{c} = [3, 0, 1]$. Encontrar el coseno del ángulo entre los siguientes vectores.

31. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ **32.** $\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}$ **33.** $\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}$ **34.** $\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{a} - \mathbf{c}$

35. Encontrar el ángulo entre las rectas $4x - y = 2$ y $x + 4y = 3$.

36. Encontrar el ángulo entre las rectas $x + y = 1$ y $2x - 3y = 0$.

37. Encontrar el ángulo entre los planos $x + 2y + z = 2$ y $2x - y + 3z = -4$.

38. Encontrar el ángulo entre los planos $x + y + z = 3$ y $x - y = 4$.

39. Encontrar los ángulos del triángulo con vértices A: $(0, 0, 0)$, B: $(1, 2, 3)$, C: $(4, -1, 3)$.

40. Encontrar los ángulos del triángulo con vértices A: $(2, 1, 5)$, B: $(4, 1, 5)$, C: $(2, 3, 5)$.

41. Deducir la ley de los cosenos usando los vectores **a**, **b** y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

42. Sean $\mathbf{a} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \cos\beta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\beta\,\mathbf{j}$, donde $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 2\pi$. Demostrar que **a** y **b** son vectores unitarios. Usar (2) para obtener la identidad trigonométrica de $\cos(\beta - \alpha)$.

Componente en la dirección de un vector. En cada caso, encontrar la componente de **a** en la dirección de **b**.

43. $\mathbf{a} = [1, 1, 2]$, $\mathbf{b} = [0, 0, 6]$ **44.** $\mathbf{a} = [3, 0, -2]$, $\mathbf{b} = [1, 1, 1]$

45. $\mathbf{a} = [0, 3, -4]$, $\mathbf{b} = [0, 4, 3]$ **46.** $\mathbf{a} = [-2, -5, 6]$, $\mathbf{b} = [2, 1, 2]$

47. $\mathbf{a} = [2, 3, 0]$, $\mathbf{b} = [-2, -3, 0]$ **48.** $\mathbf{a} = [7, -5, 3]$, $\mathbf{b} = [0.8, 0, 0.6]$

49. Demostrar la desigualdad del triángulo (7).

50. Demostrar la igualdad del paralelogramo (8).

8.3 PRODUCTO VECTORIAL (PRODUCTO CRUZ)

La multiplicación punto da un escalar como el producto de dos vectores (sección 8.2), pero hay otras aplicaciones que sugieren otra multiplicación, la "*multiplicación cruz*", que da un nuevo vector como producto de dos vectores en el espacio tridimensional.

Definición. Producto vectorial (Producto cruz)

El **producto vectorial (producto cruz)** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de dos vectores $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ y $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ es un vector

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

de acuerdo con lo siguiente. Si **a** y **b** tienen direcciones iguales u opuestas o si uno de ellos es el vector cero, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

En los demás casos, $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tiene la longitud

(1) $$|\mathbf{v}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \gamma,$$

que es el área del paralelogramo de la figura 160 con **a** y **b** como lados adyacentes. La dirección de $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ***perpendicular tanto a*** **a** ***como a*** **b** y es tal que **a**, **b**, **v**, en este orden, forman una *terna derecha* como en la figura 160 (a continuación se explica el punto). ▮

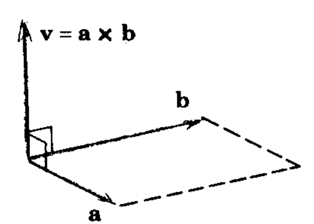


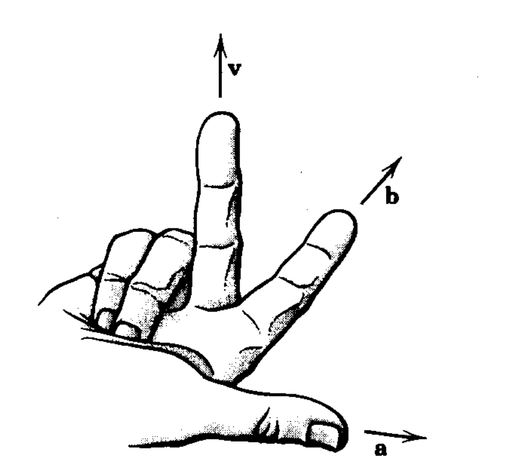
Figura 160. Producto vectorial.

En componentes, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es

(2) $$\boxed{v_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \quad v_2 = a_3b_1 - a_1b_3, \quad v_3 = a_1b_2 - a_2b_1.}$$

Se supone aquí que el sistema de coordenadas cartesianas es *derecho* (el concepto se explica a continuación), mientras que en un sistema *izquierdo* estas tres componentes deben multiplicarse por −1. La fórmula (2) se deduce en el apéndice 4.

Explicaciones. Primera, una **terna derecha** de vectores **a**, **b**, **v** es aquella en la que los vectores, en el orden dado, adoptan el mismo tipo de orientación que los dedos pulgar, índice y medio de la mano derecha cuando se colocan como se muestra en la figura 161. También puede decirse que si se hace girar **a** un ángulo α ($< \pi$) en dirección de **b**, entonces **v** avanza en la misma dirección que seguiría un tornillo de cuerda derecha si se hiciera girar del mismo modo (figura 162).



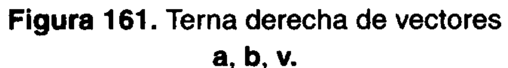


Figura 161. Terna derecha de vectores **a, b, v.**

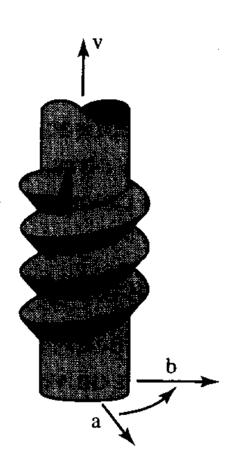


Figura 162. Tornillo de cuerda derecha.

Segunda, un sistema de coordenadas cartesianas se llama **derecho** si los vectores unitarios **i, j, k** correspondientes en las direcciones positivas de los ejes (ver la sección 8.1) forman una terna derecha como en la figura 163*a*. El sistema se llama *izquierdo* si se invierte el sentido de **k**, como en la figura 163*b*. En las aplicaciones se acostumbra usar sistemas derechos.

EJEMPLO 1 Producto vectorial

Para el producto vectorial $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de $\mathbf{a} = [1, 1, 0]$ y $\mathbf{b} = [3, 0, 0]$ en coordenadas derechas por (2) se obtiene

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 3 = -3.$$

Para comprobar el resultado de este caso simple, trazar **a**, **b** y **v**. ¿Puede ver el lector que dos vectores en el plano xy deben tener siempre su producto vectorial paralelo al eje z (o igual al vector cero)? ▮

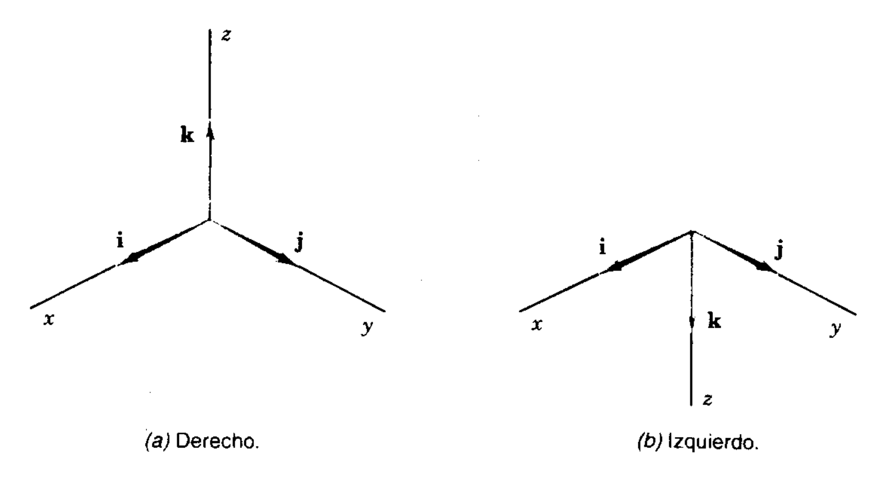


Figura 163. Los dos tipos de sistemas de coordenadas cartesianas.

Cómo memorizar la fórmula (2) de la página 493. Los estudiantes familiarizados con determinantes de segundo y tercer orden observarán que en (2)

$$(2^*) \qquad v_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad v_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \qquad v_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

por lo que $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3] = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ queda como el desarrollo del determinante simbólico de tercer orden

$$(2^{**}) \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

por el primer renglón. (Se denomina "simbólico" porque el primer renglón consta de vectores y no de números.) En coordenadas izquierdas estos determinantes deben multiplicarse por -1.

EJEMPLO 2 Una aplicación de (2)**

Con respecto a un sistema derecho de coordenadas cartesianas, sean $\mathbf{a} = [4, 0, -1]$ y $\mathbf{b} = [-2, 1, 3]$. Entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = [1, -10, 4]. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Productos vectoriales de los vectores de la base normal

Puesto que **i**, **j**, **k** son vectores unitarios ortogonales (mutuamente perpendiculares), de la definición de producto vectorial se obtiene, en coordenadas derechas,

$$(3a) \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

así como

$$(3b) \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}. \qquad \blacksquare$$

Propiedades generales de los productos vectoriales

La multiplicación cruz tiene la propiedad de que

$$(4) \qquad (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) \quad \text{para cualquier escalar } k.$$

Es distributiva con respecto a la adición de vectores, es decir,

$$(5) \qquad \begin{aligned} &(a) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \\ &(b) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \end{aligned}$$

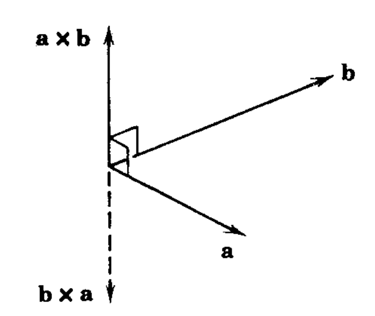


Figura 164. Anticonmutatividad de la multiplicación cruz.

No es conmutativa sino **anticonmutativa**, es decir,

(6) $$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \qquad \text{(Figura 164).}$$

No es asociativa, es decir,

(7) $$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \qquad \text{en general,}$$

por lo que no pueden omitirse los paréntesis.

Demostraciones. La expresión (4) se sigue directamente de la definición. En (5a), por la fórmula (2*) se obtiene la primera componente de la izquierda

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} &= a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_2c_3 - a_3c_2) \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

y, por (2*), la suma de los dos determinantes es la primera componente de $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$. el segundo miembro de (5a). Para las demás componentes de (5a) y (5b) la igualdad se establece por la misma idea.

La anticonmutatividad (6) se sigue de (2**) observando que al intercambiar los renglones 2 y 3 se multiplica por -1 el determinante. Lo anterior puede confirmarse geométricamente si se hace $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{v}$ y $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{w}$; entonces $|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$ por (1) y para que $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{w}$ formen una terna *derecha* debe tenerse $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$.

Por último, $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, en tanto que $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$ (ver el ejemplo 3), lo cual ilustra (7). ∎

Aplicaciones típicas de los productos vectoriales

EJEMPLO 4 Momento de una fuerza

En mecánica, el momento m de una fuerza **p** alrededor de un punto Q se define como el producto $m = |\mathbf{p}|d$, donde d es la distancia (perpendicular) entre Q y la línea de acción L de **p** (figura 165). Si **r** es el vector que va de Q a cualquier punto A de L, entonces $d = |\mathbf{r}|$ sen γ (figura 165) y

$$m = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{p}| \text{ sen } \gamma.$$

Puesto que γ es el ángulo entre **r** y **p**,

$$m = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}|,$$

como se sigue de (1). El vector

(8)
$$\boxed{\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}}$$

se llama el **vector momento** o **momento vectorial** de **p** alrededor de Q. Su magnitud es m y su dirección es la del eje de rotación alrededor de Q que tiende a producir **p**. ▮

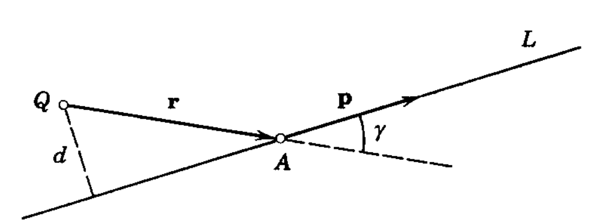


Figura 165. Momento de una fuerza.

EJEMPLO 5 Momento de una fuerza

Encontrar el momento de la fuerza **p** de la figura 166 alrededor del centro del volante.

Solución. Al introducir coordenadas como se muestra en la figura 166, se tiene que

$$\mathbf{p} = [1000 \cos 30°, \quad 1000 \text{ sen } 30°, \quad 0] = [866, \quad 500, \quad 0], \qquad \mathbf{r} = [0, \quad -1.5, \quad 0],$$

de donde por (8) y (2**) se obtiene

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1.5 & 0 \\ 866 & 500 & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1.5 \\ 866 & 500 \end{vmatrix}\mathbf{k} = [0, 0, 1299].$$

Este vector momento es normal (perpendicular) al plano del volante; por tanto tiene la dirección del eje de rotación alrededor del centro del volante que la fuerza tiende a producir. ▮

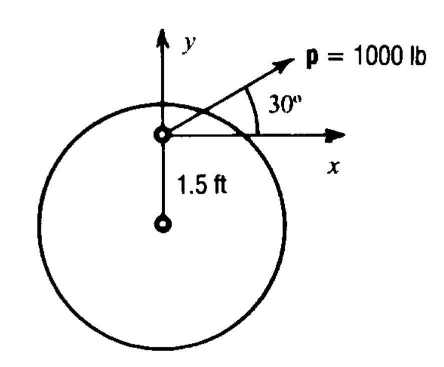


Figura 166. Momento de una fuerza **p**.

EJEMPLO 6 Velocidad de un cuerpo en rotación

La rotación de un cuerpo rígido B en el espacio puede describirse de manera sencilla y única por un vector **w** de la siguiente manera. La dirección de **w** es la del eje de rotación y tal que la rotación se ve en el sentido del movimiento de las manecilla del reloj si se mira del punto inicial de **w** hacia su punto final. La longitud de **w** es igual a a la **velocidad angular** ω (> 0) de la rotación, es decir, la velocidad lineal (o tangencial) de un punto de B dividida entre su distancia al eje de rotación.

Sean P un punto cualquiera de B y d su distancia al eje. Entonces P tiene la velocidad ωd. Sea **r** el vector de posición de P respecto a un sistema de coordenadas con origen 0 sobre el eje de rotación. Entonces $d = |\mathbf{r}|$ sen γ, donde γ es el ángulo entre **w** y **r**. Por lo tanto,

$$\omega d = |\mathbf{w}|\,|\mathbf{r}| \operatorname{sen} \gamma = |\mathbf{w} \times \mathbf{r}|.$$

A partir de esta expresión y de la definición de producto vectorial se observa que el vector velocidad **v** de P puede representarse en la forma (figura 167)

(9) $$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}.}$$

Esta fórmula simple es útil para determinar **v** en cualquier punto de B. ∎

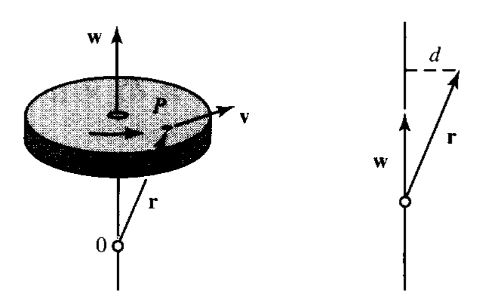


Figura 167. Rotación de un cuerpo rígido.

Triple producto escalar

El **triple producto escalar** o **triple producto mixto** de tres vectores

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3], \qquad \mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3], \qquad \mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]$$

se denota por (**a b c**) y se define por

$$(\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}) = \mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Ahora bien, por el producto punto en componentes [fórmula (2) de la sección 8.2] y por (2*), denotando **b** × **c** por $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$, se obtiene en primer término

$$\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

La expresión del segundo miembro es el desarrollo de un determinante de tercer orden, por ejemplo, por su primer renglón; por tanto,

$$(10)\qquad (\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Se tiene asimismo que para cualquier escalar k

$$(11)\qquad (k\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c}) = k(\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c})$$

ya que la multiplicación de un renglón de un determinante por k multiplica el valor del determinante por k. Además,

$$(12)\qquad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$$

ya que la multiplicación punto es conmutativa, de donde

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

donde el determinante del segundo miembro es el de (10) y se obtiene a partir de otro determinante al intercambiar los renglones 1 y 2 y al intercambiar los renglones 2 y 3 en el resultado, obteniéndose dos factores -1 y $(-1)(-1) = 1$.

Interpretación gométrica. El valor absoluto del triple producto escalar (10) es el volumen del paralelepípedo con **a**, **b**, **c** como vectores arista (figura 168), ya que, por (1) de la sección 8.2,

$$|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\cos\beta \qquad \text{(Figura 168).}$$

donde $|\mathbf{a}|\,|\cos\beta|$ es la altura h y, por (1), la base, el paralelogramo con lados **b** y **c**, tiene área $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$.

EJEMPLO 7 Tetraedro

Un tetraedro está determinado por tres vectores arista **a**, **b**, **c** como se indica en la figura 169.

Encontrar el volumen del tetraedro con $\mathbf{a} = [2, 0, 3]$, $\mathbf{b} = [0, 6, 2]$, $\mathbf{c} = [3, 3, 0]$ como vectores arista.

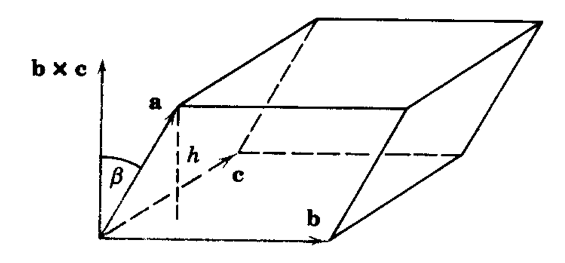


Figura 168. Interpretación geométrica del triple producto escalar.

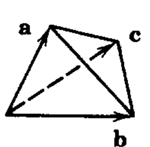


Figura 169. Tetraedro.

Solución. El volumen V del paralelepípedo con estos vectores como vectores arista es el valor absoluto del triple producto escalar

$$(\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 - 54 = -66,$$

es decir, $V = 66$. El signo menos indica que **a**, **b**, **c**, en este orden, forman una terna izquierda si el sistema de coordenadas cartesianas es derecho (y una terna derecha si el sistema es izquierdo). El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del del paralelepípedo, es decir, 11.

¿Puede el lector trazar el tetraedro, eligiendo el origen como el punto inicial común de los tres vectores? ¿Cuáles son las coordenadas de los cuatro vértices? ∎

La **independencia lineal de tres vectores** puede investigarse con triples productos escalares, como sigue.

Se dice que un conjunto de vectores dado $\mathbf{a}_{(1)}, \cdots, \mathbf{a}_{(m)}$ es **linealmente independiente** si los únicos escalares $c_1, \cdots, c_m$ para los que la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{a}_{(1)} + c_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{0}$$

se satisface son $c_1 = 0, c_2 = 0, \cdots, c_m = 0$. En caso contrario, es decir, si dicha ecuación también es válida para m escalares ordenados no todos ceros, se dice que el conjunto de vectores es **linealmente dependiente**.

Entonces, tres vectores, si se hace que coincidan sus puntos iniciales, forman un conjunto linealmente independiente si y sólo si no están en el mismo plano (o en la misma recta). La interpretación del triple producto escalar como un volumen da lugar al siguiente criterio.

Teorema 1 (Independencia lineal de tres vectores)

Tres vectores forman un conjunto linealmente independiente si y sólo si su triple producto escalar es diferente de cero.

El triple producto escalar es el "producto repetido" más importante. Algunos otros que se necesitan ocasionalmente se incluyen en los problemas de la sección.

Concluye así el *álgebra* vectorial (en el espacio tridimensional y en el plano). El *cálculo* (derivación) vectorial se inicia en la siguiente sección.

Problemas de la sección 8.3

Con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas derecho, sean $\mathbf{a} = [1, 1, 0]$, $\mathbf{b} = [-1, 2, 0]$, $\mathbf{c} = [2, 3, 1]$, $\mathbf{d} = [5, -7, 2]$. Encontrar

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{a}$

2. $\mathbf{b} \times \mathbf{c}, |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|, |\mathbf{c} \times \mathbf{b}|$

3. $\mathbf{a} \times \mathbf{c}, |\mathbf{a} \times \mathbf{c}|, \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$

4. $2\mathbf{a} \times 3\mathbf{b}, 3\mathbf{a} \times 2\mathbf{b}, 6\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

5. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

6. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

7. $(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

8. $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{c}), (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})$

9. $\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$

10. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{a})$

11. $(3\mathbf{a} - 6\mathbf{b}) \times \mathbf{c}, 3\mathbf{c} \times (2\mathbf{b} - \mathbf{a})$

12. $\mathbf{a} \times (3\mathbf{b} - 5\mathbf{c}), 3\mathbf{a} \times \mathbf{b} - 5\mathbf{a} \times \mathbf{c}$

13. $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}, (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$

14. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

Con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas derecho, sean **a** = [1, 1, 0], **b** = [−1, 2, 0], **c** = [2, 3, 1], **d** = [5, −7, 2]. Encontrar

15. (**i** **j** **k**), (**i** **k** **j**)

16. (**b** × **c**) •**d**, **b**•(**c** × **d**)

17. (**a** × **b**) × (**c** × **d**)

18. **b** × (**b** × **c**), (**b** × **b**) × **c**

19. (**a** × **b**)•(**c** × **d**), (**b** × **a**)•(**d** × **c**)

20. [(**a** × **b**) × **c**]•**d**

21. (**a** − **b** **b** − **c** **c**), (**a** **b** **c**)

22. (**b** **c** **d**), (**c** **b** **d**)

23. (2**a** 3**b** 5**d**), 30(**a** **b** **d**)

24. (**a** + **b** **b** + **c** **c** + **d**)

25. ¿Qué propiedades de la multiplicación cruz ilustran los problemas 1, 4, 5 y 14?

Aplicaciones del producto vectorial

Momento de una fuerza. Una fuerza **p** actúa sobre una recta por un punto A. Encontrar el vector momento **m** de **p** alrededor de un punto Q, donde la fuerza, el punto A y el punto Q son

26. [1, −2, 0], (1, 1, 1), (2, −1, 3)

27. [0, 0, 1], (0, 0, 0), (0, 0, 5)

28. [3, −1, 2], (0, −1, 4), (3, 0, 2)

29. [2, 4, 1], (4, 2, −1), (0, 1, 2)

30. [1, −2, 3], (4, 3, 1), (6, −1, 7)

31. [3, 0, −6], (1, 8, 1), (4, 6, −1)

Área de un paralelogramo. Encontrar el área si los vértices en el plano xy son los siguientes. (*Sugerencia.* Obtener primero dos vectores arista adyacentes.)

32. (−1, 2), (2, 0), (4, 3), (7, 1)

33. (0, 0), (4, 1), (2, 3), (6, 4)

34. (4, 4), (−1, 9), (6, 6), (1, 11)

35. (2, −3), (1, 1), (5, −6), (4, −2)

Área de un triángulo. Encontrar el área si los vértices son

36. (0, 0, 2), (0, 1, 2), (1, 1, 2)

37. (6, −1, 3), (6, 1, 1), (3, 3, 3)

38. (1, 3, 0), (0, 2, 5), (−1, 0, 2)

39. (2, 2, 2), (5, 2, 4), (−2, 4, −1)

Plano. Encontrar el plano que pasa por los tres puntos dados. (*Sugerencia.* Encontrar dos vectores en el plano; su producto cruz dará como resultado un vector normal. Ver también el ejemplo 6 de la sección 8.2.)

40. (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)

41. (1, 2, $\frac{1}{4}$), (4, 2, −2), (0, 8, 4)

42. (4, $\frac{5}{3}$, 3), (1, 2, 1), (7, −1, 4)

43. (1, 6, 1), (9, 1, −31), (−5, −2, 25)

Aplicación del triple producto escalar

Volumen de un paralelepípedo. Encontrar el volumen a partir de las aristas dadas.

44. **i**, 2**j**, −3**k**

45. **i** + **j**, **i** − **j**, **i** + 2**j** + 4**k**

46. 2**j** + **k**, **i** − **j**, −**j** + 4**k**

47. 2**i** − 6**k**, **j** + **k**, **i** + **j**

Volumen de un tetraedro. En contrar el volumen si los vértices son

48. (2, 2, 2), (3, 2, 2), (2, 3, 2), (2, 2, 3)

49. (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)

50. (2, 1, 1), (3, 3, 4), (0, 1, 5), (1, 2, 2)

51. (0, 1, 2), (5, 5, 6), (1, 2, 1), (3, 3, 1)

Independencia lineal. ¿Los vectores siguientes son linealmente independientes?

52. [4, −8, 3], [7, 2, 5], [10, −52, 8]

53. [1, 1, 0], [0, 1, 1], [1, 0, 1]

54. [7, 3, −2], [5, 9, 8], [2, −7, 3]

55. [3, 5, −7], [−1, 37, −43], [8, −6, 4]

Fórmulas adicionales

56. Usando $\operatorname{sen}^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma$ en (1), demostrar que

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}. \tag{13}$$

57. Usando el teorema 5, sección 7.8, demostrar que

$$(14)\qquad \begin{aligned}(\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c}) &= -(\mathbf{b}\ \ \mathbf{a}\ \ \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}\ \ \mathbf{c}\ \ \mathbf{b})\\ (\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c}) &= (\mathbf{b}\ \ \mathbf{c}\ \ \mathbf{a}) = (\mathbf{c}\ \ \mathbf{a}\ \ \mathbf{b}).\end{aligned}$$

58. Demostrar que

$$(15)\qquad \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}.$$

Sugerencia. Elegir coordenadas cartesianas derechas especiales tales que $\mathbf{d} = [d_1, 0, 0]$ y $c = [c_1, c_2, 0]$. Comprobar después que cada lado es igual a $[-b_2c_2d_1, b_1c_2d_1, 0]$. Explicar después por qué los dos lados deben ser entonces iguales en cualquier sistema de coordenadas cartesianas.

59. Usando (15), demostrar que

$$(16)\qquad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c})\mathbf{d}.$$

60. **(Identidad de Lagrange)** Demostrar que (15) implica la *identidad de Lagrange*

$$(17)\qquad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}).$$

8.4 FUNCIONES Y CAMPOS VECTORIALES Y ESCALARES. DERIVADAS

Se inicia aquí el cálculo vectorial, en el que intervienen dos clases diferentes de funciones, las **funciones vectoriales**, cuyos valores son vectores

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(P) = [v_1(P), v_2(P), v_3(P)]$$

que dependen de los puntos P en el espacio, y las **funciones escalares**, cuyos valores son escalares

$$f = f(P)$$

que dependen de P. En las aplicaciones, el dominio de definición de estas funciones es una región del espacio, una superficie en el espacio o una curva en el espacio. Se dice que una función vectorial define un **campo vectorial** en esa región (o en esa superficie o curva). En las figuras 170-173 se presentan ejemplos. De manera similar, una función escalar define un **campo escalar** en una región o, en una superficie o en una curva. Ejemplos son el campo de temperaturas en un cuerpo y el campo de presión del

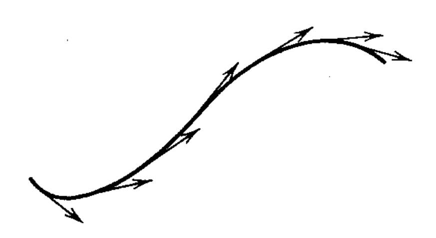


Figura 170. Campo de vectores tangentes de una curva.

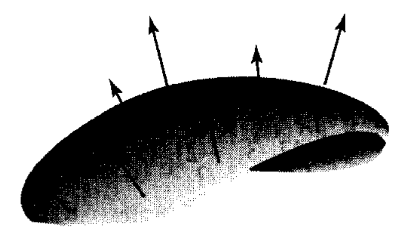


Figura 171. Campo de vectores normales a una superficie.

aire en la atmósfera terrestre. Las funciones vectoriales y escalares también pueden depender del tiempo t o de parámetros adicionales.

Comentario acerca de la notación. Si se introducen las coordenadas cartesianas x, y, z, entonces en lugar de $\mathbf{v}(P)$ y $f(P)$ también puede escribirse

$$\mathbf{v}(x, y, z) = [v_1(x, y, z), \quad v_2(x, y, z), \quad v_3(x, y, z)]$$

y $f(x, y, z)$, pero se tiene presente que un campo vectorial o escalar que tiene un significado geométrico o físico deberá depender únicamente de los puntos P donde está definido pero no de la elección particular de las coordenadas cartesianas.

EJEMPLO 1 Función escalar (Distancia euclidiana en el espacio)

La distancia $f(P)$ de cualquier punto P a un punto fijo P_0 en el espacio es una función escalar cuyo dominio de definición es el espacio completo. $f(P)$ define un campo escalar en el espacio. Si se introduce un sistema de coordenadas cartesianas y P_0 tiene las coordenadas x_0, y_0, z_0, entonces f está dada por la conocida fórmula

$$f(P) = f(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

donde x, y, z son las coordenadas de P. Si el sistema de coordenadas cartesianas dado se sustituye por otro sistema, entonces los valores de las coordenadas de P y P_0 generalmente variarán, pero $f(P)$ tendrá el mismo valor que antes. Por tanto $f(P)$ es una función escalar. Los cosenos directores de la recta que pasa por P y P_0 no son escalares ya que sus valores dependerán del sistema de coordenadas elegido. ∎

EJEMPLO 2 Campo vectorial (Campo de velocidades)

En cualquier instante, los vectores de velocidad $\mathbf{v}(P)$ de un cuerpo B en rotación constituyen un campo vectorial, el llamado **campo de velocidades** de la rotación. Si se introduce un sistema de coordenadas cartesianas que tenga el origen en el eje de rotación, entonces (ver el ejemplo 6 de la sección 8.3)

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{w} \times \mathbf{r} = \mathbf{w} \times [x, y, z] = \mathbf{w} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}),$$

donde x, y, z son las coordenadas de cualquier punto P de B en el instante bajo consideración. Si las coordenadas son tales que el eje z es el eje de rotación y $\mathbf{w}$ apunta en la dirección z positiva, entonces $\mathbf{w} = \omega\mathbf{k}$ y

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega[-y, x, 0] = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

En la figura 172 se presenta un ejemplo de un cuerpo en rotación y del campo de velocidades correspondiente. ∎

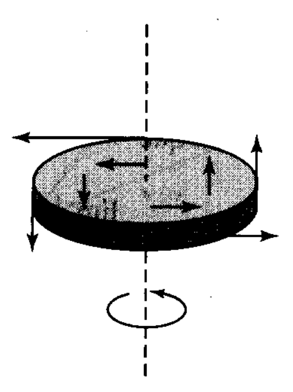


Figura 172. Campo de velocidades de un cuerpo en rotación.

EJEMPLO 3 Campo vectorial (Campo de fuerza)

Sean una partícula A de masa M que está fija en el punto P_0 y una partícula B de masa m que es libre de ocupar varias posiciones P en el espacio. Entonces A ejerce una atracción sobre B. De acuerdo con la **ley de la gravitación de Newton**, la fuerza gravitacional $\mathbf{p}$ correspondiente se dirige de P a P_0 y su magnitud es proporcional a $1/r^2$, donde r es la distancia entre P y P_0, por ejemplo,

$$(2) \qquad |\mathbf{p}| = \frac{c}{r^2}, \qquad c = GMm,$$

donde G (= $6.67 \cdot 10^{-8}$ cm^3/g $\cdot$ s^2) es la constante gravitacional. Por tanto, $\mathbf{p}$ define un campo vectorial en el espacio. Si se introducen coordenadas cartesianas tales que P_0 tenga las coordenadas x_0, y_0, z_0 y P tenga las coordenadas x, y, z, entonces por el teorema de Pitágoras

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \qquad (\geqq 0).$$

Suponiendo que $r > 0$ e introduciendo el vector

$$\mathbf{r} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k},$$

se tiene $|\mathbf{r}| = r$ y $(-1/r)\mathbf{r}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{p}$; el signo menos indica que $\mathbf{p}$ se dirige de P a P_0 (figura 173). A partir de lo anterior y de (2) se obtiene

$$(3) \qquad \mathbf{p} = |\mathbf{p}|\left(-\frac{1}{r}\mathbf{r}\right) = -\frac{c}{r^3}\mathbf{r} = -c\,\frac{x - x_0}{r^3}\mathbf{i} - c\,\frac{y - y_0}{r^3}\mathbf{j} - c\,\frac{z - z_0}{r^3}\mathbf{k}.$$

Esta función vectorial describe la fuerza gravitacional que actúa sobre B. ∎

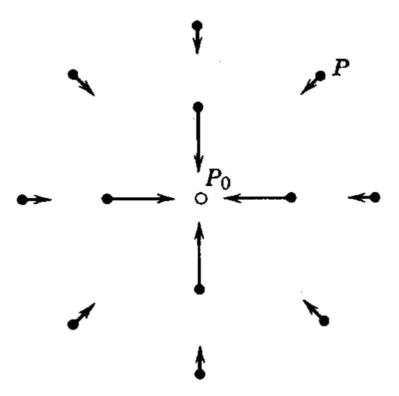


Figura 173. Campo gravitacional del ejemplo 3.

Cálculo vectorial

Se establece a continuación que los conceptos básicos de cálculo, como convergencia, continuidad y derivabilidad, pueden definirse para funciones vectoriales en una forma simple y natural. Lo más importante aquí es la derivada.

Convergencia. Se dice que una sucesión infinita de vectores $\mathbf{a}_{(n)}$, $n = 1, 2, \cdots$ **converge** si existe un vector $\mathbf{a}$ tal que

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} |\mathbf{a}_{(n)} - \mathbf{a}| = 0.$$

A $\mathbf{a}$ se le llama el **vector límite** de la sucesión y se escribe

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_{(n)} = \mathbf{a}.$$

Dadas coordenadas cartesianas, esta sucesión de vectores converge a **a** si y sólo si las tres sucesiones de las componentes de los vectores convergen a las componentes correspondientes de **a**. Se deja al estudiante la sencilla demostración.

De manera similar, se dice que una función vectorial $\mathbf{v}(t)$ de una variable real tiene el **límite** l cuanto t tiende a t_0 si $\mathbf{v}(t)$ está definida en alguna *vecindad*[7] de t_0 (con la posible excepción de t_0) y

(6)
$$\lim_{t \to t_0} |\mathbf{v}(t) - l| = 0.$$

Entonces se escribe

(7)
$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{v}(t) = l.$$

Continuidad. Se dice que una función vectorial $\mathbf{v}(t)$ es **continua** en $t = t_0$ si está definida en alguna vecindad de t_0 y

(8)
$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0).$$

Si se introduce un sistema de coordenadas cartesianas, puede escribirse

$$\mathbf{v}(t) = [v_1(t), v_2(t), v_3(t)] = v_1(t)\mathbf{i} + v_2(t)\mathbf{j} + v_3(t)\mathbf{k}.$$

Entonces $\mathbf{v}(t)$ es continua en t_0 si y sólo si sus tres componentes son continuas en t_0.

Se establece ahora la más importante de estas definiciones.

Definición. Derivada de una función vectorial

Se dice que una función vectorial $\mathbf{v}(t)$ es **derivable** en un punto t si el límite

(9)
$$\boxed{\mathbf{v}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}}$$

existe. Al vector $\mathbf{v}'(t)$ se le llama la **derivada** de $\mathbf{v}(t)$. Ver la figura 174. (La curva en esta figura es lugar geométrico de las puntas de las flechas que representan a **v** para valores de la variable independiente en algún intervalo que contiene a t y a $t + \Delta t$.) ∎

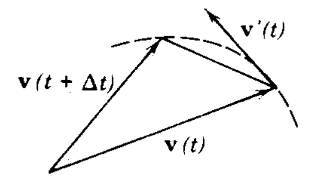


Figura 174. Derivada de una función vectorial.

[7] Es decir, en algún intervalo (segmento) del eje t que contiene a t_0 como punto interior (no como punto extremo). En matemáticas (a diferencia del lenguaje cotidiano), un punto (t_0 en este caso) se considera siempre como un punto de cualquiera de sus vecindades, por definición; esto resulta ser práctico.

En términos de componentes con respecto a un sistema dado de coordenadas cartesianas, $\mathbf{v}(t)$ es derivable en un punto t si y sólo si sus tres componentes son derivables en t y en tal caso *la derivada* $\mathbf{v}'(t)$ *se obtiene derivando cada componente por separado,*

$$\mathbf{v}'(t) = [v_1'(t), \quad v_2'(t), \quad v_3'(t)]. \tag{10}$$

Se sigue que las familiares reglas de derivacjón dan lugar a las reglas correspondientes para derivar funciones vectoriales, por ejemplo,

$$(c\mathbf{v})' = c\mathbf{v}' \qquad (c \text{ constante}),$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$$

y en particular

$$(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}' \tag{11}$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}' \tag{12}$$

$$(\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w})' = (\mathbf{u}' \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}) + (\mathbf{u} \quad \mathbf{v}' \quad \mathbf{w}) + (\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}'). \tag{13}$$

Las sencillas demostraciones se dejan al lector. En (12), el orden de los vectores deberá seguirse con atención ya que la multiplicación cruz no es conmutativa.

EJEMPLO 4 Derivada de una función vectorial de longitud constante

Sea $\mathbf{v}(t)$ una función vectorial cuya longitud es constante, por ejemplo, $|\mathbf{v}(t)| = c$. Entonces $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = c^2$, y $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})' = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 0$, por derivación [ver (11)]. Se obtiene así el siguiente resultado. *La derivada de una función vectorial* $\mathbf{v}(t)$ *de longitud constante es el vector cero o es perpendicular a* $\mathbf{v}(t)$. ▮

Derivadas parciales de una función vectorial

Por la presente discusión se observa que la derivación parcial de funciones vectoriales que dependen de dos o más variables puede introducirse de la siguiente manera. Suponer que las componentes de una función vectorial

$$\mathbf{v} = [v_1, \quad v_2, \quad v_3] = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

son funciones derivables de n variables $t_1, \cdots, t_n$. Entonces la **derivada parcial** de $\mathbf{v}$ con respecto a t_l se denota por $\partial\mathbf{v}/\partial t_l$ y se define como la función vectorial

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_l} = \frac{\partial v_1}{\partial t_l}\mathbf{i} + \frac{\partial v_2}{\partial t_l}\mathbf{j} + \frac{\partial v_3}{\partial t_l}\mathbf{k}.$$

De manera similar,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t_l \partial t_m} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{k},$$

y así sucesivamente.

EJEMPLO 5 Derivadas parciales

Sea $\mathbf{r}(t_1, t_2) = a \cos t_1\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t_1\, \mathbf{j} + t_2\, \mathbf{k}$. Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_1} = -a \operatorname{sen} t_1\, \mathbf{i} + a \cos t_1\, \mathbf{j}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_2} = \mathbf{k}.$$ ∎

En las secciones siguientes y el capítulo 9 se discutirán diferentes aplicaciones físicas y geométricas de las derivadas de funciones vectoriales.

Problemas de la sección 8.4

Campos escalares

Curvas de nivel. Determinar las *curvas de nivel* $T(x, y) = const$ (curvas de temperatura constante o *isotermas*) de los campos de temperatura dados por las siguientes funciones. Trazar algunas de las isotermas.

1. $T = x^2 - y^2$ **2.** $T = \ln (x^2 + y^2)$ **3.** $T = 3x - 4y$
4. $T = x^2 - y^2 + 4y$ **5.** $T = xy$ **6.** $T = \arctan (y/x)$

Considerar el campo escalar (campo de presión) determinado por $f(x, y) = x^2 + 4y^2$. Encontrar:

7. La presión en los puntos $(-1, 2)$, $(3, 8)$ y $(0, 5)$.
8. Las curvas de nivel (curvas de presión constante o *isobaras*). (Graficar algunas de ellas.)
9. La presión en los puntos de la parábola $y = 2x^2$.
10. La región en la que $1 \leqq f(x, y) \leqq 4$.

Superficies de nivel. Encontrar las *superficies de nivel* $f(x, y, z) = const$ de los campos escalares en el espacio dados por las siguientes funciones.

11. $f = x + y + z$ **12.** $f = x^2 + y^2 + z^2$ **13.** $f = x^2 + y^2$
14. $f = x^2 + 9y^2 + 25z^2$ **15.** $f = z - \sqrt{x^2 + y^2}$ **16.** $f = x^2 + y^2 - z$

Considerar el campo de presión en el espacio dado por $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2$. Encontrar:

17. Las superficies de nivel.
18. Una fórmula para la presión en la superficie $xyz = 1$.
19. Las curvas de nivel en el plano $z = 2$. (Graficar algunas de ellas.)
20. La región en la que $3 \leqq f(x, y, z) \leqq 12$.

Campos vectoriales

Trazar figuras (similares a la figura 173) de los campos vectoriales en el plano xy dados por las siguientes funciones vectoriales.

21. $\mathbf{v} = \mathbf{i}$
22. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
23. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$
24. $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
25. $\mathbf{v} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$
26. $\mathbf{v} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$

Encontrar y trazar las curvas en las que **v** tiene longitud constante y las curvas en las que **v** tiene dirección constante, donde

27. $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
28. $\mathbf{v} = x^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$
29. $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

Derivadas

Encontrar la primera y segunda derivadas de las siguientes funciones vectoriales y las normas (longitudes) de estas derivadas.

30. $\mathbf{a} + \mathbf{b}t$
31. $[t, \ t^2, \ 0]$
32. $[\cos t, \ \operatorname{sen} t, \ 0]$
33. $[3 \cos t, \ 2 \operatorname{sen} t, \ 0]$
34. $[t, \ t^2, \ t^3]$
35. $[3 \cos t, \ 3 \operatorname{sen} t, \ 4t]$
36. $[\cos t, \ 4 \operatorname{sen} t, \ t]$
37. $[\cos t, \ \operatorname{sen} 2t, \ 0]$
38. $[e^{-t} \cos t, \ e^{-t} \operatorname{sen} t, \ 0]$

Derivadas parciales. Encontrar la primera derivada parcial con respecto a x, y, z:

39. $[x, \ y, \ z]$
40. $[2, \ x^3y^2z, \ 3x]$
41. $[xy, \ yz, \ 0]$
42. $[e^x \operatorname{sen} y, \ e^x \cos y, \ e^z]$
43. $[y^2, \ z^2, \ x^2]$
44. $\operatorname{sen} xyz \ (\mathbf{i} + \mathbf{j})$

Derivadas de productos. Para $\mathbf{u} = [t^2, 0, -3t]$, $\mathbf{v} = [0, -4t^3, t + 1]$ y $\mathbf{w} = [3t^2, t, -t^3]$ comprobar

45. Fórmula (11)
46. Fórmula (12)
47. Fórmula (13)

48. Usando (2), sección 8.2, demostrar (11). Demostrar (12).

49. Deducir (13) a partir de (11) y (12).

50. Demostrar que $\left(\frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}\right)' = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{-3/2}\,[\mathbf{v}'(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}')]$.

8.5 CURVAS. TANGENTES. LONGITUD DE ARCO

Como una importante aplicación del cálculo vectorial, se consideran a continuación algunos hechos básicos acerca de las curvas en el espacio. El estudiante sabrá ya que las curvas se presentan en varios problemas del cálculo así como de la física, por ejemplo, como trayectorias de cuerpos en movimiento. Cabe mencionar que el estudio de curvas y superficies en el espacio por medio del cálculo es una importante rama de las matemáticas que se llama **geometría diferencial**.

Dado un sistema de coordenadas cartesianas, una curva C puede representarse por una función vectorial (ver la figura 175 en la página 509)

$$(1) \qquad \mathbf{r}(t) = [x(t), \ y(t), \ z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k};$$

a cada valor t_0 de la variable real t le corresponde un punto de C que tiene el vector de posición $\mathbf{r}(t_0)$, es decir, las coordenadas $x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$.

Una representación de la forma (1) se denomina **representación paramétrica** de la curva C y a t se le llama el *parámetro* de esta representación.

Al sentido en que se incrementan los valores de t se llama **sentido positivo** de C, el cual puede indicarse por la punta de una flecha como en la figura 175, y el sentido en que t se decrementa se llama *sentido negativo* de C. Se dice que de esta manera la función $\mathbf{r}(t)$ define una **orientación** de C. Evidentemente, hay dos maneras de orientar una curva.

Las representaciones paramétricas son útiles en muchas aplicaciones, por ejemplo, en mecánica, donde t puede ser el tiempo y el sentido positivo es el sentido en que un cuerpo se mueve sobre una curva.

Otro tipo de representación de una curva C en el espacio es

$$y = f(x), \qquad z = g(x); \tag{2}$$

aquí, $y = f(x)$ es la proyección de C en el plano xy, y $z = g(x)$ es la proyección de C en el plano xz.

Por último, un tercer tipo es la representación de una curva en el espacio como la intersección de dos superficies

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{y} \quad G(x, y, z) = 0. \tag{3}$$

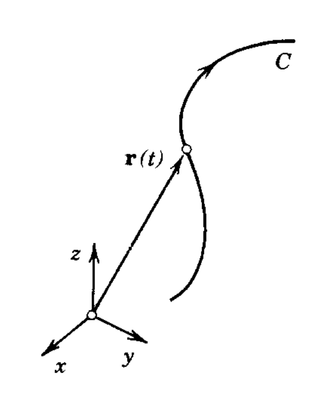


Figura 175. Representación paramétrica de una curva.

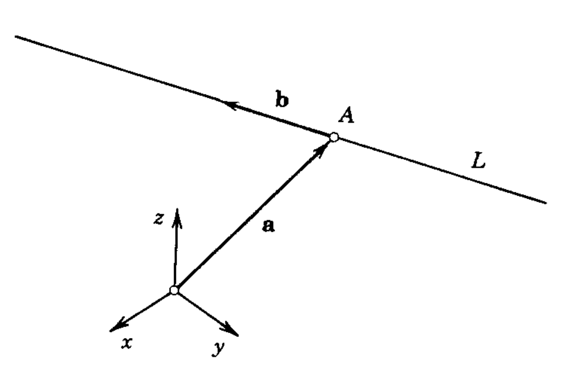


Figura 176. Representación paramétrica de una recta.

EJEMPLO 1 Recta

Una recta L que pasa por un punto A con vector de posición $\mathbf{a}$ en la dirección de un vector constante $\mathbf{b}$ (ver la figura 176) puede representarse en la forma

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = [a_1 + tb_1, \ a_2 + tb_2, \ a_3 + tb_3]. \tag{4}$$

Si $\mathbf{b}$ es un vector unitario, sus componentes son los **cosenos directores** de L, y en este caso $|t|$ mide la distancia de los puntos de L a A. Por ejemplo, la recta en el plano xy que pasa por A: (3, 2) con pendiente 1 es

$$\mathbf{r}(t) = [3, \ 2, \ 0] + t[1, \ 1, \ 0] = [3 + t, \ 2 + t, \ 0].$$ ∎

EJEMPLO 2 Elipse, circunferencia

La función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = [a \cos t, \ b \operatorname{sen} t, \ 0] = a \cos t \, \mathbf{i} + b \operatorname{sen} t \, \mathbf{j} \tag{5}$$

representa una elipse en el plano xy con centro en el origen y ejes principales en la dirección de los ejes x y y. De hecho, ya que $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, por (5) se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad z = 0.$$

Si $b = a$, entonces (5) representa una *circunferencia* de radio a. ∎

EJEMPLO 3 Hélice circular

La curva alabeada C representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = [a \cos t, \quad a \operatorname{sen} t, \quad ct] = a \cos t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + ct\mathbf{k} \qquad (c \neq 0) \tag{6}$$

se denomina *hélice circular*. Está en el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Si $c > 0$, la hélice adopta la forma de un tornillo de cuerda derecha (figura 177). Si $c < 0$, aparece como un tornillo de cuerda izquierda (figura 178). Si $c = 0$, entonces (6) es un círculo. ∎

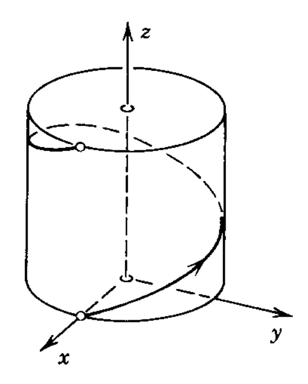


Figura 177. Hélice circular derecha.

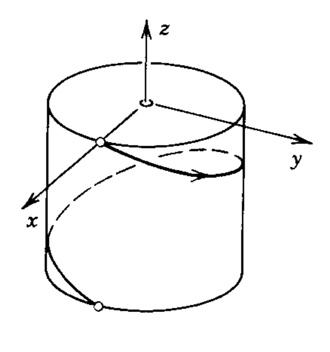


Figura 178. Hélice circular izquierda.

Una **curva plana** es aquella que está en un plano del espacio. Una curva que no es plana se llama **curva alabeada**. Por ejemplo, la hélice es alabeada.

Una **curva simple** es aquella que no tiene **puntos múltiples**, es decir, que no tiene puntos en los que la curva se corta o toca a sí misma. La circunferencia y la hélice son simples. En la figura 179 se muestran curvas que no son simples.

Un **arco** de una curva es la porción comprendida entre dos puntos cualesquiera de la curva. Por simplicidad, se dice "curva" en lugar de curvas así como para los arcos.

Comentario sobre el parámetro. Una curva C puede estar dada por varias funciones vectoriales. Si C está dada por (1) y se hace $t = h(t^*)$, se obtiene una nueva función

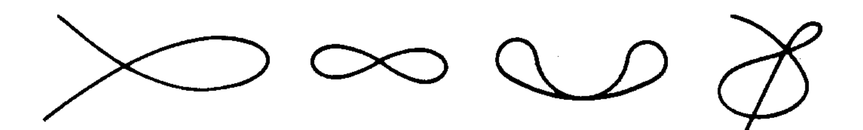


Figura 179. Curvas con puntos múltiples.

vectorial $\tilde{\mathbf{r}}(t^*)$ que representa a C. En mecánica, cuando t es el tiempo, esto significa que se cambia el movimiento de un cuerpo en el tiempo sin cambiar su trayectoria. *Ejemplo.* Para la parábola $\mathbf{r}(t) = [t, t^2]$, al hacer $t = -2t^*$, se obtiene la nueva representación $\tilde{\mathbf{r}}(t^*) = \mathbf{r}(-2t^*) = [-2t^*, 4t^{*2}]$. ∎

La siguiente idea es la aproximación de una curva mediante rectas, que lleva al concepto de tangente y a una definición de longitud. Las tangentes son rectas que están en contacto con una curva como se explica a continuación.

Tangente a una curva

La **tangente** a una curva C en un punto P de C es la posición límite de una recta L que pasa por P y un por un punto Q de C cuando Q tiende a P a lo largo de C. Ver la figura 180.

Si C está dada por $\mathbf{r}(t)$, con P y Q correspondiendo a t y $t + \Delta t$, respectivamente, entonces el vector

$$\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]$$

tiene la dirección de L y en el límite es la derivada

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)], \tag{7}$$

siempre que $\mathbf{r}(t)$ sea derivable, como se supondrá en adelante. Si $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, a $\mathbf{r}'(t)$ se le llama **vector tangente** de C en P porque tiene la dirección de la tangente; lo mismo se cumple para el vector unitario correspondiente, el **vector unitario tangente** (ver la figura 180)

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{r}'|}\mathbf{r}'. \tag{8}$$

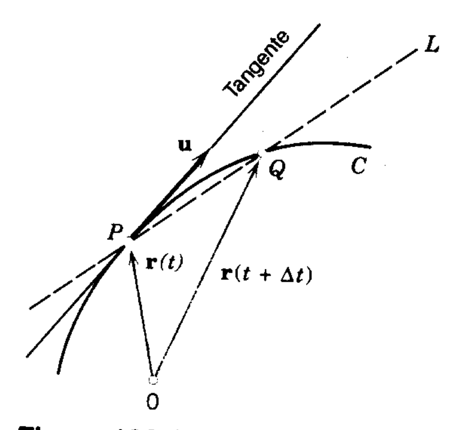


Figura 180. Tangente a una curva.

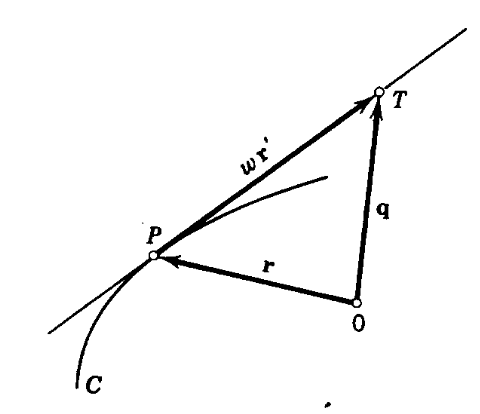


Figura 181. Fórmula (9) para la tangente a una curva.

Obsérvese que tanto **r**' como **u** apuntan en la dirección en que se incrementa t; en consecuencia, su sentido depende de la orientación de C.

Ahora es sencillo ver que la **tangente** a C en P está dada por

$$\text{(9)} \qquad \mathbf{q}(w) = \mathbf{r} + w\mathbf{r}' \qquad \text{(Figura 181)},$$

la suma del vector de posición **r** de P y un múltiplo del vector tangente **r**' de C en P, ambos vectores que dependen de P; aquí la variable real w es el parámetro en (9).

EJEMPLO 4 Tangente a una elipse

Encontrar la tangente a la elipse $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ en P: $(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Solución. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, de donde $\mathbf{r}'(t) = -2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$ y P corresponde a $t = \pi/4$, ya que $2\cos(\pi/4) = \sqrt{2}$ y $\operatorname{sen}(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Por tanto, $\mathbf{r}'(\pi/4) = [-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. *Respuesta.*

$$\mathbf{q}(w) = [\sqrt{2},\ \ 1/\sqrt{2}] + w[-\sqrt{2},\ \ 1/\sqrt{2}] = \sqrt{2}(1 - w)\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})(1 + w)\mathbf{j}.$$

Para comprobar el resultado, trazar la elipse y la tangente. ∎

Longitud de una curva

Ahora puede definirse la longitud l de una curva C como el límite de las longitudes de las líneas quebradas de n cuerdas como en la figura 182 (donde $n = 5$) con n cada vez más grande, como sigue. Sea $\mathbf{r}(t)$, $a \leqq t \leqq b$, que representa a C. Para cada $n = 1, 2, \cdots$ se subdivide ("partición") el intervalo $a \leqq t \leqq b$ por los puntos

$$t_0\ (= a),\quad t_1,\quad \cdots,\quad t_{n-1},\quad t_n\ (= b),$$

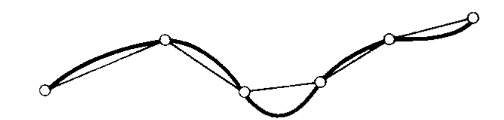


Figura 182. Longitud de una curva.

donde $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. Se obtiene así una línea quebrada de cuerdas con puntos extremos $\mathbf{r}(t_0), \cdots, \mathbf{r}(t_n)$. Se hace esto de manera arbitraria pero del modo que el mayor $|\Delta t_m| = |t_m - t_{m-1}|$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Las longitudes $l_1, l_2, \cdots$ de estas líneas de cuerdas pueden obtenerse por el teorema de Pitágoras. Si $\mathbf{r}(t)$ tiene derivada continua $\mathbf{r}'(t)$, es posible demostrar que la sucesión $l_1, l_2, \cdots$ tiene un límite l, el cual es independiente de la elección particular de la representación de C y de la elección de las subdivisiones, y que está dado por la integral

$$\textbf{(10)} \qquad \boxed{l = \int_a^b \sqrt{\mathbf{r}' \bullet \mathbf{r}'}\, dt} \qquad \left(\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right).$$

Este valor se llama la **longitud** de C y a C se le llama **rectificable**. La demostración es similar a la de las curvas planas que se da en el cálculo elemental (ver referencia [12]) y puede encontrarse en la referencia [B5] del apéndice 1. En general, la evaluación práctica de la integral (10) será difícil; en los problemas de la sección se ofrecen algunos casos simples.

Longitudes de arco de una curva

La longitud l de una curva C es una constante, un número positivo, pero si el límite superior fijo b de (10) se sustituye por un límite superior variable t, la integral queda como una función de t, denotada comúnmente por $s(t)$ y llamada la *función de longitud de arco* o, abreviando, la **longitud de arco** de C, dada por

$$\textbf{(11)} \qquad \boxed{s(t) = \int_a^t \sqrt{\mathbf{r}' \bullet \mathbf{r}'}\, d\tilde{t}} \qquad \left(\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{d\tilde{t}}\right).$$

(Aquí, $\tilde{t}$ es la variable de integración ya que t se usa en el límite superior.) Desde el punto de vista geométrico, $s(t_0)$ con alguna $t_0 > a$ es la longitud del arco de C comprendido entre los puntos con valores paramétricos a y t_0. La elección de a (el punto $s = 0$) es arbitraria; cambiar a significa cambiar s por una constante.

Elemento lineal ds. Si se deriva (11) y se eleva al cuadrado, se tiene

$$\textbf{(12)} \qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \bullet \frac{d\mathbf{r}}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Se acostumbra escribir

$$(13^*) \qquad d\mathbf{r} = [dx,\ dy,\ dz] = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$$

y

$$\textbf{(13)} \qquad ds^2 = d\mathbf{r} \bullet d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

ds se llama el **elemento lineal** de C.

La longitud de arco s como parámetro en representaciones de curvas. El uso de la especial sustitución $t = s$ (la longitud de arco) en representaciones (1) de curvas simplifica varias fórmulas. Un primer caso de ello ocurre para el vector unitario tangente, a saber,

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}'(s), \tag{14}$$

como se sigue de (12) con $t = s$, ya que $ds/ds = 1$. Una simplificación aún mayor ocurre en la curvatura y la torsión (sección 8.7).

EJEMPLO 5 Hélice circular. Circunferencia. La longitud de arco como parámetro

Para la hélice del ejemplo 3,

$$\mathbf{r}(t) = [a \cos t, \quad a \operatorname{sen} t, \quad ct] = a \cos t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + ct\mathbf{k},$$

se obtiene

$$\mathbf{r}'(t) = [-a \operatorname{sen} t, \quad a \cos t, \quad c] = -a \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + a \cos t\, \mathbf{j} + c\mathbf{k},$$

A partir de esta expresión, $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = a^2 + c^2$, de donde por (11) se obtiene

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 + c^2}\, d\tilde{t} = t\sqrt{a^2 + c^2}.$$

Por tanto $t = s/\sqrt{a^2 + c^2}$, y una fórmula para la hélice con la longitud de arco s como parámetro es

$$\mathbf{r}^*(s) = \mathbf{r}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right) = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + c^2}}\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + c^2}}\, \mathbf{j} + \frac{cs}{\sqrt{a^2 + c^2}}\, \mathbf{k}.$$

Al hacer $c = 0$, se tiene $t = s/a$ y se obtiene la representación para una circunferencia de radio a.

$$\mathbf{r}\left(\frac{s}{a}\right) = \left[a \cos \frac{s}{a}, \quad a \operatorname{sen} \frac{s}{a}\right] = a \cos \frac{s}{a}\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \frac{s}{a}\, \mathbf{j}.$$

La circunferencia está orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, lo que corresponde a valores crecientes de s. Al hacer $s = -s^*$ y usando $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ y $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$, se obtiene

$$\mathbf{r}\left(-\frac{s^*}{a}\right) = \left[a \cos \frac{s^*}{a}, \quad -a \operatorname{sen} \frac{s^*}{a}\right] = a \cos \frac{s^*}{a}\, \mathbf{i} - a \operatorname{sen} \frac{s^*}{a}\, \mathbf{j};$$

se tiene $ds/ds^* = -1 < 0$, y la circunferencia está orientada ahora en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.

Problemas de la sección 8.5

Representación de curvas

Rectas. Encontrar una representación paramétrica de las rectas que pasan por un punto A en la dirección de un vector $\mathbf{b}$, donde

1. A: $(1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = \mathbf{k}$

2. A: $(2, 3, 1)$, $\mathbf{b} = [1, -1, 2]$

3. A: $(-3, 1, -2)$, $\mathbf{b} = [3, 0, -1]$

4. A: $(3, 4, 1)$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Encontrar una representación paramétrica de la recta que pasa por los puntos A y B, donde

5. A: (0, 0, 0), B: (1, 1, 1)
6. A: (1, 4, 2), B: (1, 4, −2)
7. A: (3, −1, 5), B: (5, −5, 5)
8. A: (0, 2, 0), B: (1, 5, −2)
9. A: (1, 4, −2), B: (2, 2, 3)
10. A: (9, 3, 8), B: $(0, 3, 10\frac{1}{2})$

Encontrar una representación paramétrica de la recta representada por

11. $y = x, \quad z = 0$
12. $x = y, \quad y = z$
13. $x + y + z = 1, \quad y - z = 0$
14. $x + y - z = 2, \quad 2x - 5y + z = 3$

Curvas generales. ¿Qué curvas están representadas por las siguientes representaciones paramétricas?

15. $[t, \ 1/t, \ 0]$
16. $[0, \ t^2, \ t]$
17. $\cos t\,\mathbf{j} + (2 + 2\,\mathrm{sen}\,t)\mathbf{k}$
18. $[\cos 3t, \ \mathrm{sen}\,3t, \ -t]$
19. $\cosh t\,\mathbf{i} + 4\,\mathrm{senh}\,t\,\mathbf{j}$
20. $4\mathbf{i} + (5 + 3\cos t)\mathbf{j} + (2 + 3\,\mathrm{sen}\,t)\mathbf{k}$

Representar las curvas siguientes en forma paramétrica.

21. $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$
22. $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4, \quad z = 6$
23. $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1, \quad z = 1$
24. $y^2 + 25z^2 = 25, \quad x = -2$
25. $4x^2 - 9y^2 = 36, \quad z = 0$
26. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 3\arctan(y/x)$
27. $(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 4, \quad z = \frac{1}{2}$
28. $(y - 5)(z + 5) = 1, \quad x = 1$

29. Hacer $t = -t^*$ en $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}$ y demostrar que el sentido en que t^* se incrementa es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj en la circunferencia.

30. Si en $\mathbf{r}(t) = (1 - 4t)\mathbf{i} + (3 + 2t)\mathbf{j}$ se hace $t = e^{\tau}$, ¿la representación resultante representa a la recta completa?

Vectores tangente, tangentes

Dada una curva C: $\mathbf{r}(t)$, encontrar (a) un vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ y el vector unitario tangente $\mathbf{u}(t)$ correspondiente, (b) $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{u}$ en el punto P dado y (c) la tangente en P.

31. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad P$: (1, 1, 0)
32. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}, \quad P$: $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
33. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad P$: (2, 8, 0)
34. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad P$: (1, 0, 0)
35. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}, \quad P$: $(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$
36. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\,\mathbf{i} + \mathrm{senh}\,t\,\mathbf{j}, \quad P$: $(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 0)$
37. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, \quad P$: $(0, 3, 2\pi)$
38. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad P$: (1, 1, 1)

Longitud de una curva

Encontrar las longitudes de las curvas siguientes. Trazarlas.

39. **Catenaria** $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \cosh t\,\mathbf{j}$ de $t = 0$ a $t = 1$.

40. **Hélice circular** $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$ de $(a, 0, 0)$ a $(a, 0, 2\pi c)$.

41. **Parábola semicúbica** $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^{3/2}\,\mathbf{j}$ de (0, 0, 0) a (4, 8, 0).

42. **Hipocicloide** de cuatro cúspides $\mathbf{r}(t) = a\cos^3 t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}^3 t\,\mathbf{j}$, longitud total.

43. Si una curva plana está representada en la forma $y = f(x)$, $z = 0$, usando (10) demostrar que su longitud entre $x = a$ y $x = b$ es

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

44. Demostrar que si una curva plana está representada en coordenadas polares $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan (y/x)$, entonces $ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2$ y que

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta \qquad (\rho' = d\rho/d\theta).$$

Usando esta fórmula y (10) del apéndice A3.1, encontrar la longitud total de la **cardioide** $\rho = a(1 - \cos \theta)$. Trazar esta curva.

8.6 VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Las curvas que acaban de discutirse desde un punto de vista geométrico también desempeñan un papel importante en mecánica como trayectorias de cuerpos en movimiento. Para ver esto, se considera una trayectoria C (una curva) dada por $\mathbf{r}(t)$, donde t es ahora el ***tiempo*** y se muestra que la derivada $\mathbf{r}'(t)$, interpretada geométricamente en la sección anterior, también es fundamental en mecánica, al igual que la segunda derivada $\mathbf{r}''(t)$.

Por la sección 8.5 se sabe que el vector

(1) $$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}}$$

es tangente a C y, por lo tanto, apunta en la dirección de movimiento instantáneo del cuerpo movil P. Por (12) de la sección 8.5 se ve que este vector tiene la longitud

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = \frac{ds}{dt},$$

donde s es la longitud de arco, que mide la distancia de P a un punto fijo ($s = 0$) en C sobre la curva. Por tanto, ds/dt es la **velocidad** de P. El vector $\mathbf{v}$ se llama, en consecuencia, **vector velocidad**[8] del movimiento.

La derivada del vector velocidad se denomina el **vector aceleración** y se denotará por $\mathbf{a}$; por tanto,

(2) $$\boxed{\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t).}$$

[8] Cuando no hay lugar a confusión, la rapidez $|\mathbf{v}|$ se llama también **velocidad**.

EJEMPLO 1 Aceleración centrípeta

La función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = R\cos\omega t\,\mathbf{i} + R\,\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j} \qquad (\omega > 0)$$

representa una circunferencia C de radio R con centro en el origen del plano xy y describe el movimiento de una partícula P en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. El vector velocidad

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}' = -R\omega\,\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{i} + R\omega\cos\omega t\,\mathbf{j}$$

(ver la figura 183) es tangente a C y su magnitud, la rapidez,

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'} = R\omega$$

es constante. La **rapidez angular** (la rapidez dividida entre la distancia R al centro) es igual a ω. El vector aceleración es

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{a} = \mathbf{v}' = -R\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i} - R\omega^2\,\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j} = -\omega^2\mathbf{r}.$$

Se observa que hay una aceleración de magnitud constante $|\mathbf{a}| = \omega^2|\mathbf{r}| = \omega^2 R$ hacia el origen. A $\mathbf{a}$ se le llama la **aceleración centrípeta**. Resulta del hecho de que el vector velocidad está cambiando de dirección a una razón constante. La **fuerza centrípeta** es $m\mathbf{a}$, donde m es la masa de P. El vector opuesto $-m\mathbf{a}$ se llama la **fuerza centrífuga** y las dos fuerzas están en equilibrio en cada instante del movimiento. ▮

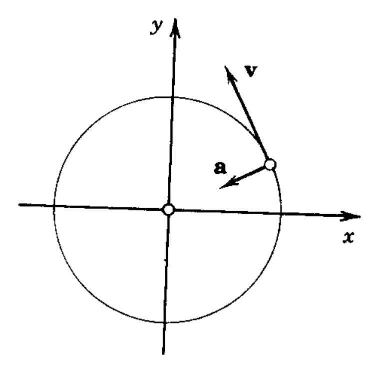


Figura 183. Aceleración centrípeta.

Aceleración tangencial y aceleración normal

Es evidente que $\mathbf{a}$ es la razón de cambio en el tiempo de $\mathbf{v}$. En el ejemplo 1 se tiene $|\mathbf{v}| = const$, pero $|\mathbf{a}| \neq 0$. Con esto se ilustra que, en general, la magnitud de $\mathbf{a}$ no es la razón de cambio de $|\mathbf{v}|$. Esto se debe a que, en general, $\mathbf{a}$ no es tangente a la trayectoria C. De hecho, al aplicar la regla de la cadena a (1) se tiene

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{u}(s)\frac{ds}{dt},$$

donde $\mathbf{u}(s) = d\mathbf{r}/ds$ es el vector tangente unitario de C (sección 8.5) y, al derivar de nuevo esta expresión,

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(s)\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d\mathbf{u}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathbf{u}(s)\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Ahora $\mathbf{u}(s)$ es tangente a C y de longitud constante (uno), por lo que $d\mathbf{u}/ds$ es perpendicular a $\mathbf{u}(s)$ (recuérdese el ejemplo 4 de la sección 8.4). Por tanto (4) es una descomposición del vector aceleración en su componente normal $(d\mathbf{u}/ds)(ds/dt)^2$, (llamada **aceleración normal,** y su componente tangencial $\mathbf{u}(s)d^2s/dt^2$, llamada la **aceleración tangencial**. (A continuación se presentan ejemplos.) A partir de lo anterior se observa que si y sólo si la aceleración normal es cero, $|\mathbf{a}|$ es igual a la razón de cambio en el tiempo de $|\mathbf{v}| = ds/dt$ (excepto por el signo), ya que se tiene entonces $|\mathbf{a}| = |\mathbf{u}(s)||d^2s/dt^2| = |d^2s/dt^2|$ por (4).

EJEMPLO 2 Aceleración de Coriolis[9]

Una partícula P se mueve en un disco hacia el borde, siendo el vector de posición

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{b} \tag{5}$$

donde $\mathbf{b}$ es un vector unitario que gira junto con el disco con rapidez angular constante ω en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 184). Encontrar la aceleración $\mathbf{a}$ de P.

Solución. Debido a la rotación, $\mathbf{b}$ es de la forma

$$\mathbf{b}(t) = \cos \omega t\ \mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\ \mathbf{j}. \tag{6}$$

Al derivar (5) con respecto a t, se obtiene la velocidad

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}' = \mathbf{b} + t\mathbf{b}'. \tag{7}$$

Evidentemente, $\mathbf{b}$ es la velocidad de P con referencia al disco y $t\mathbf{b}'$ es la velocidad adicional debida a la rotación. Al derivar otra vez, se obtiene la aceleración

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = 2\mathbf{b}' + t\mathbf{b}''. \tag{8}$$

En el último término de (8) se tiene $\mathbf{b}'' = -\omega^2\mathbf{b}$, como se establece al derivar (6). Por tanto, esta aceleración $t\mathbf{b}''$ se encuentra dirigida hacia el centro del disco y por el ejemplo 1 se observa que se trata de la aceleración centrípeta debida a la rotación. De hecho, la distancia de P al centro es igual a t, que, por lo tanto, desempeña el papel de R en el ejemplo 1.

El término más interesante y probablemente no esperado de (8) es $2\mathbf{b}'$, la llamada **aceleración de Coriolis**, que resulta de la interacción de la rotación del disco y el movimiento de P en el disco. Tiene la dirección de $\mathbf{b}'$; es decir, es tangencial al borde del disco y, con referencia al sistema fijo de coordenadas xy, apunta en la dirección de la rotación. Si P fuera una persona de masa m_0 que camina en el disco de acuerdo con (5), entonces P sentiría una fuerza $-2m_0\mathbf{b}'$ en la dirección opuesta, es decir, en contra del sentido de la rotación. ∎

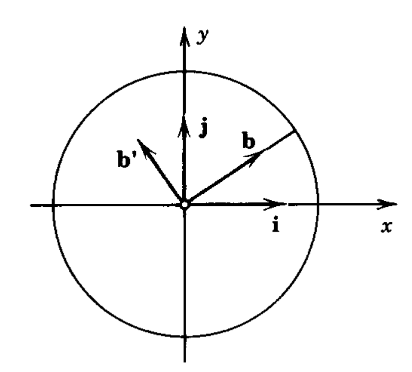


Figura 184. Movimiento en el ejemplo 2.

[9] GUSTAVE GASPARD CORIOLIS (1792-1843), ingeniero francés, quien realizó investigaciones en mecánica.

EJEMPLO 3 Superposición de dos rotaciones, aceleración de Coriolis

Encontrar la aceleración de un proyectil P que se mueve a lo largo de un "meridiano" M de una esfera en rotación (por ejemplo, la superficie de nuestro planeta) con una rapidez constante con respecto a la esfera, que el cual también gira con una rapidez angular constante.

Solución. El movimiento de P sobre M puede describirse en la forma

$$\mathbf{r}(t) = R\cos\gamma t\,\mathbf{b} + R\operatorname{sen}\gamma t\,\mathbf{k} \tag{9}$$

donde R es el radio de la esfera, γ (> 0) es la rapidez angular de P sobre M, $\mathbf{b}$ es un vector unitario horizontal en el plano de M (figura 185) y $\mathbf{k}$ es el vector unitario en la dirección z positiva. Puesto que $\mathbf{b}$ gira junto con la esfera, es de la forma

$$\mathbf{b} = \cos\omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j} \tag{10}$$

donde ω (> 0) es la rapidez angular de la esfera e $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son los vectores unitarios en las direcciones x y y positivas, que están fijas en el espacio. Al derivar (9) se obtiene la velocidad

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}' = R\cos\gamma t\,\mathbf{b}' - \gamma R\operatorname{sen}\gamma t\,\mathbf{b} + \gamma R\cos\gamma t\,\mathbf{k}. \tag{11}$$

Al derivar otra vez con respecto a t se obtiene la aceleración

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = R\cos\gamma t\,\mathbf{b}'' - 2\gamma R\operatorname{sen}\gamma t\,\mathbf{b}' - \gamma^2 R\cos\gamma t\,\mathbf{b} - \gamma^2 R\operatorname{sen}\gamma t\,\mathbf{k}, \tag{12}$$

donde, por (10),

$$\mathbf{b}' = -\omega\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{i} + \omega\cos\omega t\,\mathbf{j},$$

$$\mathbf{b}'' = -\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i} - \omega^2\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j} = -\omega^2\mathbf{b}.$$

Por (9) se observa que la suma de los dos últimos términos de (12) es igual a $-\gamma^2\mathbf{r}$ y (12) queda

$$\mathbf{a} = -\omega^2 R\cos\gamma t\,\mathbf{b} - 2\gamma R\operatorname{sen}\gamma t\,\mathbf{b}' - \gamma^2\mathbf{r}. \tag{13}$$

El primer término del segundo miembro es la aceleración centrípeta producida por la rotación de la esfera y el último término es la aceleración centrípeta resultante de la rotación de P sobre M. El segundo término es la **aceleración de Coriolis**

$$\mathbf{a}_c = -2\gamma R\operatorname{sen}\gamma t\,\mathbf{b}'. \tag{14}$$

En el "hemisferio Norte", sen $\gamma t > 0$ [ver (9)] y debido al signo menos, $\mathbf{a}_c$ tiene la dirección contraria a $\mathbf{b}'$, es decir, tangencial a la superficie de la esfera, perpendicular a M y opuesta a la rotación de la esfera. Su

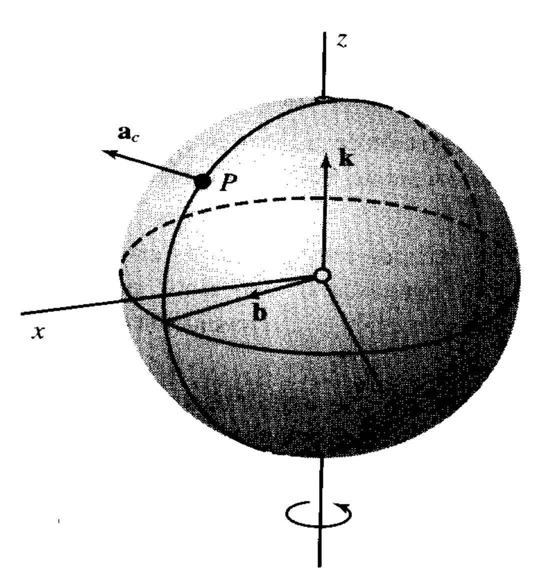


Figura 185. Superposición de dos rotaciones.

magnitud $2\gamma R\,|\text{sen}\,\gamma t|\,\omega$ es máxima en el "polo Norte" y cero en el Ecuador. Si el proyectil P tiene masa m_0, experimenta una fuerza $-m_0\mathbf{a}_c$, opuesta a $m_0\mathbf{a}_c$; esta fuerza es muy parecida a la del ejemplo 2. Esta fuerza tiende a hacer que el proyectil se desvíe hacia la derecha de la trayectoria M. En el "hemisferio Sur", $\text{sen}\gamma t < 0$ y esa fuerza actúa en la dirección opuesta, tendiendo a hacer que el proyectil se desvíe a la izquierda de M. Este efecto puede observarse con relación a misiles, cohetes y obuses. Las corrientes de aire que se dirigen hacia una zona de baja presión también manifiestan estas desviaciones. ∎

Problemas de la sección 8.6

Sea $\mathbf{r}(t)$ el vector de posición de una partícula en movimiento donde t ($\geqq 0$) es el tiempo. Describir la forma geométrica de la trayectoria y encontrar el vector velocidad, la rapidez y el vector aceleración.

1. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i}$
2. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$
3. $\mathbf{r}(t) = 4t^2\mathbf{k}$
4. $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j} + (2 - t^3)\mathbf{k}$
5. $\mathbf{r}(t) = 3\cos 2t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{j}$
6. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
7. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$
8. $\mathbf{r}(t) = \cos t^2\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t^2\,\mathbf{j}$
9. $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\,t\,\mathbf{j}$
10. $\mathbf{r}(t) = 3\cos 2t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,3t\,\mathbf{j}$
11. Encontrar el movimiento para el que el vector aceleración es constante.
12. Obtener (3) a partir de $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$ [(9), sección 8.3] por derivación.
13. Encontrar (a) el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ y el vector aceleración $\mathbf{a}(t)$ del movimiento $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\,t\,\mathbf{j}$, (b) los puntos en que $\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$ y (c) los puntos en que $|\mathbf{a}(t)|$ es máximo.
14. Encontrar la aceleración tangencial y la aceleración normal del movimiento dado por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j}$.
15. Sea un movimiento que está dado por $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$. Encontrar la aceleración tangencial.
16. En el problema 15, encontrar los puntos de rapidez y aceleración máxima y mínima.(Primero hacer una conjetura.)
17. **(Cicloide)** Trazar $\mathbf{r}(t) = (R\,\text{sen}\,\omega t + \omega R t)\mathbf{i} + (R\cos\omega t + R)\mathbf{j}$, tomando $R = 1$ y $\omega = 1$. Esta curva, llamada *cicloide*, es la trayectoria que sigue un punto en el canto de un disco de radio R que rueda sin deslizamiento sobre el eje x. Encontrar $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ en los valores y máximo y mínimo de la curva.
18. Encontrar la aceleración de Coriolis en el ejemplo 2 con $\mathbf{r} = t^2\mathbf{b}$ en lugar de (5).
19. Encontrar la aceleración de la Tierra en dirección del Sol a partir de (3) y del hecho de que la Tierra gira alrededor del Sol en una órbita casi circular con una velocidad casi constante de 30 km/s.
20. Encontrar la aceleración centrípeta de la Luna en dirección a la Tierra, suponiendo que la órbita de la Luna es una circunferencia con radio igual 239 000 millas $= 3.85 \cdot 10^8$ metros y que el tiempo para efectuar una revolución completa es de 27.3 días $= 2.36 \cdot 10^6$ segundos.
21. **(Satélite)** Encontrar la velocidad de un satélite artificial de la Tierra que viaja a una altitud de 80 millas sobre la superficie terrestre donde $g = 31$ ft/s^2. (El radio de la Tierra mide 3 960 millas.) *Sugerencia.* Ver el ejemplo 1.
22. Un satélite se mueve en una órbita circular a 450 millas de la superficie de la Tierra y completa una revolución en 100 minutos. Encontrar la aceleración de la gravedad en la órbita a partir de estos datos y del radio de la Tierra (3 960 millas).

8.7 CURVATURA Y TORSIÓN DE UNA CURVA. *OPCIONAL*

Acompañada de la sección 8.5, la presente sección establece los fundamentos de la teoría de las curvas en el espacio, pero el material incluido aquí no se usará más adelante, por lo que esta sección es opcional.

La **curvatura** $\kappa(s)$ de una curva C, representada por $\mathbf{r}(s)$ con la longitud de arco s como parámetro, está definida por

$$\text{(1)} \qquad \boxed{\kappa(s) = |\mathbf{u}'(s)| = |\mathbf{r}''(s)|} \qquad (' = d/ds).$$

Aquí $\mathbf{u}(s)$ es el vector tangente unitario de C (sección 8.5) y es necesario suponer que $\mathbf{r}(s)$ puede derivarse dos veces, de tal modo que $\mathbf{r}''(s)$ existe.

Puesto que κ es la longitud de la razón de cambio del vector tangente unitario de C con s, se observa que κ mide la desviación de C con respecto a la tangente en cada punto de C. A continuación se presentan ejemplos así como en los problemas de la sección. Para parámetros generales t, la fórmula de la curvatura es complicada (problema 2).

Si $\kappa(s) \neq 0$ (y, en consecuencia, > 0), el vector unitario $\mathbf{p}(s)$ en la dirección de $\mathbf{u}'(s)$ es

$$\text{(2)} \qquad \boxed{\mathbf{p} = \frac{1}{\kappa}\mathbf{u}'} \qquad (\kappa > 0)$$

y se conoce como el **vector normal unitario principal** de C. Por el ejemplo 4 de la sección 8.4 se ve que $\mathbf{p}$ es perpendicular a $\mathbf{u}$. El vector

$$\text{(3)} \qquad \boxed{\mathbf{b} = \mathbf{u} \times \mathbf{p}} \qquad (\kappa > 0)$$

se denomina **vector binormal unitario** de C. Por la definición de producto vectorial se sigue que $\mathbf{u}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{b}$ constituyen una terna derecha de vectores unitarios ortogonales(sección 8.3). Esta terna se llama el **triedro** de C en el punto bajo consideración (figura 186). Las tres rectas que pasan por ese punto en las direcciones de $\mathbf{u}$, $\mathbf{p}$,

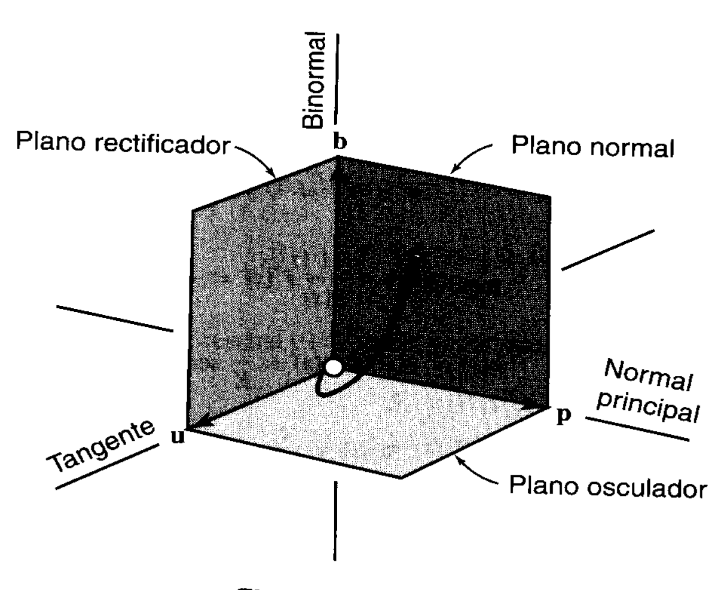


Figura 186. Triedro.

b se llaman la **tangente**, la **normal principal** y la **binormal** de C. La figura 186 muestra también los nombres de los tres planos generados por cada par de estos vectores.

Torsión de una curva

Para introducir la torsión $\tau(s)$ de una curva C representada por $\mathbf{r}(s)$, se considera la derivada $\mathbf{b}'=d\mathbf{b}/ds$ del vector binormal unitario **b** de C. Se supone aquí que $\mathbf{r}(s)$ puede derivarse tres veces, de tal modo que $\mathbf{b}'$ existe. Si $\mathbf{b}'(s) \neq \mathbf{0}$, es perpendicular a **b** (ver el ejemplo 4 de la sección 8.4). Se demuestra a continuación que $\mathbf{b}'$ también es perpendicular a **u**. De hecho, al derivar $\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = 0$ se tiene $\mathbf{b}' \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}' = 0$; por tanto, $\mathbf{b}' \cdot \mathbf{u} = 0$ ya que $\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}' = (\mathbf{u} \times \mathbf{p}) \cdot \kappa\mathbf{p} = 0$ por (3) y (2). Por consiguiente, $\mathbf{b}'$ es de la forma $\mathbf{b}' = \alpha\mathbf{p}$ donde α es un escalar. Se acostumbra hacer $\alpha = -\tau$. Entonces

$$\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{p} \qquad (\kappa > 0). \tag{4}$$

La función escalar τ se llama la **torsión** de C. Al tomar el producto punto por **p** en ambos miembros de (4) se obtiene

$$\boxed{\tau(s) = -\mathbf{p}(s)\cdot\mathbf{b}'(s).} \tag{5}$$

Los conceptos que acaban de introducirse son básicos en la teoría y aplicación de curvas. Se ilustran con un ejemplo típico. En los problemas de la sección se presentan otras aplicaciones.

EJEMPLO 1 Hélice circular. Círculo

En el caso de la hélice circular (6) de la sección 8.5 se obtiene la longitud de arco $s = t\sqrt{a^2 + c^2}$; ver el ejemplo 5 de la sección 8.5. Por tanto, la hélice puede representarse en la forma

$$\mathbf{r}(s) = a \cos\frac{s}{K}\mathbf{i} + a \operatorname{sen}\frac{s}{K}\mathbf{j} + c\frac{s}{K}\mathbf{k} \qquad \text{donde} \qquad K = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Se sigue que

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}'(s) = -\frac{a}{K}\operatorname{sen}\frac{s}{K}\mathbf{i} + \frac{a}{K}\cos\frac{s}{K}\mathbf{j} + \frac{c}{K}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(s) = -\frac{a}{K^2}\cos\frac{s}{K}\mathbf{i} - \frac{a}{K^2}\operatorname{sen}\frac{s}{K}\mathbf{j}$$

$$\kappa = |\mathbf{r}''| = \sqrt{\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}''} = \frac{a}{K^2} = \frac{a}{a^2 + c^2}$$

$$\mathbf{p}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{r}''(s) = -\cos\frac{s}{K}\mathbf{i} - \operatorname{sen}\frac{s}{K}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{u}(s) \times \mathbf{p}(s) = \frac{c}{K}\operatorname{sen}\frac{s}{K}\mathbf{i} - \frac{c}{K}\cos\frac{s}{K}\mathbf{j} + \frac{a}{K}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b}'(s) = \frac{c}{K^2}\cos\frac{s}{K}\mathbf{i} + \frac{c}{K^2}\operatorname{sen}\frac{s}{K}\mathbf{j}$$

$$\tau(s) = -\mathbf{p}(s)\cdot\mathbf{b}'(s) = \frac{c}{K^2} = \frac{c}{a^2 + c^2}.$$

Por lo tanto, la hélice circular tiene curvatura y torsión constantes. Si $c > 0$ (hélice derecha, ver la figura 177 de la sección 8.5), entonces $\tau > 0$ y si $c < 0$ (hélice izquierda, figura 178), entonces $\tau < 0$.

Si $c = 0$, se tiene una circunferencia de radio a y de las fórmulas se obtiene $\kappa = 1/a$ (por tanto la curvatura es el recíproco del radio) y $\tau = 0$; además, $\mathbf{b}(s) = \mathbf{k}$ es constante, a saber, perpendicular al plano de la circunferencia (el plano xy). ∎

Puesto que **u**, **p** y **b** son vectores linealmente independientes, cualquier vector en el espacio puede representarse como una combinación lineal de estos vectores. En consecuencia, si existen las derivadas $\mathbf{u}'$, $\mathbf{p}'$ y $\mathbf{b}'$, es posible representarlas de esta manera. Las fórmulas correspondientes son las llamadas **fórmulas de Frenet**[10]

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad \mathbf{u}' = \phantom{-\kappa\mathbf{u}} \quad \kappa\mathbf{p} \\ &\text{(b)} \quad \mathbf{p}' = -\kappa\mathbf{u} \qquad\quad + \tau\mathbf{b} \\ &\text{(c)} \quad \mathbf{b}' = \qquad\quad -\tau\mathbf{p} \end{aligned}$$

La fórmula (6a) se sigue de (2) y (6c) es idéntica a (4). La deducción de (6b) tampoco es muy difícil y se deja al lector (problema 16).

Una curva se encuentra determinada de manera única (salvo por su posición en el espacio) si su curvatura $\kappa (> 0)$ y su torsión τ se prescriben como funciones continuas de longitud de arco s. (La demostración se encuentra en la referencia [B5] del apéndice 1.) Por esta razón, a las expresiones $\kappa = \kappa(s)$ y $\tau = \tau(s)$ se les llama **ecuaciones naturales** de una curva. Esto muestra asimismo porqué la curvatura y la torsión son básicas en la geometría diferencial de curvas en el espacio.

Concluye así la discusión de las funciones vectoriales de una sola variable y su aplicación en la geometría y la mecánica.

Problemas de la sección 8.7

1. Demostrar que la curvatura de una circunferencia de radio a es igual a $1/a$.

2. Usando (1), demostrar que si una curva está representada por $\mathbf{r}(t)$, donde t es un parámetro cualquiera, entonces su curvatura es

$$\text{(1')} \qquad \kappa(t) = \frac{\sqrt{(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')(\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'') - (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'')^2}}{(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')^{3/2}}.$$

3. Usando (1'), demostrar que para una curva $y = y(x)$ en el plano xy,

$$\text{(1'')} \qquad \kappa(x) = |y''|/(1 + y'^2)^{3/2} \qquad (y' = dy/dx, \text{ etc.}).$$

Indicar qué clase de curva se representa y encontrar su curvatura usando (1') o (1'').

4. $\mathbf{r} = a \cos t\, \mathbf{i} + b \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$

5. $y = x^2$

6. $xy = 1$

7. $\mathbf{r} = a \cos t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + ct\mathbf{k}$

8. $\mathbf{r} = \cosh t\, \mathbf{i} + \operatorname{senh} t\, \mathbf{j}$

9. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j} \quad (t \geqq 0)$

[10] JEAN-FRÉDÉRIC FRENET (1816-1900), matemático francés.

Torsión de una curva

10. Usando (3) y (5), demostrar que la torsión $\tau(s)$ de una curva C: $\mathbf{r}(s)$ es

$$(5') \qquad \tau(s) = (\mathbf{u} \quad \mathbf{p} \quad \mathbf{p}') \qquad (\kappa > 0).$$

11. Usando (2), demostrar que (5′) puede escribirse ($' = d/ds$, etc.)

$$(5'') \qquad \tau(s) = (\mathbf{r}' \quad \mathbf{r}'' \quad \mathbf{r}''')/\kappa^2 \qquad (\kappa > 0).$$

12. Demostrar que si una curva C está representada por $r(t)$, donde t es un parámetro cualquiera, entonces (5″) queda como ($' = d/dt$, etc.)

$$(5''') \qquad \tau(t) = \frac{(\mathbf{r}' \quad \mathbf{r}'' \quad \mathbf{r}''')}{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'') - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'')^2} \qquad (\kappa > 0).$$

13. Demostrar que la torsión de una curva plana (con $\kappa > 0$) es una identidad con cero.

14. Encontrar la torsión de la hélice $\mathbf{r}(t) = a \cos t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\, j + ct\mathbf{k}$. Usar (5‴). Comparar el resultado con el ejemplo 1.

15. Encontrar la torsión de la curva C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ (que es parecida a la curva de la figura 186).

16. Demostrar la fórmula de Frenet (6b). *Sugerencia.* Empezar derivando $\mathbf{p} = \mathbf{b} \times \mathbf{u}$.

8.8 REPASO DE CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES. *OPCIONAL*

De las funciones vectoriales de una sola variable se abordan ahora a las funciones vectoriales de varias variables, empezando con un repaso del cálculo. ***El estudiante deberá pasar a la siguiente sección y consultar este material sólo en caso de ser necesario.*** (Esta breve sección se incluye a fin de mantener la autonomía del libro. Para las derivadas parciales, ver el apéndice 3.)

Regla de la cadena

Teorema 1 (Regla de la cadena)

Sea $w = f(x, y, z)$ continua y con primeras derivadas parciales continuas en un dominio[11] *D en el espacio xyz. Sean $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ funciones que son continuas y con primeras derivadas parciales en un dominio B en el plano uv, donde B es tal que para todo punto (u, v) de B, el punto correspondiente* $[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$ *está en D. Entonces la función*

$$w = f(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))$$

[11] Un **dominio** D es un conjunto abierto de puntos conectados, donde "conectados" significa que dos puntos cualesquiera de D pueden unirse por medio de una línea quebrada con un número finito de segmentos lineales cuyos puntos pertenecen en su totalidad a D y "abierto" significa que todo punto P de D tiene una vecindad (una pequeña bola con centro en P) cuyos puntos pertenecen en su totalidad a D. Por ejemplo, el interior de un cubo o de un elipsoide (el sólido sin la superficie que lo delimita) es un dominio.

está definida en B, tiene primeras derivadas con respecto a u y v en B, y

(1) $$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},\qquad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Casos especiales de interés práctico

Si $w = f(x, y)$ y $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ como anteriormente, entonces (1) queda como

(2) $$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Si $w = f(x, y, z)$ y $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, entonces de (1) se obtiene

(3) $$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Si $w = f(x, y)$ y $x = x(t)$, $y = y(t)$, entonces (3) se reduce a

(4) $$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Por último, del caso más simple $w = f(x)$, $x = x(t)$ se obtiene

(5) $$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

EJEMPLO 1 Regla de la cadena

Si $w = x^2 - y^2$ y se definen las coordenadas polares r, θ por $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, entonces de (2) se obtiene

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 2x\cos\theta - 2y\,\mathrm{sen}\,\theta = 2r\cos^2\theta - 2r\,\mathrm{sen}^2\theta = 2r\cos 2\theta,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = 2x(-r\,\mathrm{sen}\,\theta) - 2y(r\cos\theta)$$

$$= -2r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - 2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = -2r^2\,\mathrm{sen}\,2\theta.$$

Teorema del valor medio

Teorema 2 (Teorema del valor medio)

Sea $f(x, y, z)$ continua y con primeras derivadas parciales continuas en un dominio D en el espacio xyz. Sean P_0: (x_0, y_0, z_0) y P: $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$ puntos de D tales que el segmento de recta P_0P que une estos puntos está en su totalidad en D. Entonces

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial z},$$

con las derivadas parciales evaluadas en un punto adecuado de dicho segmento.

Casos especiales

Para una función $f(x, y)$ de dos variables (que satisfacen los supuestos del teorema), la fórmula (6) se reduce a (figura 187)

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{7}$$

y para una función $f(x)$ de una sola variable, (6) queda como

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h\frac{df}{dx}, \tag{8}$$

donde el dominio D en (8) es un segmento del eje x y la derivada se toma en un punto adecuado entre x_0 y $x_0 + h$.

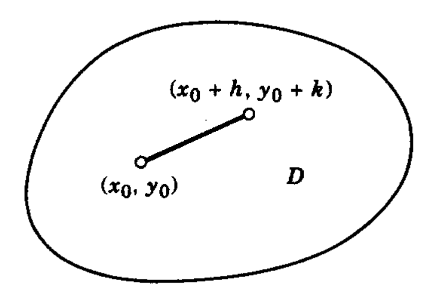


Figura 187. Teorema del valor medio para una función de dos variables [fórmula (7)].

Problemas de la sección 8.8

Encontrar dw/dt usando (3) o (4) y comprobar el resultado por sustitución y derivación, donde

1. $w = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = e^t, \quad y = \operatorname{sen} t$
2. $w = x/y, \quad x = g(t), \quad y = h(t)$
3. $w = x^y, \quad x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t$
4. $w = xy + yz + zx, \quad x = t, \quad y = \cos t, \quad z = \operatorname{sen} t$
5. $w = (x + y)/(y + z), \quad x = e^t, \quad y = e^{2t}, \quad z = e^{-t}$

Encontrar $\partial w/\partial u$ y $\partial w/\partial v$, donde

6. $w = x^2 + y^2, \quad x = u + v, \quad y = u - v$

7. $w = xy, \quad x = e^u \cos v, \; y = e^u \operatorname{sen} v$

8. $w = x^4 - 4x^2y^2 + y^4, \quad x = uv, \quad y = u/v$

9. $w = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}, \quad x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = 2uv$

10. **(Derivadas parciales sobre una superficie)** Sea $w = f(x, y, z)$ y sea que $z = g(x, y)$ representa una superficie S en el espacio. Entonces sobre S la función queda

$$\tilde{w}(x, y) = f[x, y, g(x, y)].$$

Demostrar que sus derivadas parciales se obtienen con

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} \qquad [z = g(x, y)].$$

Aplicar lo anterior a $f = x^3 + y^3 + z^2$, $g = x^2 + y^2$ y comprobar el resultado por sustitución y derivación directa.

8.9 GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR. DERIVADA DIRECCIONAL

Se verá que en las aplicaciones es frecuente la presencia de campos vectoriales que tienen la ventaja de que pueden obtenerse a partir de campos escalares, cuyo manejo es, desde luego, más sencillo. Esta relación entre los dos tipos de campos se consigue mediante el "gradiente", el cual es, por consiguiente, de gran importancia.

Gradiente. Para una función escalar $f(x, y, z)$ dada el *gradiente* grad f de f es la función vectorial definida por

(1*)
$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Es necesario suponer aquí que f es derivable. Es frecuente, en particular entre físicos e ingenieros, introducir el operador diferencial

(2)
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

(léase **nabla** o "*del*") y escribir

(1)
$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Por ejemplo, el gradiente de $f(x, y, z) = 2x + yz - 3y^2$ es grad $f = \nabla f = 2\mathbf{i} + (z - 6y)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$.

Más adelante se demostrará que grad f es un vector; es decir, aun cuando en (1) se define en términos de componentes, tiene una longitud y una dirección que es independiente de la elección particular de las coordenadas cartesianas. Pero antes se explora la manera en que el gradiente se relaciona con la razón de cambio de f en varias direcciones. En las direcciones de los tres ejes de coordenadas, esta razón está dada por las derivadas parciales, como se sabe por cálculo elemental. La idea de hacer una generalización para direcciones arbitrarias parece natural y lleva al concepto de derivada direccional.

Derivada direccional

La razón de cambio de f en cualquier punto P én cualquier dirección fija dada por un vector **b** se define como en cálculo elemental; se denota por $D_{\mathbf{b}}f$ o df/ds, se le llama la **derivada direccional** *de f en P en la dirección de* **b** y se define por (ver la figura 188)

$$(3) \quad D_{\mathbf{b}}f = \frac{df}{ds} = \lim_{s \to 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s} \qquad (s = \text{distancia entre } P \text{ y } Q),$$

donde Q es un punto variable sobre el rayo C en la dirección de **b** como en la figura 188.

La siguiente idea es usar las coordenadas cartesianas xyz y para **b** un *vector unitario*. Entonces el rayo C está dado por

$$(4) \qquad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} = \mathbf{p}_0 + s\mathbf{b} \qquad (s \geqq 0, \quad |\mathbf{b}| = 1)$$

($\mathbf{p}_0$ es el vector de posición de P) y ahora (3) indica que $D_{\mathbf{b}}f = df/ds$ es la derivada de la función $f(x(s), y(s), z(s))$ con respecto a la longitud de arco s de C. Por tanto, al suponer que f tiene derivadas parciales continuas y aplicando la regla de la cadena [fórmula (3) de la sección anterior], se obtiene

$$(5) \qquad D_{\mathbf{b}}f = \frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z'$$

donde las primas denotan derivadas con respecto a s (las cuales se toman en $s = 0$). Pero aquí $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} = \mathbf{b}$ por (4) y se observa que (5) es simplemente el producto interior de **b** y grad f [ver (2), sección 8.2]; por tanto

$$(6) \qquad \boxed{D_{\mathbf{b}}f = \frac{df}{ds} = \mathbf{b} \cdot \operatorname{grad} f} \qquad (|\mathbf{b}| = 1).$$

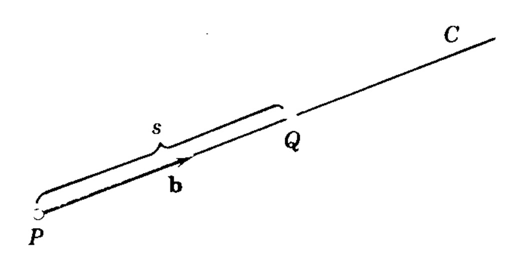


Figura 188. Derivada direccional.

¡Atención! Si la dirección está dada por un vector **a** con una longitud cualquiera ($\neq 0$), entonces

(6′)
$$D_{\mathbf{a}}f = \frac{df}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\,\mathbf{a}\bullet \operatorname{grad} f.$$

EJEMPLO 1 Gradiente. Derivada direccional

Encontrar la derivada direccional de $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ en el punto P: (2, 1, 3) en la dirección del vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$.

Solución. Se obtiene

$$\operatorname{grad} f = 4x\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}, \qquad \text{y en } P, \qquad \operatorname{grad} f = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

A partir de esta expresión y de (6′),

$$D_{\mathbf{a}}f = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{k})\bullet(8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \frac{1\cdot 8 - 2\cdot 6}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{\sqrt{5}} \approx -1.789.$$

El signo menos indica que f decrece en P en la dirección de **a**. ∎

El gradiente caracteriza el incremento máximo

Teorema 1 (Gradiente, incremento máximo)

Sea $f(P) = f(x, y, z)$ una función escalar con primeras derivadas parciales continuas. Entonces grad f *existe y su longitud y dirección son independientes de la elección particular de las coordenadas cartesianas en el espacio. Si en un punto P el gradiente de f es diferente del vector cero, tiene la dirección del incremento máximo de f en P.*

Demostración. Por (6) y la definición de producto interior [(1) de la sección 8.2] se tiene

(7)
$$D_{\mathbf{b}}f = |\mathbf{b}|\,|\operatorname{grad} f| \cos\gamma = |\operatorname{grad} f| \cos\gamma,$$

donde γ es el ángulo entre **b** y grad f. Ahora f es una función escalar. Por tanto, su valor en un punto P depende de P pero no de la elección particular de las coordenadas. Lo mismo se cumple para la longitud de arco s del rayo C (ver la figura 188) y, por consiguiente, también para $D_{\mathbf{b}}f$. Ahora (7) indica que $D_{\mathbf{b}}f$ es máxima cuando cos $\gamma = 1$, $\gamma = 0$, y entonces $D_{\mathbf{b}}f = |\operatorname{grad} f|$. Se concluye que la longitud y la dirección de grad f son independientes de las coordenadas. Puesto que Þ = 0 si y sólo si **b** tiene la dirección de grad f, esta última es la dirección del incremento máximo de f en P, siempre que grad $f \neq \mathbf{0}$ en P. ∎

El gradiente como vector normal a una superficie

Otro uso básico del gradiente ocurre en relación con las superficies S en el espacio dadas por

(8)
$$f(x, y, z) = c = const,$$

como sigue. Se recuerda que una curva C en el espacio puede darse por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad \text{[ver (1), sección 8.5].} \tag{9}$$

Ahora bien, si se quiere que C esté sobre S, sus componentes deben satisfacer (8); por tanto

$$f(x(t), y(t), z(t)) = c. \tag{10}$$

Un vector tangente de C es [ver (7), sección 8.5]

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Si C está sobre S, este vector es tangente a S. En un punto fijo P de S, estos vectores tangentes de todas las curvas en S que pasan por P por lo general formarán un plano llamado el **plano tangente** de S en P (figura 189). Su normal (la recta que pasa por P y es perpendicular al plano tangente) se llama la **normal a la superficie** de S en P y a un vector paralelo a ella se le llama **vector normal a la superficie** de S en P. Ahora bien, si se deriva (10) con respecto a t, por la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' = (\text{grad } f)\cdot\mathbf{r}' = 0, \tag{11}$$

lo que implica la ortogonalidad de grad f y de todos los vectores $\mathbf{r}'$ en el plano tangente. El resultado es (ver la figura 189)

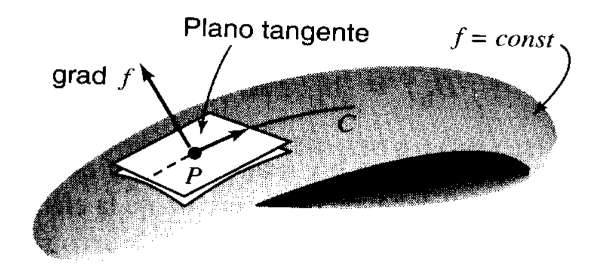


Figura 189. El gradiente como vector normal a una superficie.

Teorema 2 (El gradiente como vector normal a una superficie)

Sea f una función escalar derivable que representa una superficie S: $f(x, y, z) = c =$ const, como se indica en (8). Entonces si el gradiente de f en un punto P de S es diferente del vector cero, es un vector normal de S en P.

Comentario. Las superficies dadas por (8) con varios valores de c se llaman las **superficies de nivel** de la función escalar f.

EJEMPLO 2 El gradiente como vector normal a una superficie

Encontrar un vector normal unitario **n** del cono de revolución $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ en el punto P: (1, 0, 2).
Solución. El cono es la superficie de nivel $f = 0$ de $f(x, y, z) = 4(x^2 + y^2) - z^2$. Por tanto

$$\text{grad } f = 8x\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k} \qquad \text{y en } P, \qquad \text{grad } f = 8\mathbf{i} - 4\mathbf{k}.$$

En consecuencia, por el teorema 2, un vector normal unitario del cono en P es

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\text{grad } f|} \text{grad } f = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k} \qquad \text{(Figura 190)}$$

y el otro es $-\mathbf{n}$. ∎

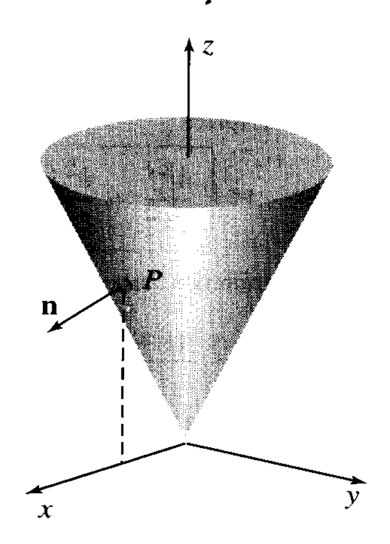


Figura 190. Cono y vector normal unitario **n**.

Campos vectoriales que son gradientes de un campo escalar ("potencial")

En general, los campos escalares son más fáciles de manejar que los campos vectoriales. Algunas funciones vectoriales $\mathbf{v}(P)$ tienen la ventaja de que pueden obtenerse como el gradiente de una función escalar $f(P)$. Entonces a esta última se le llama *función potencial* o **potencial** de $\mathbf{v}(P)$ y a $\mathbf{v}(P)$ se le llama **conservativa** ya que en un campo vectorial como éste la energía se conserva; es decir, no se pierde (ni se gana) energía al desplazar un cuerpo (o una carga en el caso de un campo eléctrico) de un punto P a otro punto del campo y de regreso a P. Esto se demuestra en la sección 9.2. Para obtener una primera impresión de este método para manejar campos vectoriales se considera un importante ejemplo.

EJEMPLO 3 Campo gravitacional. Ecuación de Laplace

En el ejemplo 3 de la sección 8.4 se vio que, por la ley de la gravitación de Newton, la fuerza de atracción entre dos partículas es

$$\text{(12)} \qquad \mathbf{p} = -\frac{c}{r^3}\mathbf{r} = -c\left(\frac{x - x_0}{r^3}\mathbf{i} + \frac{y - y_0}{r^3}\mathbf{j} + \frac{z - z_0}{r^3}\mathbf{k}\right),$$

donde

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

es la distancia entre las dos partículas y c es una constante. Dado que

$$\text{(13a)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{2(x - x_0)}{2[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} = -\frac{x - x_0}{r^3}$$

y, de manera análoga,

$$\text{(13b)} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y - y_0}{r^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z - z_0}{r^3},$$

se observa que **p** es el gradiente de la función escalar

$$f(x, y, z) = \frac{c}{r} \qquad (r > 0);$$

por tanto, f es un potencial de ese campo gravitacional (y otros potenciales son $f + k$ con k constante).

Además, en seguida se demuestra que f satisface la ecuación diferencial parcial más importante de la física, la llamada **ecuación de Laplace**

$$\textbf{(14)} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.}$$

De hecho, para establecer esta expresión basta con derivar (13),

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x - x_0)^2}{r^5}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y - y_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z - z_0)^2}{r^5},$$

y después sumar estas tres expresiones, observando que la suma de los segundos miembros es cero, por lo que se llega a (14).

En (14), la expresión del primer miembro se llama el **laplaciano** de f y se denota por $\nabla^2 f$ o Δf. El operador diferencial

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(léase "nabla al cuadrado" o "delta") se llama el **operador de Laplace**. Usando este operador (14) puede escribirse en la forma

$$\boxed{\nabla^2 f = 0.}$$

Puede demostrarse que el campo de fuerzas producido por cualquier distribución de masas está dado por una función vectorial que es el gradiente de una función escalar f y que f satisface (14) en cualquier región del espacio en la que no exista materia.

En la física hay otras leyes que tienen la misma forma que la ley de la gravitación de Newton. Por ejemplo, en electrostática la fuerza de atracción (o repulsión) entre dos partículas de cargas opuestas (o iguales) Q_1 y Q_2 es

$$\boxed{\mathbf{p} = \frac{k}{r^3}\mathbf{r}} \qquad \textbf{(Ley de Coulomb[12])}$$

donde $k = Q_1Q_2/4\pi\epsilon$, y ϵ es la constante dieléctrica. Por tanto, **p** es el gradiente del potencial $f = -k/r$ y f satisface (14) cuando $r > 0$.

La ecuación de Laplace se discutirá en detalle en los capítulos 11 y 17. ∎

[12] CHARLES AUGUSTIN DE COULOMB (1736-1806), físico e ingeniero francés. La ley de Coulomb se estableció a partir de mediciones sumamente precisas realizadas por su autor.

Problemas de la sección 8.9

Gradiente. (a) Encontrar el gradiente ∇f. (b) Graficar algunas curvas de nivel $f = const$ e indicar ∇f con flechas en algunos puntos de estas curvas.

1. $f = xy$
2. $f = x^2 + y^2$
3. $f = x^2 - y^2$
4. $f = \frac{1}{4}x^2 + y^2$
5. $f = x/y$
6. $f = \text{arc tan}\,(y/x)$

Encontrar el gradiente ∇f, donde f es igual a

7. $e^x \,\text{sen}\, y$
8. $x^2 + 3y^2 - 2z^2$
9. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$
10. $\text{sen}\, x \,\text{senh}\, y$
11. $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$
12. $yz + zx + xy$
13. $z/(x^2 + y^2)$
14. $e^{x^2-y^2} \,\text{sen}\, 2xy$
15. $(y^2 - z^2)/(y^2 + z^2)$

Encontrar un potencial f del campo vectorial dado por

16. $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \mathbf{k}$
17. $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$
18. $6x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$
19. $e^{xy}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$
20. $(x + y)(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
21. $(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$
22. $(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$
23. $y^{-1}\mathbf{i} - xy^{-2}\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Fórmulas para el gradiente. Suponiendo que puede derivarse un número suficiente de veces, demostrar que

24. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
25. $\nabla(f^n) = nf^{n-1}\nabla f$
26. $\nabla(f/g) = (1/g^2)(g\nabla f - f\nabla g)$
27. $\nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g$
28. Resolver los problemas 14 y 15 con las fórmulas de los problemas 24 y 26.

Derivada direccional. Encontrar la derivada direccional de f en P en la dirección de $\mathbf{a}$, donde

29. $f = x - y$, P: (4, 5), $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$
30. $f = x^2 - y^2$, P: (2, 3), $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
31. $f = x^2 + y^2$, P: (1, 2), $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
32. $f = x^2 + y^2 + z^2$, P: (1, 2, 3), $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
33. $f = x^2 + y^2 + z^2$, P: (2, 2, 2), $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
34. $f = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, P: (3, 0, 4), $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
35. $f = e^x \cos y$, P: $(2, \pi, 0)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$
36. $f = xy + 10$, P: $(1, 1, -\frac{1}{2})$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$
37. $f = xyz$, P: (−1, 1, 3), $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
38. $f = \ln(x^2 + y^2)$, P: (4, 0), $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

Algunas aplicaciones. Encontrar un vector normal unitario a la curva dada en el plano xy o en la superficie en el espacio en el punto P dado.

39. $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$, P: (2, 2)
40. $y = 2x^2$, P: (2, 8)
41. $x^2 + y^2 = 100$, P: (6, 8)
42. $x^2 - y^2 = 1$, P: $(2, \sqrt{3})$
43. $4x^2 + 9y^2 = 36$, P: (0, 2)
44. $ax + by + cz + d = 0$, P arbitraria
45. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, P: (3, 4, 5)
46. $z = xy$, P: (2, −1, −2)
47. **(Flujo de calor)** En un campo de temperaturas. el calor fluye en la dirección del decremento máximo de la temperatura T. Encontrar su dirección en P: (2, 1) cuando $T = x^3 - 3xy^2$.
48. Repetir el problema 47 con $T = 4x^2 + y^2 - 5z^2$ y P:$(\frac{1}{4}, -2, \frac{1}{2})$.

49. Si en una montaña la elevación sobre el nivel del mar es $z(x, y) = 1\,500 - 3x^2 - 5y^2$ [metros], ¿cuál es la dirección de la cuesta más pronunciada en P: $(-0.2, 0.1)$?

50. **(Campo eléctrico)** Si el potencial entre dos cilindros concéntricos es $V(x, y) = 110 + 30 \ln (x^2 + y^2)$ [volts], ¿cuál es la dirección de la fuerza eléctrica (el gradiente) en P: $(2, 5)$? Demostrar que $\nabla^2 V = 0$.

8.10 DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

El cálculo vectorial debe gran parte de su importancia en la ingeniería y la física al gradiente, la divergencia y el rotacional. Habiéndose discutido el gradiente, se trata a continuación la divergencia. El rotacional se discute en la sección 8.11.

Sea $\mathbf{v}(x, y, z)$ una función vectorial derivable, donde x, y, z son coordenadas cartesianas, y sean v_1, v_2, v_3 las componentes de $\mathbf{v}$. Entonces a la función

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \tag{1}$$

se le llama la **divergencia** *de* $\mathbf{v}$ o la *divergencia del campo vectorial definido por* $\mathbf{v}$. Otra notación común para la divergencia es $\nabla \cdot \mathbf{v}$,

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z},$$

en la inteligencia de que el "producto" $(\partial/\partial x)v_1$ en el producto punto indica la derivada parcial $\partial v_1/\partial x$, etc. Esta es una notación conveniente pero nada más. Obsérvese que $\nabla \cdot \mathbf{v}$ indica el escalar div $\mathbf{v}$, en tanto que ∇f indica el vector grad f definido en la sección 8.9.

Por ejemplo, si

$$\mathbf{v} = 3xz\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} - yz^2\mathbf{k}, \quad \text{entonces} \quad \text{div } \mathbf{v} = 3z + 2x - 2yz.$$

Se verá más adelante que la divergencia posee una importante interpretación física. Evidentemente, los valores de una función que caracteriza una propiedad física o geométrica deben ser independientes de la elección particular de las coordenadas; es decir, dichos valores deben ser invariantes con respecto a las transformaciones de coordenadas.

Teorema 1 (Invariancia de la divergencia)

Los valores de div $\mathbf{v}$ *dependen únicamente de los puntos en el espacio (y, desde luego, de* $\mathbf{v}$*) pero no de la elección particular de las coordenadas en* (1), *por lo que con respecto a otras coordenadas cartesianas* x^*, y^*, z^* *y las componentes correspondientes* v_1^*, v_2^*, v_3 *de* $\mathbf{v}$ *la función* div $\mathbf{v}$ *está dada por*

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial z^*}. \tag{2}$$

En el apéndice 4 se presenta una demostración y en la sección 9.8 se da una segunda demostración (que requiere de integrales). Ahora se procederá a la tarea más inmediata de adquirir una idea del significado de la divergencia.

Si $f(x, y, z)$ es una función escalar que puede derivarse dos veces, entonces

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

y por (1),

$$\text{div (grad } f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

La expresión del segundo miembro es el laplaciano de f (ver la sección 8.9). Por tanto,

(3) $$\boxed{\text{div (grad } f) = \nabla^2 f.}$$

EJEMPLO 1 Fuerza gravitacional

La fuerza gravitacional **p** del ejemplo 3, sección 8.9, es el gradiente de la función escalar $f(x, y, z) = c/r$, que satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 f = 0$. De acuerdo con (3), esto significa que div $\mathbf{p} = 0$ $(r > 0)$. ∎

El ejemplo siguiente, tomado de la hidrodinámica, pone de manifiesto el significado físico de la divergencia de un campo vectorial (y se ampliará el tema en la sección 9.8 cuando se haya establecido el llamado teorema de divergencia de Gauss).

EJEMPLO 2 Movimiento de un fluido compresible. Significado de la divergencia

Se considera el movimiento de un fluido en una región R que no tiene **fuentes** ni **sumideros** en ella, es decir, sin puntos en los que se produzca o desaparezca el fluido. El concepto de **estado fluido** incluye también gases y vapores. Los fluidos en el sentido restringido, o líquidos, poseen una compresibilidad reducida que puede omitirse en muchos problemas. Los gases y los vapores tienen un compresibilidad grande; es decir, su densidad ρ (= masa por unidad de volumen) depende de las coordenadas x, y, z en el espacio (y puede depender del tiempo t). Se supone que el fluido bajo consideración es compresible.

Se considera el flujo por un pequeño paralelepípedo rectangular W de dimensiones[13] Δx, Δy, Δz con aristas paralelas a los ejes de coordenadas (figura 191). W tiene el volumen $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$. Sea

$$\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3] = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

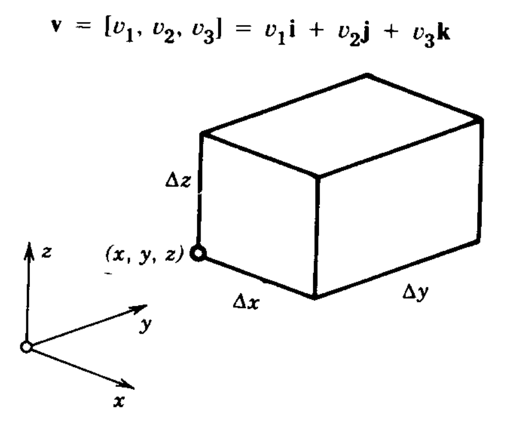


Figura 191. Interpretación física de la divergencia.

[13] Es común indicar las cantidades pequeñas por Δ; esto, desde luego, nada tiene que ver con el laplaciano.

el vector velocidad del movimiento. Se hace

$$\mathbf{u} = \rho\mathbf{v} = [u_1, u_2, u_3] = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} \tag{4}$$

y se supone que **u** y **v** son funciones vectoriales derivables continuamente de x, y, z y t. Se calcula el cambio en la masa incluida en W considerando el **flujo** a través de la frontera, es decir, la pérdida de masa total que sale de W por unidad de tiempo. Considérese el flujo por la cara izquierda de W, cuya área es $\Delta x\, \Delta z$. Las componentes v_1 y v_3 de **v** son paralelas a dicha cara y no contribuyen en absoluto a ese flujo y, en consecuencia, la masa de fluido que entra por esa cara durante un pequeño intervalo de tiempo Δt está dada de manera aproximada por

$$(\rho v_2)_y\, \Delta x\, \Delta z\, \Delta t = (u_2)_y\, \Delta x\, \Delta z\, \Delta t,$$

donde el subíndice y indica que esta expresión se refiere a la cara izquierda. La masa de fluido que sale del paralelepípedo W por la cara opuesta durante el mismo intervalo de tiempo es aproximadamente $(u_2)_{y+\Delta y}\, \Delta x\, \Delta z\, \Delta t$, donde el subíndice $y + \Delta y$ indica que esta expresión se refiere a la cara derecha. La diferencia

$$\Delta u_2\, \Delta x\, \Delta z\, \Delta t = \frac{\Delta u_2}{\Delta y}\, \Delta V\, \Delta t \qquad [\Delta u_2 = (u_2)_{y+\Delta y} - (u_2)_y]$$

es la pérdida aproximada de masa. Se obtienen dos expresiones similares al considerar los otros dos pares de caras paralelas de W. Si se suman estas tres expresiones, se encuentra que la pérdida total de masa en W durante el intervalo de tiempo Δt es aproximadamente

$$\left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_2}{\Delta y} + \frac{\Delta u_3}{\Delta z}\right) \Delta V\, \Delta t,$$

donde

$$\Delta u_1 = (u_1)_{x+\Delta x} - (u_1)_x \qquad \text{y} \qquad \Delta u_3 = (u_3)_{z+\Delta z} - (u_3)_z.$$

Esta pérdida de masa en W es causada por la razón de cambio con el tiempo de la densidad y, por tanto, es igual a

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t}\, \Delta V\, \Delta t.$$

Al igualar ambas expresiones, dividir la ecuación resultante entre $\Delta V\, \Delta t$ y al hacer que Δx, Δy, Δz y Δt tiendan a cero, se obtiene

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} (\rho\mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

o

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{5}$$

Esta importante relación se llama la *condición para la conservación de la masa* o **ecuación de continuidad** *del flujo de un fluido compresible*.

Si el flujo es **estacionario**, es decir, independiente del tiempo, entonces $\partial\rho/\partial t = 0$ y la ecuación de continuidad es

$$\operatorname{div} (\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{6}$$

Si la densidad ρ is constante, por lo tanto el fluido is incompresible, entonces la ecuación (6) es

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{7}$$

Esta relación se conoce como la **condición de incompresibilidad**. Expresa el hecho de que el balance final del flujo de entrada y el de salida para un volumen dado es cero en cualquier momento. Desde luego, el supuesto de que el flujo no tiene fuentes ni sumideros en R es esencial para la argumentación presentada. ∎

Comentario. El **teorema de divergencia** de Gauss, un teorema integral en el que interviene la divergencia, se presenta en el capítulo siguiente (sección 9.7).

Problemas de la sección 8.10

Encontrar la divergencia de las siguientes funciones vectoriales.

1. $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
2. $yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
3. $y^2e^z\mathbf{i} + x^2z^2\mathbf{k}$
4. $xyz(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$
5. $\cos x \cosh y\ \mathbf{i} + \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y\ \mathbf{j}$
6. $e^{-xy}\mathbf{i} + e^{-yz}\mathbf{j} + e^{-zx}\mathbf{k}$
7. $x^2y\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y^2z\mathbf{k}$
8. $(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$
9. $v_1(y, z)\mathbf{i} + v_2(x, z)\mathbf{j}$
10. $\operatorname{sen} xy\ (\mathbf{i} + \mathbf{j}) - z \cos xy\ \mathbf{k}$

Encontrar $\nabla^2 f$ por (3). Comprobar el resultado por derivación directa.

11. $f = x^2 + 4y^2 + 9z^2$
12. $f = (x - y)/(x + y)$
13. $f = \arctan (y/x)$
14. $f = e^{xyz}$
15. $f = xz/y$
16. $f = \operatorname{sen} x \cosh y$

Encontrar grad (div **v**), donde **v** es igual a

17. $x^3\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
18. $z \operatorname{senh} x\ \mathbf{i} + y \cosh z\ \mathbf{k}$
19. $x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - 4z^2\mathbf{k}$
20. $e^x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$

Fórmula para la divergencia. Demostrar que

21. $\operatorname{div} (k\mathbf{v}) = k \operatorname{div} \mathbf{v}$ (k constante)
22. $\operatorname{div} (f\mathbf{v}) = f \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f$
23. $\operatorname{div} (f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$
24. $\operatorname{div} (f\nabla g) - \operatorname{div} (g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$
25. Comprobar la fórmula del problema 22 cuando $f = e^{xyz}$ y $\mathbf{v} = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$.
26. Obtener la respuesta del problema 8 a partir de la fórmula del problema 22.
27. Comprobar la fórmula del problema 23 para $f = x^2 - y^2$ y $g = e^{x+y}$.
28. **(Flujo rotacional)** El vector velocidad $\mathbf{v}(x, y, z)$ de un fluido incompresible que está rotando en un recipiente cilíndrico es de la forma $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$, donde $\mathbf{w}$ es el vector (constante) de rotación; ver el ejemplo 6 de la sección 8.3. Demostrar que $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. ¿Resulta esto plausible considerando el ejemplo 2 de esta sección?
29. **(Flujo)** Considerar un flujo estacionario cuyo vector velocidad es $\mathbf{v} = y\mathbf{i}$. Demostrar que posee las siguientes propiedades. El flujo es incompresible. Las partículas que en el tiempo $t = 0$ están en el cubo delimitado por los planos $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ ocupan en $t = 1$ el volumen 1.
30. **(Flujo)** Considerar el flujo estacionario que tiene la velocidad $\mathbf{v} = x\mathbf{i}$. Demostrar que las partículas individuales tienen los vectores de posición $\mathbf{r}(t) = c_1e^t\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$, donde c_1, c_2, c_3 son constantes, que el flujo es compresible y que e es el volumen ocupado en $t = 1$ por las partículas que en $t = 0$ llenan el cubo del problema 29.

8.11 ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL

El gradiente (sección 8.9), la divergencia (sección 8.10) y el rotacional son fundamentales en lo que a los campos se refiere. Se define y discute ahora el rotacional.

Sean x, y, z coordenadas cartesianas derechas (sección 8.3) y sea

$$\mathbf{v}(x, y, z) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

una función vectorial derivable. Entonces la función

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

se llama el **rotacional** *de la función vectorial* **v** o el *rotacional del campo vectorial definido por* **v**. Para un sistema izquierdo de coordenadas cartesianas, el determinante de (1) está precedido por un signo menos, de conformidad con la nota después de (2**) en la sección 8.3.

En cuanto a la notación, además de curl *v* también se utiliza rot *v* (sugerida por "rotación"; ver el ejemplo 2).

EJEMPLO 1 Rotacional de una función vectorial

Con respecto a coordenadas cartesianas derechas, sea $\mathbf{v} = yz\mathbf{i} + 3zx\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Entonces por (1) se obtiene

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz & 3zx & z \end{vmatrix} = -3x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (3z - z)\mathbf{k} = -3x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}.$$

El rotacional desempeña un papel importante en muchas aplicaciones. Esto se ilustra con un ejemplo básico típico. (En la sección 9.9 se tratará con mayor detalle el papel y la naturaleza del rotacional.)

EJEMPLO 2 Rotación de un cuerpo rígido. Relación con el rotacional

En el ejemplo 6 de la sección 8.3 se vio que la rotación de un cuerpo rígido B alrededor de un eje fijo en el espacio puede describirse por medio de un vector **w** de magnitud ω en la dirección del eje de rotación, donde $\omega (> 0)$ es la velocidad angular de la rotación y **w** está dirigido de tal modo que la rotación aparece en el sentido del movimiento de de las manecillas del reloj si se observa en la dirección de **w**. De acuerdo con (9), sección 8.3, el campo de velocidades de la rotación puede representarse en la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$$

donde **r** es el vector de posición de un punto en movimiento con respecto a un sistema derecho de coordenadas cartesianas con el origen sobre el eje de rotación. Se eligen las coordenadas cartesianas derechas tales que $\mathbf{w} = \omega\mathbf{k}$; es decir, el eje de rotación es el eje z. Entonces (ver el ejemplo 2 de la sección 8.4)

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$$

y, por lo tanto,

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\mathbf{k},$$

es decir,

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\mathbf{w}. \tag{2}$$

Por tanto, en el caso de una rotación de un cuerpo rígido, el rotacional del campo de velocidades tiene la dirección del eje de rotación y su magnitud es igual al doble de la velocidad angular ω de la rotación.

Obsérvese que este resultado no depende de la elección particular del sistema de coordenadas cartesianas en el espacio. ▮

Para cualquier función escalar f que puede derivarse continuamente dos veces,

$$\boxed{\text{rot } (\text{grad } f) = \mathbf{0},} \tag{3}$$

como puede comprobarse fácilmente por cálculos directos. *Por tanto, si una función vectorial es el gradiente de una función escalar, su rotacional es el vector cero.* Puesto que el rotacional caracteriza la rotación en un campo, se dice también de manera más breve que *los campos de gradientes que describen un movimiento son **irrotacionales**.* (Si un campo con estas características ocurre en otro contexto, no como un campo de velocidades, por lo general se le llama ***conservativo***; ver la sección 8.9.)

EJEMPLO 3

El campo gravitacional del ejemplo 3, sección 8.9, tiene rot $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. El campo del ejemplo 2 de la presente sección no es irrotacional. Un campo de velocidades similar se obtiene revolviendo el café en una taza. ▮

El rotacional se define en (1) en términos de coordenadas, pero si se supone que tiene un significado físico o geométrico, no debería depender de la elección de estas coordenadas. Este es el caso, como se muestra a continuación.

Teorema 1 (Invariancia del rotacional)

La longitud y la dirección del rotacional **v** *son independientes de la elección particular de los sistemas de coordenadas cartesianas en el espacio.* (La demostración se encuentra en el apéndice 4.)

Problemas de la sección 8.11

Encontrar el rotacional v donde, con respecto a coordenadas cartesianas derechas, **v** es igual a

1. $y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$
2. $z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
3. $v_1(x)\mathbf{i} + v_2(y)\mathbf{j} + v_3(z)\mathbf{k}$
4. $\operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + \cos x\,\mathbf{j}$
5. $(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$
6. $y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$
7. $e^x(\cos z\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} z\,\mathbf{k})$
8. $xyz(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$
9. $\ln(x^2 + y^2)\,\mathbf{i} + \arctan(y/x)\,\mathbf{j}$
10. $e^{xyz}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

Movimiento de fluidos. En cada caso se da el vector velocidad **v** del movimiento estacionario de un fluido. Encontrar rot **v**. ¿El movimiento es incompresible? Encontrar las trayectorias de las partículas.

11. $\mathbf{v} = z^2\mathbf{j}$
12. $\mathbf{v} = y^3\mathbf{i}$
13. $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
14. $\mathbf{v} = -y^2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
15. $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
16. $\mathbf{v} = -\frac{1}{4}y\mathbf{i} + 4x\mathbf{j}$

Fórmulas del rotacional, la divergencia, etc. Suponiendo que las funciones pueden derivarse un número suficiente de veces, demostrar que

17. $\operatorname{rot}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \operatorname{rot}\mathbf{u} + \operatorname{rot}\mathbf{v}$
18. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0$
19. $\operatorname{rot}(f\mathbf{v}) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{v} + f\operatorname{rot}\mathbf{v}$
20. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$
21. $\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}$
22. $\operatorname{div}(g\nabla f \times f\nabla g) = 0$

Con respecto a coordenadas cartesianas derechas, sea $\mathbf{u} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$ y $f = xyz$. Encontrar las siguientes expresiones. Si puede aplicarse una de las fórmulas de los problemas 17–22, usarla para comprobar el resultado.

23. $\operatorname{rot}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$
24. $\operatorname{rot}(f\mathbf{u})$
25. $\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
26. $\operatorname{rot}(f\mathbf{v})$
27. $\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \operatorname{rot}\mathbf{v}$
28. $\operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, $\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
29. $\mathbf{v} \times \operatorname{rot}\mathbf{u}$
30. $\mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \times \operatorname{rot}\mathbf{v}$

8.12 GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTACIONAL EN COORDENADAS CURVILÍNEAS. *OPCIONAL*

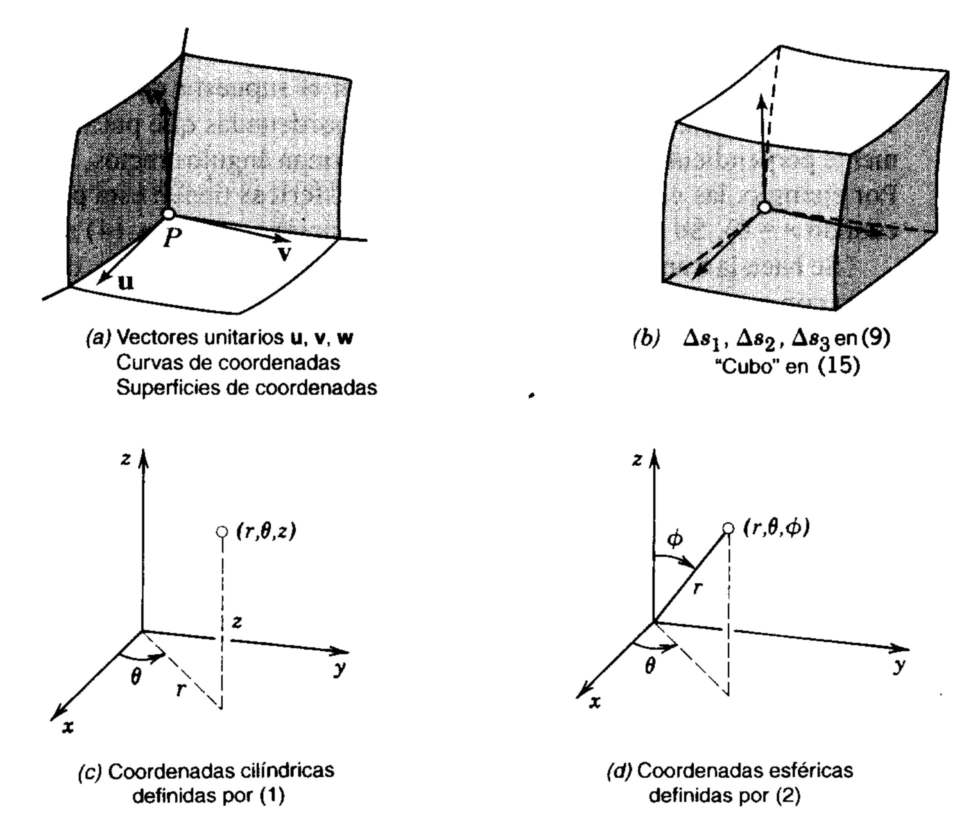
En las aplicaciones es común usar otras coordenadas además de las cartesianas, por ejemplo, cuando en un problema interviene simetría cilíndrica o esférica. (En el capítulo 11 se presentan ejemplos.) Entonces quizás sea necesario transformar el gradiente, la divergencia y el rotacional en estas nuevas coordenadas. Se indica cómo puede hacerse esto y se dan fórmulas explícitas para los casos de las coordenadas cilíndricas y esféricas, los dos sistemas de coordenadas en el espacio más importantes (además de las cartesianas).

A fin de simplificar las fórmulas, las coordenadas cartesianas x, y, z se escriben como

$$x = x_1, \qquad y = x_2, \qquad z = x_3.$$

Las **coordenadas cilíndricas** r, θ, z están dadas por (figura 192c)

$$x_1 = r\cos\theta, \qquad x_2 = r\operatorname{sen}\theta, \qquad x_3 = z. \tag{1}$$



(a) Vectores unitarios **u**, **v**, **w**
Curvas de coordenadas
Superficies de coordenadas

(b) $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3$ en (9)
"Cubo" en (15)

(c) Coordenadas cilíndricas definidas por (1)

(d) Coordenadas esféricas definidas por (2)

Figura 192. Coordenadas curvilíneas.

Las **coordenadas esféricas** r, θ, ϕ están dadas por (figura 192*d*)[14]

$$(2) \qquad \boxed{x_1 = r\cos\theta\,\text{sen}\,\phi, \qquad x_2 = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi, \qquad x_3 = r\cos\phi.}$$

Las ecuaciones (1) y (2) y las ecuaciones similares para otras coordenadas q_1, q_2, q_3 en el espacio son de la forma

$$(3) \qquad x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3), \qquad x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3), \qquad x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3).$$

Se supone que cualquier punto P está determinado por una terna única de coordenadas q_1, q_2, q_3, de tal modo que (3) puede resolverse en la forma

$$(4) \qquad q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3), \qquad q_2 = q_2(x_1, x_2, x_3), \qquad q_3 = q_3(x_1, x_2, x_3).$$

Por P pasan tres superficies $q_1 = const$, $q_2 = const$, $q_3 = const$, llamadas **superficies de coordenadas**, que en general son curvas (figura 192*a*). A sus tres intersecciones por pares se les llama **curvas de coordenadas** que pasan por P. Lo anterior motiva

[14] Esta es la notación usada en libros de cálculo y en muchos otros textos. Es lógica ya que Ú desempeña el mismo papel que en coordenadas polares. *¡Atención!* En algunos libros se intercambian los papeles de θ y ϕ.

el nombre "**coordenadas curvilíneas**" de las coordenadas q. Los sistemas de coordenadas que se usan en la práctica sugieren el supuesto de que las coordenadas q son **ortogonales**, es decir, que las curvas coordenadas que pasan por P son mutuamente perpendiculares (sus tangentes en P forman ángulos rectos, ver la figura 192*a*). Por ejemplo, las coordenadas cilíndricas y esféricas tienen esta propiedad (excepto cuando $r = 0$). Se supone además que las funciones en (3) y (4) son derivables.

Se hace la transformación del elemento lineal, del gradiente, de la divergencia, y junto con esta última la del laplaciano, y por último la del rotacional.

Transformación del elemento lineal

Se empezará transformando el cuadrado del elemento lineal

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} dx_i^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \qquad \text{(Sección 8.5)} \tag{5}$$

a las coordenadas q. Por la regla de la cadena (sección 8.8) se tiene

$$dx_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\, dq_j.$$

Esto implica que

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} dx_i^2 = \sum_{i=1}^{3} dx_i\, dx_i = \sum_{i=1}^{3} \left[\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\, dq_j \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\, dq_k \right] \tag{6}$$

(donde se usó un índice diferente, k, en la última sumatoria debido a que las dos sumatorias son independientes). Puesto que las coordenadas x y las coordenadas q son ortogonales, en (5) sólo aparecen cuadrados, al igual que en (6). Por consiguiente, (6) puede escribirse como

$$\boxed{ds^2 = h_1^2\, dq_1^2 + h_2^2\, dq_2^2 + h_3^2\, dq_3^2} \tag{7}$$

y h_1^2, h_2^2, h_3^2 pueden determinarse agrupando los coeficientes de dq_1^2, dq_2^2, dq_3^2 en (6). Aquí, dq_1^2 se obtiene en (6) tomando $j = 1$ y $k = 1$; por tanto h_1^2 tiene tres términos ya que i va de 1 a 3. De manera similar para h_2^2, h_3^2:

$$\boxed{h_1^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\right)^2, \qquad h_2^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_2}\right)^2, \qquad h_3^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_3}\right)^2.} \tag{8}$$

EJEMPLO 1 Elemento lineal en coordenadas cilíndricas

En la notación q usada aquí, las coordenadas cilíndricas $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = z$ se definen por (1) en la forma

$$x_1 = q_1 \cos q_2, \qquad x_2 = q_1 \operatorname{sen} q_2, \qquad x_3 = q_3.$$

Al derivar, a partir de (8) se obtiene

$$h_1^2 = \cos^2 q_2 + \operatorname{sen}^2 q_2 = 1$$

$$h_2^2 = (-q_1 \operatorname{sen} q_2)^2 + (q_1 \cos q_2)^2 = q_1^2$$

$$h_3^2 = 1.$$

En consecuencia, por (7) el cuadrado del elemento lineal en coordenadas cilíndricas es

$$ds^2 = dq_1^2 + q_1^2\, dq_2^2 + dq_3^2,$$

es decir,

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + dz^2.}$$

Para $z = const$ se tiene $dz = 0$ y se llega a la conocida expresión $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2$ en **coordenadas polares** en el plano. ∎

EJEMPLO 2 Elemento lineal en coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \phi$ se definen por [ver (2)]

$$x_1 = q_1 \cos q_2 \operatorname{sen} q_3, \qquad x_2 = q_1 \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3, \qquad x_3 = q_1 \cos q_3.$$

En consecuencia, por (8) se obtiene

$$h_1^2 = (\cos q_2 \operatorname{sen} q_3)^2 + (\operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3)^2 + \cos^2 q_3 = 1$$

$$h_2^2 = (-q_1 \operatorname{sen} q_2 \operatorname{sen} q_3)^2 + (q_1 \cos q_2 \operatorname{sen} q_3)^2 + 0 = q_1^2 \operatorname{sen}^2 q_3$$

$$h_3^2 = (q_1 \cos q_2 \cos q_3)^2 + (q_1 \operatorname{sen} q_2 \cos q_3)^2 + (-q_1 \operatorname{sen} q_3)^2 = q_1^2.$$

Esta expresión y (7) dan como resultado el cuadrado del elemento lineal en coordenadas esféricas

$$ds^2 = dq_1^2 + q_1^2 \operatorname{sen}^2 q_3\, dq_2^2 + q_1^2\, dq_3^2,$$

es decir,

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \phi\, d\theta^2 + r^2\, d\phi^2.}$$ ∎

Transformación del gradiente

Para las coordenadas x se tiene [ver (13*), sección 8.5, donde $d\mathbf{x}$ se denota $d\mathbf{r}$]

$$d\mathbf{x} = dx_1\, \mathbf{i} + dx_2\, \mathbf{j} + dx_3\, \mathbf{k}$$

donde **i**, **j**, **k** son vectores unitarios en las direcciones de los ejes de coordenadas y

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

De manera similar, para las coordenadas q puede escribirse

$$d\mathbf{q} = h_1\, dq_1\, \mathbf{u} + h_2\, dq_2\, \mathbf{v} + h_3\, dq_3\, \mathbf{w}$$

donde **u**, **v**, **w** son vectores unitarios ortogonales en las direcciones de las curvas de coordenadas en P (figura 192*a*) y se obtiene, de conformidad con (7),

$$ds^2 = d\mathbf{q} \cdot d\mathbf{q} = h_1^2\, dq_1^2 + h_2^2\, dq_2^2 + h_3^2\, dq_3^2.$$

Si ahora se hace que q_1 se incremente en Δq_1, entonces ocurre un movimiento $\Delta s_1 = h_1\, \Delta q_1$ en la dirección **u** (ver la figura 192*b*). En el límite se obtiene $\partial q_1/\partial s_1 = 1/h_1$. Se hace lo mismo para las otras dos direcciones. En conjunto,

$$(9) \qquad \frac{\partial q_1}{\partial s_1} = \frac{1}{h_1}, \qquad \frac{\partial q_2}{\partial s_2} = \frac{1}{h_2}, \qquad \frac{\partial q_3}{\partial s_3} = \frac{1}{h_3}.$$

A partir de esta expresión se obtienen las componentes del gradiente ∇f de una función escalar derivable $f(q_1, q_2, q_3)$ como las proyecciones en las direcciones **u**, **v**, **w**; y, por otra parte, estas son las derivadas direccionales $\partial f/\partial s_i$ en estas tres direcciones. En consecuencia, por (9)

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial s_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{1}{h_1}$$

procediéndose de igual manera para las otras dos componentes. Se obtiene así la siguiente expresión para el **gradiente** ∇f en coordenadas curvilíneas ortogonales q_1, q_2, q_3 [con h_1, h_2, h_3 dadas por (8) y **u**, **v**, **w** ilustrados en la figura 192*a*]:

$$\textbf{(10)} \qquad \boxed{\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\mathbf{u} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\mathbf{v} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\mathbf{w}.}$$

EJEMPLO 3 Gradiente

En las coordenadas cilíndricas r, θ, z dadas por (1) se tiene (ver el ejemplo 1)

$$(11) \qquad h_1 = h_r = 1, \qquad h_2 = h_\theta = q_1 = r, \qquad h_3 = h_z = 1$$

y por (10) con $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = z$ se obtiene el gradiente

$$\textbf{(12)} \qquad \boxed{\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{w}.}$$

En las coordenadas esféricas r, θ, ϕ dadas por (2) se tiene (ver el ejemplo 2)

$$(13) \qquad h_1 = h_r = 1, \qquad h_2 = h_\theta = q_1 \operatorname{sen} q_3 = r \operatorname{sen} \phi, \qquad h_3 = h_\phi = q_1 = r$$

y por (10) con $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \phi$ se obtiene el gradiente

$$\textbf{(14)} \qquad \boxed{\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \phi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{v} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{w}.}$$

∎

Transformación de la divergencia y el laplaciano

Para la **divergencia** se obtiene en coordenadas curvilíneas ortogonales q_1, q_2, q_3 [con h_1, h_2, h_3 dadas por (8)]

$$\text{(15)} \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 F_3) \right].$$

Esta expresión se establece como en el ejemplo 2 de la sección 8.10 al considerar el flujo que pasa por las caras del "cubo" de la figura 192*b*, siendo la divergencia el límite del flujo dividido entre el volumen $h_1\Delta q_1 h_2\Delta q_2 h_3\Delta q_3$; aquí $h_2\Delta q_2 h_3\Delta q_3$ es el área de las caras $q_1 = const$ y $q_1 + h_1\Delta q_1 = const$, por lo que $\partial(h_2 h_3 F_1)/\partial q_1$ resulta de la contribución de estas caras al flujo. Los otros dos términos de (15) corresponden a los dos pares restantes de caras del "cubo".

EJEMPLO 4 Divergencia

En las coordenadas cilíndricas dadas por (1), a partir de (11) y (15) con $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = z$ se obtiene la divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_1) + \frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(rF_3)\right],$$

es decir,

$$\text{(16)} \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

En las coordenadas esféricas dadas por (2), a partir de (13) y (15) con $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \phi$ se obtiene la divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \operatorname{sen} \phi\, F_1) + \frac{\partial}{\partial \theta}(rF_2) + \frac{\partial}{\partial \phi}(r \operatorname{sen} \phi\, F_3)\right],$$

es decir,

$$\text{(17)} \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_1) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \phi}\frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\operatorname{sen} \phi\, F_3).$$ ∎

Puesto que $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ (ver la sección 8.10), por (15), con $\mathbf{F} = \nabla f$ y ∇f dada por (10), se obtiene también el **laplaciano** en coordenadas curvilíneas ortogonales q_1, q_2, q_3

$$\text{(18)} \quad \nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right]$$

con h_1, h_2, h_3 dadas por (8).

EJEMPLO 5 Laplaciano

En las coordenadas cilíndricas $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = z$ dadas por (1), a partir de (11) y (18) se obtiene el laplaciano

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right];$$

por tanto

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

o, al efectuar la derivación indicada del producto,

$$\text{(19)} \qquad \boxed{\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.}$$

En las coordenadas esféricas $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \phi$ dadas por (2), a partir de (13) y (18) se obtiene el laplaciano

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \operatorname{sen}\phi \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\operatorname{sen}\phi \frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\right];$$

por tanto

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\partial f}{\partial \phi}\right),$$

o, al efectuar las derivaciones indicadas de los productos,

$$\text{(20)} \qquad \boxed{\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \phi}.}$$

∎

Transformación del rotacional

Para rot **F** = ∇ × **F**, la fórmula general en coordenadas curvilíneas ortogonales *derechas* q_1, q_2, q_3 es la siguiente. (Ver la demostración en la referencia [7] del apéndice 1.)

$$\text{(21)} \qquad \boxed{\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{u} & h_2\mathbf{v} & h_3\mathbf{w} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}.}$$

A partir de esta expresión y de (11) o (13), el rotacional puede obtenerse de manera inmediata en coordenadas cilíndricas o esféricas.

Debido a la importancia práctica de las coordenadas cilíndricas y esféricas, se han utilizado para ilustrar los ejemplos, pero cabe hacer hincapié en que las fórmulas presentadas son *generales* y pueden usarse en cualquier sistema de coordenadas ortogonales.

Preguntas y problemas de repaso del capítulo 8

1. Dar ejemplos de cantidades que sean vectores. Dar ejemplos de campos vectoriales.
2. ¿Por qué las componentes de un vector permanecen invariables si se cambia el punto inicial del vector?
3. ¿Cuáles son las aplicaciones típicas que motivan el producto interior y el producto vectorial?
4. ¿En qué caso el trabajo realizado por una fuerza constante en un desplazamiento será cero?
5. ¿Qué son las coordenadas derechas y las izquierdas? ¿En qué parte de este capítulo la diferencia es esencial?
6. El producto vectorial tiene dos propiedades inusuales. ¿Las recuerda el lector?
7. Las fórmulas vectoriales en dos y tres dimensiones con frecuencia tienen formas parecidas. Explicar este hecho en términos de representaciones de una circunferencia y una esfera. ¿Se le ocurren al lector otros ejemplos?
8. ¿Qué se entiende por ortogonalidad? ¿Por qué es importante este concepto y en qué contexto?
9. ¿Qué está incorrecto en $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$? ¿En $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$? ¿En $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$?
10. ¿Cuántas bases diferentes tiene R^3?
11. ¿Qué es una base ortonormal? ¿Cuál es la ventaja de usarla?
12. Sin consultar el texto, enunciar la definición de la derivada de una función vectorial $\mathbf{v}(t)$ y de las primeras derivadas parciales de una función vectorial $\mathbf{v}(x, y, z)$. ¿Qué es $\mathbf{v}'(t)$ geométricamente?
13. Si $\mathbf{r}(t)$ representa una curva, ¿qué es $\mathbf{r}'(t)$ en mecánica cuando t es el tiempo?
14. ¿Es posible que un cuerpo tenga una rapidez constante y aún así tenga un vector velocidad variable?
15. ¿Qué se entiende por derivada direccional?
16. ¿Qué son las derivadas direccionales de una función $f(x, y, z)$ en las direcciones x, y y z?¿En las direcciones negativas x, y, z?
17. Sin consultar el texto, escribir las definiciones de gradiente, divergencia y rotacional.
18. ¿Qué propiedades de una función escalar caracterizan la dirección y la longitud del gradiente?
19. Si f es una función escalar y $\mathbf{v}$ es una función vectorial, las cuales pueden derivarse un número suficiente de veces, ¿cuáles de las siguientes expresiones tienen sentido: grad f, f grad f, $\mathbf{v} \cdot$ grad f, div f, div ($f\mathbf{v}$), rot ($f\mathbf{v}$) rot f, f rot $\mathbf{v}$?
20. ¿Recuerda el lector el papel de la divergencia en relación con el movimiento de fluidos? El papel del rotacional en relación con rotaciones?

Sean $\mathbf{a} = [2, -1, 5]$, $\mathbf{b} = [1, -2, 3]$, $\mathbf{c} = [2, 2, -1]$, $\mathbf{d} = [3, 0, 2]$. Encontrar las siguientes expresiones. (En los productos vectoriales, suponer que el sistema de coordenadas es derecho.)

21. $\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}$
22. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$
23. $4\mathbf{a} + 8\mathbf{b}$, $4(2\mathbf{b} + \mathbf{a})$
24. $5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $|5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|$
25. $|\mathbf{c} - \mathbf{b}|$, $|\mathbf{c}| - |\mathbf{b}|$
26. $(1/|\mathbf{c}|)\mathbf{c}$, $(1/|\mathbf{d}|)\mathbf{d}$
27. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$, $\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}$
28. $8\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$, $4\mathbf{d} \cdot 2\mathbf{c}$
29. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
30. $\mathbf{a} \times \mathbf{d}$, $|\mathbf{a} \times \mathbf{d}|$
31. $(\mathbf{b} \quad -\mathbf{b} \quad \mathbf{d})$, $(\mathbf{b} \quad \mathbf{b} + \mathbf{d} \quad \mathbf{d})$
32. $(\mathbf{b} \quad \mathbf{c} \quad \mathbf{d})$, $(\mathbf{c} \quad \mathbf{d} \quad \mathbf{b})$
33. $(\mathbf{c} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{a})$, $(\mathbf{b} \quad \mathbf{c} \quad 2\mathbf{a})$
34. $\mathbf{d} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{b})$, $(\mathbf{d} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{b}$
35. Encontrar una fuerza $\mathbf{p}$ tal que la resultante de $\mathbf{p}$, $\mathbf{q} = [1, -2, 2]$ y $\mathbf{u} = [2, -3, 4]$ sea el vector cero.

36. Encontrar el ángulo entre las fuerzas [2, 2] y [3, 1]. Trazar una figura.

37. Encontrar el ángulo entre las fuerzas [2, 1, 3] y [4, 4, 0].

38. Encontrar los ángulos α, β, γ entre la fuerza $\mathbf{p}$ = [3, 6, 8] y los ejes de coordenadas. Comprobar que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Demostrar esta fórmula en general.

Encontrar el trabajo realizado por una fuerza **p** que actúa sobre un cuerpo cuando este último se desplaza de un punto P a un punto Q sobre el segmento de recta PQ, donde P, Q y **p** son

39. (1, 1), (4, 3), [3, 8]

40. (6, 8), (8, 6), [14, −2]

41. (−2, 2), (0, 10), [8, −2]

42. (−8, 4, 0), (8, 2, 9), [4, 9, − 2]

43. (3, 3, 8), (4, 6, 1), [3, 4, 6]

44. (1, 5, 9), (−1, 1, 1), [−2, −4, −8]

Encontrar las componentes de una fuerza **p** en la dirección del vector **b**, donde

45. $\mathbf{p} = [1, 2]$, $\mathbf{b} = [4, 0]$

46. $\mathbf{p} = [-5, 3]$, $\mathbf{b} = [8, 6]$

47. $\mathbf{p} = [4, 0, -2]$, $\mathbf{b} = [1, -3, 5]$

48. $\mathbf{p} = [6, 2, -\frac{1}{2}]$, $\mathbf{b} = [3, 1, 40]$

49. ¿En qué caso la componente de **a** en la dirección de **b** es igual a la componente de **b** en la dirección de **a**?

Encontrar el vector momento **m** de una fuerza **p** alrededor del punto Q si **p** actúa en una recta que pasa por un punto A, donde **p**, A, Q son

50. [0, 10, 0], (2, 3, 0), (0, 0, 0)

51. [4, 3, 0], (6, 5, 0), (9, 3, 0)

52. [0, 2, −2], (0, 7, 1), (0, 2, 8)

53. [1, 4, 9], (3, 5, 7), (2, 0, 1)

54. [2, 1, −10], (4, 7, 1), (3, 3, 6)

55. [5, 4, 3], (3, 4, 5), (−1, 1, 3)

Encontrar el volumen del paralelepípedo con vectores aristas

56. [4, 3, 2], [1, 0, −1], [0, −2, −3]

57. [7, 6, 4], [1, 9, 3], [8, 15, 6]

Encontrar el volumen del tetraedro con vértices

58. (2, 1, 8), (3, 2, 9), (2, 1, 4), (3, 3, 10)

59. (−1, 0, 1), (4, 4, 5), (0, 1, 0), (2, 2, 0)

Encontrar una representación del plano que pasa por los puntos

60. (−1, 0, 2), (8, 6, 4), (1, 3, 5)

61. (1, 1, 1), (5, 0, −5), (3, 2, 0)

Sean $f = 4xyz$, $g = x^4 + y^4 + z$, $\mathbf{v} = x^2\mathbf{i} + (y - z)^2\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = (x + y)^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$. (Suponer que el sistema de coordenadas es derecho siempre que esto sea esencial.) Encontrar

62. grad f en (5, 7, −2)

63. grad g en (4, −1, 3)

64. $\nabla^2 f$, $\nabla^2 g$

65. div **v** en (3, 1, 5)

66. $\mathbf{w} \cdot \nabla g$

67. grad (div **w**)•**v**

68. $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$

69. $\nabla f \cdot \nabla g$, $\nabla g \cdot \nabla f$

70. rot **v**, rot **w**

71. div (rot (**v** + **w**))

72. rot ($\mathbf{v} \times \mathbf{k}$)

73. rot (grad g)•**v**

74. rot (f(**i** + **j**))

75. $D_{\mathbf{v}} f$ en (1, 1, 1)

76. $D_{\mathbf{w}} g$ en (3, 0, 2)

77. $D_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})$ en (4, 3, 0)

Indicar la clase de curva representada por $\mathbf{r}(t)$, donde t es el tiempo, y encontrar el vector velocidad, la rapidez y el vector aceleración en P, donde

78. $\mathbf{r} = (1 + \cos t)\mathbf{i} + 9 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$, P: (1, − 9)

79. $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^{-1}\mathbf{j}$, P: (2, $\frac{1}{2}$)

80. $\mathbf{r} = \cos 2t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} 2t\, \mathbf{j} + t\mathbf{k}$, P: (1, 0, π)

Resumen del capítulo 8

Cálculo diferencial vectorial. Gradiente, divergencia, rotacional

Todos los vectores de la forma

(1) $$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \qquad \text{(Sec. 8.1)}$$

constituyen el espacio vectorial real R^3 con la *adición de vectores* definida por

(2) $$[a_1, a_2, a_3] + [b_1, b_2, b_3] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$$

y la *multiplicación por un escalar* definida por

(3) $$c[a_1, a_2, a_3] = [ca_1, ca_2, ca_3] \qquad \text{(Sec. 8.1),}$$

donde c es un escalar (un número real). Por ejemplo, la *resultante* de las fuerzas **a** y **b** es **a** + **b**.

El **producto interior** o **producto punto** de dos vectores está definido por

(4) $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \gamma = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad \text{(Sec. 8.2)}$$

(γ es el ángulo entre **a** y **b**). De esta fórmula se obtiene la **norma** o **longitud de a**

(5) $$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

así como una fórmula para γ. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, se dice que **a** y **b** son **ortogonales**. El producto punto es motivado por el *trabajo* $W = \mathbf{p} \cdot \mathbf{d}$ realizado por una fuerza **p** en un desplazamiento **d**.

El **producto vectorial** o **producto cruz** $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es un vector de longitud

(6) $$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen} \gamma \qquad \text{(Sec. 8.3)}$$

y perpendicular tanto a **a** como a **b** tal que **a**, **b**, **v** forman una terna *derecha*. En términos de componentes con respecto a coordenadas derechas,

(7) $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(Sec. 8.3).}$$

El productovectorial es motivado, por ejemplo, por los momentos de fuerzas o por rotaciones. ¡Atención! Esta multiplicación es *anti*conmutativa, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times$ y *no* es asociativa.

Entre los productos repetidos más importantes, el de mayor importancia es el triple producto escalar

(8) $$(\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Las secciones 8.4–8.12 se refieren a la ampliación del cálculo diferencial a las **funciones vectoriales**. Si éstas dependen de una sola variable, t, son de la forma

$$\text{(9)} \qquad \mathbf{v}(t) = [v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t)] = v_1(t)\mathbf{i} + v_2(t)\mathbf{j} + v_3(t)\mathbf{k}.$$

Entonces la derivada es

$$\text{(10)} \qquad \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \qquad \text{(Sección 8.4).}$$

La fórmula (10) se parece mucho a la conocida fórmula del cálculo elemental. Implica que en términos de componentes,

$$\mathbf{v}' = [v_1',\ v_2',\ v_3'] = v_1'\mathbf{i} + v_2'\mathbf{j} + v_3'\mathbf{k}.$$

Las reglas de derivación son como en cálculo elemental. Estas implican que (sección 8.4)

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}', \qquad (\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'.$$

Una función vectorial de una sola variable t, denotada generalmente por $\mathbf{r}(t)$, puede usarse para representar una curva C en el espacio. Entonces $\mathbf{r}(t)$ asocia con cada $t = t_0$ en un intervalo $a < t < b$ el punto de C con vector de posición $\mathbf{r}(t_0)$. La derivada $\mathbf{r}'(t)$ es un **vector tangente** de C (sección 8.5). Si se elige la **longitud de arco** s (sección 8.5) como parámetro, entonces se obtiene el *vector tangente unitario* $\mathbf{r}'(s)$. La longitud de la derivada de este vector es la **curvatura** $\kappa(s) = |\mathbf{r}''(s)|$; ver la sección 8.7.

En mecánica, $\mathbf{r}(t)$ puede representar la trayectoria de un cuerpo en movimiento, donde t es el tiempo. Entonces $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ es el **vector velocidad**, su longitud es la *rapidez* y su derivada $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$ es el **vector aceleración** (ver la sección 8.6).

Una función vectorial de coordenadas cartesianas x, y, z en el espacio, por ejemplo,

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} \mathbf{v}(x, y, z) &= [v_1(x, y, z),\quad v_2(x, y, z),\quad v_3(x, y, z)] \\ &= v_1(x, y, z)\mathbf{i} + v_2(x, y, z)\mathbf{j} + v_3(x, y, z)\mathbf{k}, \end{aligned}$$

define un **campo vectorial** en la región del espacio en que $\mathbf{v}$ está definida; para cada punto P_0: (x_0, y_0, z_0) de dicha región, $\mathbf{v}$ asocia un vector $\mathbf{v}(P_0) = \mathbf{v}(x_0, y_0, z_0)$. Las derivadas parciales de $\mathbf{v}$ se obtienen tomando las derivadas parciales de las componentes; por ejemplo,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \left[\frac{\partial v_1}{\partial x},\ \frac{\partial v_2}{\partial x},\ \frac{\partial v_3}{\partial x}\right] = \frac{\partial v_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\mathbf{k}.$$

La sección 8.8 sobre la regla de la cadena y algunos otros hechos relacionados con funciones de varias variables sirvió de preparación para las secciones 8.9-8.11, en las que se discutió el **gradiente** de una función escalar f (sección 8.9),

$$\text{grad } f = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right], \tag{12}$$

la **divergencia** de una función vectorial **v** (sección 8.10),

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \tag{13}$$

y el **rotacional** de **v** (sección 8.11),

$$\text{curl } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{14}$$

(con un signo menos precediendo el determinante para coordenadas izquierdas). Algunas fórmulas básicas para el gradiente, la divergencia y el rotacional son (secciones 8.9 - 8.11)

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f, \qquad \nabla(f/g) = (1/g^2)(g\nabla f - f\nabla g) \tag{15}$$

$$\text{div } (f\mathbf{v}) = f \text{ div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f, \qquad \text{div } (f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g \tag{16}$$

$$\nabla^2 f = \text{div } (\nabla f), \qquad \nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } (f\mathbf{v}) &= \nabla f \times \mathbf{v} + f \text{ rot } \mathbf{v} \\ \text{div } (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \end{aligned} \tag{18}$$

$$\text{rot } (\nabla f) = \mathbf{0}, \qquad \text{div } (\text{ rot } \mathbf{v}) = 0. \tag{19}$$

La forma del gradiente, la divergencia y el laplaciano en coordenadas rectangulares generales se presenta en la sección 8.12.

La **derivada direccional** de f en la dirección de un vector ***unitario*** **b** es

$$D_{\mathbf{b}} f = \frac{df}{ds} = \mathbf{b} \cdot \nabla f \qquad \text{(Sección 8.9)} \tag{20}$$

Capítulo



Cálculo integral vectorial. Teoremas sobre integrales

En este capítulo se definirán las integrales de línea y las integrales de superficie y se considerarán algunas aplicaciones importantes de dichas integrales, las cuales ocurren con frecuencia en relación con problemas de física e ingeniería. Se verá que la integral de línea es una generalización natural de la integral definida y que la integral de superficie es una generalización de la integral doble.

Las integrales de línea pueden transformarse en integrales dobles (sección 9.4) o en integrales de superficie (sección 9.9) y viceversa. Las integrales triples pueden transformarse en integrales de superficie (sección 9.7) y viceversa. Estas transformaciones son de gran importancia práctica. Las fórmulas de Gauss, Green y Stokes correspondientes sirven como poderosas herramientas en muchas aplicaciones así como en problemas teóricos. Se verá que también pueden llevar a una mejor comprensión del significado físico de la divergencia y el rotacional de una función vectorial.

Prerrequisitos para este capítulo: Cálculo integral elemental y el capítulo 8.

Secciones que pueden omitirse en un curso más corto: 9.3, 9.5, 9.8.

Bibliografía: Apéndice 1, parte B.

Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

9.1 INTEGRALES DE LÍNEA

El concepto de integral de línea es una generalización simple y natural del concepto de integral definida

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

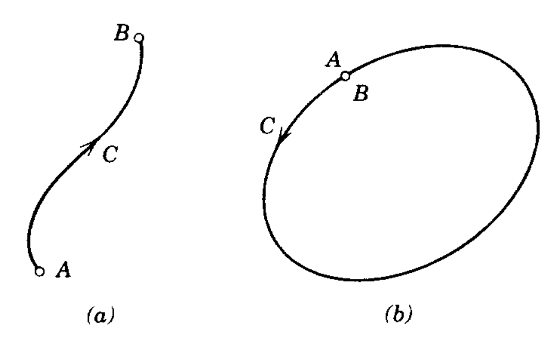


Figura 193. Curva orientada.

En (1) se integra sobre el eje x de a a b y el integrando f es una función definida en todos los puntos entre a y b. En el caso de una integral de línea se integrará sobre una curva C en el espacio (o en el plano) y el integrando será una función definida en todos los puntos de C. (Por tanto, *integral curvilínea* sería un nombre más adecuado, pero *integral de línea* es el término aceptado.) A la curva C se le llama la **trayectoria de integración**. (Para una discusión de curvas, ver la sección 8.5.)

A la curva C se le llama **curva suave** si C tiene una representación

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

tal que $\mathbf{r}(t)$ tiene una derivada continua $\mathbf{r}'(t) = d\mathbf{r}/dt$ que no es el vector cero en ninguna parte. Desde el punto de vista geométrico: la curva C tiene una tangente única en cada uno de sus puntos cuya dirección varía de manera continua a medida que se recorre C. Se llama a A: $\mathbf{r}(a)$ el *punto inicial* y a B: $\mathbf{r}(b)$ el *punto terminal* de C y se dice que C está *orientada*, siendo la dirección de A a B la *dirección positiva* a lo largo de C e indicándola por una flecha (como en la figura 193*a*). Los puntos A y B pueden coincidir (como en la figura 193*b*); en tal caso se dice que C es una *curva cerrada*.

Supuesto general

En este libro, se supone que todas las trayectorias de integración de una integral de línea son **suaves por secciones**; *es decir, que se componen de un número finito de curvas suaves.*

Definición y evaluación de integrales de línea

Una **integral de línea** de una función vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ en una curva C está definida por

$$\text{(3)} \qquad \boxed{\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\bullet \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt} \qquad [\text{ ver (2)}]$$

(ver la sección 8.2 para el producto punto). En términos de componentes, con $d\mathbf{r} = [dx, dy, dz]$ como en la sección 8.5 y $' = d/dt$, la fórmula (3) queda

$$(3') \qquad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) = \int_a^b (F_1x' + F_2y' + F_3z')\,dt.$$

Si la trayectoria de integración de C en (3) es una curva *cerrada*, entonces en lugar de

$$\int_C \quad \text{se escribe también} \quad \oint_C .$$

$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt$ con $t = s$ (la longitud de arco de C) es la componente tangencial de $\mathbf{F}$ y esta integral surge de manera natural en mecánica, donde da el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ en un desplazamiento sobre C (más adelante se presentan los detalles y ejemplos). Así, a la integral de línea (3) se le puede llamar la **integral de trabajo**. Más adelante en esta sección se discutirán otras formas de la integral de línea. Se observa que la expresión del segundo miembro de (3) es una integral definida tomada en el intervalo $a \leqq t \leqq b$ sobre el eje t en la dirección ***positiva*** (la dirección en que t se incrementa). Esta integral definida existe para $\mathbf{F}$ continua y C suave por secciones, ya que en tal caso $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'$ es continua por secciones.

EJEMPLO 1 Evaluación de una integral de línea en el plano

Encontrar el valor de la integral de línea (3) cuando $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ y C es el arco circular de la figura 194 de A a B.

Solución. Puede representarse C por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} \qquad (0 \leqq t \leqq \pi/2).$$

Por tanto, $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$, de donde

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = -y(t)\mathbf{i} + x(t)y(t)\mathbf{j} = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}.$$

Al derivar,

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

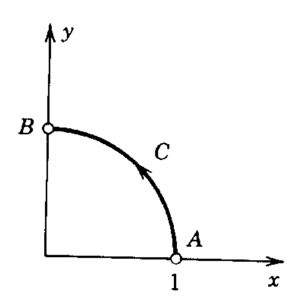


Figura 194. Ejemplo 1.

de donde

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} (-\text{sen}\, t\,\mathbf{i} + \cos t\ \text{sen}\, t\,\mathbf{j})\cdot(-\text{sen}\, t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\text{sen}^2\, t + \cos^2 t\ \text{sen}\, t)\, dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \approx 1.119$$

[usar (10) del apéndice 3.1; hacer $\cos t = u$ en el segundo término]. ∎

Surgen ahora dos preguntas importantes. ¿Este valor depende de la elección particular de la representación del arco circular C? La respesta es no; ver el teorema 1 más adelante. ¿Este valor cambia si se integra de la misma A a la misma B como antes pero siguiendo otra trayectoria? La respuesta es sí, en general; ver el ejemplo 3.

EJEMPLO 2 Integral de línea en el espacio

Para ver que el método para calcular integrales de línea en el espacio es el mismo que se acaba de considerar para el plano, encontrar el valor de (3) cuando $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ y C es la hélice (figura 195)

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\, t\,\mathbf{j} + 3t\mathbf{k} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi). \tag{4}$$

Solución. Por (4) se tiene $x(t) = \cos t$, $y(t) = \text{sen}\, t$, $z(t) = 3t$. Por tanto,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) = (3t\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \text{sen}\, t\,\mathbf{k})\cdot(-\text{sen}\, t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + 3\mathbf{k}).$$

El producto punto es $3t(-\text{sen}\, t) + \cos^2 t + 3\ \text{sen}\, t$. En consecuencia, por (3) se obtiene

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (-3t\ \text{sen}\, t + \cos^2 t + 3\ \text{sen}\, t)\, dt = 6\pi + \pi + 0 = 7\pi \approx 21.99.$$ ∎

EJEMPLO 3 Dependencia de una integral de línea respecto a la trayectoria (puntos extremos iguales)

Evaluar la integral de línea (3) con

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 5z\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$$

a lo largo de dos trayectorias diferentes con el mismo punto inicial A: (0, 0, 0) y el mismo punto terminal B: (1, 1, 1), a saber (figura 196)

(a) C_1: el segmento de recta $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$, y

(b) C_2: el arco parabólico $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

Solución. **(a)** Al sustituir $\mathbf{r}_1$ en $\mathbf{F}$ se obtiene

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) = 5t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}.$$

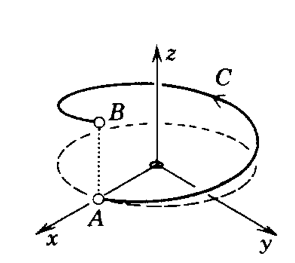


Figura 195. Ejemplo 2.

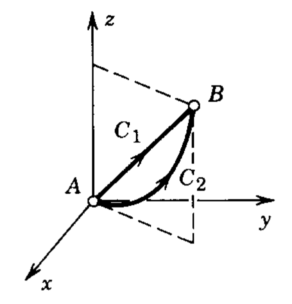


Figura 196. Ejemplo 3.

También se necesita

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Así, la integral sobre C_1 es

$$\int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}_1'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 (5t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\, dt$$

$$= \int_0^1 (5t + t^2 + t^3)\, dt$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 3\,\frac{1}{12}.$$

(b) De manera similar, al sustituir $\mathbf{r}_2$ en $\mathbf{F}$ y calcular $\mathbf{r}_2'$ para la integral sobre la trayectoria C_2 se obtiene

$$\int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}_2'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 (5t^2 + t^2 + 2t^5)\, dt$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6} = 2\,\frac{1}{3}.$$

Los dos resultados son diferentes, aun cuando los puntos extremos son los mismos. Esto indica que **el valor de una integral de línea (3) dependerá en general no sólo de F y de los puntos extremos A, B de la trayectoria sino también de la trayectoria a lo largo de la que se integre de A a B.**

¿Es posible encontrar condiciones que garanticen la independencia? Esta es una pregunta fundamental en relación con las aplicaciones físicas. La respuesta es afirmativa, como se muestra en la siguiente sección. ∎

Motivación de la integral de línea (3): Trabajo realizado por una fuerza

El trabajo W realizado por una fuerza *constante* $\mathbf{F}$ en el desplazamiento sobre un segmento *de recta* $\mathbf{d}$ es $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$; ver el ejemplo 2 de la sección 8.2. Esto sugiere que el trabajo W realizado por una fuerza *variable* $\mathbf{F}$ en el desplazamiento sobre una curva C: $\mathbf{r}(t)$ se defina como el límite de las sumas de los trabajos realizados en los desplazamientos sobre pequeñas cuerdas de C, y que se demuestre que esto equivale a definir W por medio de la integral de línea (3).

Para ello se escogen los puntos $t_0 (= a) < t_1 < \cdots < t_n (= b)$. Entonces el trabajo ΔW_m realizado por $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t_m))$ en el desplazamiento recto de $\mathbf{r}(t_m)$ a $\mathbf{r}(t_{m+1})$ es

$$\Delta W_m = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_m)) \cdot [\mathbf{r}(t_{m+1}) - \mathbf{r}(t_m)] \approx \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_m)) \cdot \mathbf{r}'(t_m)\Delta t_m \quad (\Delta t_m = t_{m+1} - t_m).$$

La suma de estos n trabajos es $W_n = \Delta W_0 + \cdots + \Delta W_{n-1}$. Si se eligen los puntos y se considera W_n para toda n arbitraria pero de tal modo que la Δt_m máxima tienda a cero

cuando $n \to \infty$, entonces el límite de W_n cuando $n \to \infty$ existe y es la integral de línea (3) ya que **F** es continua y C es suave por secciones, lo que hace que $\mathbf{r}'(t)$ sea continua, excepto en un número finito de puntos donde C puede tener vértices o cúspides.

EJEMPLO 4 Trabajo realizado por una fuerza variable

Si **F** del ejemplo 1 es una fuerza, el trabajo realizado por **F** en el desplazamiento a lo largo de un cuarto de circunferencia es 1.119, medido en las unidades apropiadas, por ejemplo, newtons-metros (nt-m, llamados también joules, que se abrevian por J; ver también la cubierta frontal). Se aplica lo mismo a los ejemplos 2 y 3. ∎

EJEMPLO 5 El trabajo realizado es igual a la ganancia en energía cinética

Sea **F** una fuerza, de tal modo que (3) es trabajo. Sea t el tiempo, por lo que $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, la velocidad. Entonces (3) puede escribirse como

$$W = \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{v}(t)\, dt. \tag{5}$$

Ahora, por la segunda ley de Newton (fuerza = masa × aceleración),

$$\mathbf{F} = m\mathbf{r}''(t) = m\mathbf{v}'(t),$$

donde m es la masa del cuerpo desplazado. Al sustituir en (5) se obtiene [ver (11), sección 8.4]

$$W = \int_a^b m\mathbf{v}' \bullet \mathbf{v}\, dt = \int_a^b m \left(\frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}{2}\right)' dt = \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 \Big|_{t=a}^{t=b}.$$

En el segundo miembro, $m|\mathbf{v}|^2/2$ es la energía cinética. Por tanto, *el trabajo realizado es igual a la ganancia en energía cinética.* Esta es una ley básica de la mecánica. ∎

Otras formas de las integrales de línea

$$\int_C F_1\, dx, \qquad \int_C F_2\, dy, \qquad \int_C F_3\, dz \tag{6}$$

son casos especiales de (3) cuando $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i}$ o $F_2\mathbf{j}$ o $F_3\mathbf{k}$, respectivamente. Otra forma es

$$\int_C f(\mathbf{r})\, dt = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, dt \tag{7}$$

con C como en (2). Pero esta definición también puede verse como un caso especial de (3), con $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i}$ y $F_1 = f/(dx/dt)$, de donde $f = F_1x'$, como en (3'). La evaluación de (7) es similar a la discutida en los ejemplos anteriores.

EJEMPLO 6 Una integral de línea de la forma (7)

Encontrar el valor de (7) cuando $f = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ y C es la hélice (4) del ejemplo 2.

Solución. A partir de $\mathbf{r}(t) = \cos t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ se ve que sobre C,

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = [\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + (3t)^2]^2 = (1 + 9t^2)^2.$$

Se obtiene así

$$\int_C f(\mathbf{r})\,dt = \int_0^{2\pi} (1 + 9t^2)^2\,dt = 2\pi + 6(2\pi)^3 + \frac{81}{5}(2\pi)^5 \approx 160\,135.$$ ∎

Propiedades generales de la integral de línea (3)

A partir de las conocidas propiedades de las integrales en cálculo elemental, se obtienen las fórmulas correspondientes para las integrales de línea (3):

(8a) $$\int_C k\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = k\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad (k \text{ constante})$$

(8b) $$\int_C (\mathbf{F} + \mathbf{G})\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r}$$

(8c) $$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad \text{(Figura 197)}$$

donde en (8c) la trayectoria C se subdivide en los dos arcos C_1 y C_2 que tienen la misma orientación que C (figura 197). En (8b) la orientación de C es la misma para las tres integrales. Si el sentido de la integración a lo largo de C se invierte, el valor de la integral se multiplica por -1.

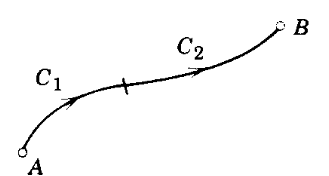


Figura 197. Fórmula (8c).

Si se supone que una integral de línea (3) representa cantidades físicas, como trabajo, la elección de una u otra representación de una curva dada C no debería ser determinante, en tanto las direcciones positivas sean las mismas en ambos casos. Esto es lo que se demuestra a continuación.

Teorema 1 (Transformaciones del parámetro que preservan la dirección)

Cualesquiera representaciones de C que dan la misma dirección positiva sobre C, también dan como resultado el mismo valor de la integral de línea (3).

Demostración. Se representa C en (3) usando otro parámetro t^* dado por una función $t = \phi(t^*)$ que tiene derivada positiva y es tal que $a^* \leqq t^* \leqq b^*$ corresponde a $a \leqq t \leqq b$.

Entonces, al escribir $\mathbf{r}(\phi(t^*)) = \mathbf{r}^*(t^*)$ y aplicando la regla de la cadena, se tiene $dt^* = (dt^*/dt)$ y por tanto

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}^*) \cdot d\mathbf{r}^* = \int_{a^*}^{b^*} \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}^*(t^*)) \cdot \frac{d\mathbf{r}^*}{dt^*} \right] dt^*$$

$$= \int_{a^*}^{b^*} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi(t^*))) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dt^*} \, dt^*$$

$$= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \, dt = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad \blacksquare$$

Problemas de la sección 9.1

Calcular $\int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$, donde

1. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}$, C: el segmento de recta de (0, 0) a (1, 2)
2. $\mathbf{F}$ como en el problema 1, C: $y = 2x^2$, $0 \leqq x \leqq 1$
3. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (y - x)^2\mathbf{j}$, C: $xy = 1$, $1 \leqq x \leqq 3$
4. $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^5y\mathbf{j}$, C: $\cosh t\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\,\mathbf{j}$, $0 \leqq t \leqq 5$
5. $\mathbf{F} = 3x^4\mathbf{i} + 3y^6\mathbf{j}$, C: de (2, 0) a (−2, 0) en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj a lo largo de $x^2 + y^2 = 4$
6. $\mathbf{F} = \exp(y^{2/3})\mathbf{i} - \exp(x^{3/2})\mathbf{j}$, C: $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j}$ de (0, 0) a (0, 1)
7. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, C: $\mathbf{r} = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ de (1, 0, 0) a (1, 0, 4π)
8. $\mathbf{F} = x^5\mathbf{i} + x^4y\mathbf{j} + (z^2x + 2zy)\mathbf{k}$, C como en el problema 7
9. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$, C: alrededor del triángulo del vértice (0, 0, 0) al vértice (1, 1, 0) al vértice (1, 1, 1) y de nuevo a (0, 0, 0)
10. $\mathbf{F} = 2x(5y + 2)\mathbf{i} + 12y\mathbf{j}$, C: en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor del rectángulo con vértices (0. 0), (2, 0), (2, 3), (0, 3)
11. $\mathbf{F} = \frac{1}{4}xy^3\mathbf{i} + x^2y^{-1}\mathbf{j} - (yz \ln y)\mathbf{k}$, C: $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \cosh t\,\mathbf{k}$, $1 \leqq t \leqq 3$
12. $\mathbf{F} = e^x\mathbf{i} + e^{4y/x}\mathbf{j} + e^{2z/y}\mathbf{k}$, C: $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leqq t \leqq 1$

Encontrar el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{p} = 4xy\mathbf{i} - 8y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ en el desplazamiento:

13. Sobre la recta $y = 2x$, $z = 2x$ de (0. 0, 0) a (3. 6. 6).
14. Sobre la parábola $y = 2x^2/3$, $z = 0$ de (0, 0, 0) a (3, 6, 0).
15. En sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.
16. Sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$ de (1. 0. 0) a (2, $\sqrt{3}$, 0).
17. Sobre la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$, $z = 0$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj de (0. −1. 0) a (0, 1, 0).
18. Sobre la hélice del ejemplo 2 de (1. 0. 0) a (1. 0. 6π).

Orientando C de tal modo que el sentido de integración sea el sentido positivo sobre C, evaluar $\int_C (3x^2 + 3y^2)\, ds$:

19. Sobre la trayectoria $y = 3x$ de (0, 0) a (2, 6).

20. Sobre el eje y de (0, 0) a (0, 1), después paralela al eje x de (0, 1) a (1, 1).
21. Sobre el eje x de (0, 0) a (1, 0), después paralela al eje y de (1, 0) a (1, 1).
22. En el sentido del movimiento de las manecillas del reloj sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ de (0, 1) a (1, 0).
23. En sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ de (1, 0) a (0, 1).
24. **(Invariancia)** Comprobar el teorema 1 para $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{k}$, C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $1 \leqq t \leqq 2$, y $t = t^{*2}$.

Estimación de integrales de línea

25. Sea $\mathbf{F}$ una función vectorial definida en todos los puntos de una curva C y suponer que $|\mathbf{F}|$ está acotado, es decir, $|\mathbf{F}| \leqq M$ en C, donde M es un número positivo. Demostrar que

$$\left|\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\right| \leqq ML \qquad (L = \text{ longitud de } C). \tag{9}$$

26. Usando (9), encontrar una cota superior para el valor absoluto del trabajo W realizado por la fuerza $\mathbf{F} = -x^3\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ en el desplazamiento sobre la recta de (0, 0, 0) a (1, 1, 0). Encontrar W por integración y comparar los resultados.

9.2 INTEGRALES DE LÍNEA INDEPENDIENTES DE LA TRAYECTORIA

El valor de la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz) \tag{1}$$

sobre una trayectoria C de un punto A a un punto B en general no depende tan sólo de A y B sino también de la trayectoria C sobre la que se integra. Esto se mostró en el ejemplo 3 de la sección anterior. Esto plantea la cuestión de las condiciones para la independencia de la trayectoria, de tal modo que se obtenga el mismo valor al integrar de A a B a lo largo de cualquier trayectoria C. Esto es de gran importancia práctica. Por ejemplo, en mecánica, la independencia de la trayectoria puede significar que es necesario realizar la misma cantidad de trabajo independientemente de la trayectoria que va a la cima de una montaña, sea ésta corta y pronunciada o larga y suave, o que el trabajo realizado al estirar un resorte elástico se recupere cuando se suelte el resorte. No todas las fuerzas son de este tipo —considérese el nadar en un enorme remolino.

Por definición, una integral de línea (1) es **independiente de la trayectoria en un dominio D en el espacio** si para cada par de puntos extremos A, B en D la integral (1) tiene el mismo valor para todas las trayectorias en D que empiecen en A y terminen en B.

Un criterio muy práctico para la independencia de la trayectoria es el siguiente. (Para el gradiente, ver la sección 8.9.)

Teorema 1 (Independencia de la trayectoria)

Una integral de línea (1) *con* F_1, F_2, F_3 *continuas en un dominio* D *en el espacio es independiente de la trayectoria en* D *si y sólo si* **F** *es el gradiente de alguna función* f *en* D,

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{F} = \operatorname{grad} f;$$

en componentes,

$$\text{(2')} \qquad F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad F_3 = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

EJEMPLO 1 Independencia de la trayectoria

Demostrar que la integral

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (2x\,dx + 2y\,dy + 4z\,dz)$$

es independiente de la trayectoria en cualquier dominio en el espacio y encontrar su valor si C tiene el punto inicial A: (0, 0, 0) y el punto terminal B: (2, 2, 2).

Solución. Por inspección se encuentra que

$$\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k} = \operatorname{grad} f, \qquad \text{donde} \qquad f = x^2 + y^2 + 2z^2.$$

(Si **F** es más complicada, se procede por integración, como en el ejemplo 2 siguiente.) Entonces el teorema 1 implica la independencia de la trayectoria. Para encontrar el valor de la integral, se puede elegir la trayectoria recta conveniente

$$C: \quad \mathbf{r}(t) = t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \qquad 0 \leqq t \leqq 2,$$

y obtener $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; por tanto, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = 2t + 2t + 4t = 8t$ y a partir de este resultado

$$\int_C (2x\,dx + 2y\,dy + 4z\,dz) = \int_0^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'\,dt = \int_0^2 8t\,dt = 16.$$

A continuación se presentan mejores métodos de solución. ∎

Demostración del teorema 1. **(a)** Sea válida (2) para alguna f en D y sea C cualquier trayectoria en D de cualquier punto A a cualquier punto B, dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \qquad a \leqq t \leqq b.$$

Entonces por (2'), la regla de la cadena (sección 8.8) y (3') de la sección 9.1, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_A^B (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) &= \int_A^B \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) \\ &= \int_a^b \frac{df}{dt}\,dt = f[x(t), y(t), z(t)] \Big|_{t=a}^{t=b} \\ &= f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Se demuestra así que el valor de la integral es simplemente la diferencia de los valores de f en los dos puntos extremos de C y, por lo tanto, que es independiente de la trayectoria C.

(b) La demostración más complicada del recíproco, que la independencia de la trayectoria implica (2) para alguna f, se da en el apéndice 4. ∎

La última fórmula del inciso (a) de la demostración

$$\text{(3)} \qquad \boxed{\int_A^B (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) = f(B) - f(A)} \qquad [\mathbf{F} = \text{grad } f]$$

es el análogo de la fórmula familiar

$$\int_a^b g(x)\,dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a) \qquad [G'(x) = g(x)]$$

para evaluar integrales definidas en cálculo elemental y deberá aplicarse siempre que una integral de línea sea independiente de la trayectoria.

La **teoría del potencial** se relaciona con la discusión anterior si se recuerda por la sección 8.9 que f se llama *potencial* de $\mathbf{F} = \text{grad} f$. Por tanto, la integral (1) es independiente de la trayectoria en D si y sólo si $\mathbf{F}$ es el gradiente de un potencial en D.

EJEMPLO 2 Independencia de la trayectoria. Determinación de un potencial

Evaluar la integral

$$I = \int_C (3x^2\,dx + 2yz\,dy + y^2\,dz)$$

de A: (0, 1, 2) a B: (1, −1, 7) demostrando que $\mathbf{F}$ tiene un potencial y aplicando (3).

Solución. Si $\mathbf{F}$ tiene un potencial f, deberá tenerse

$$f_x = F_1 = 3x^2, \qquad f_y = F_2 = 2yz, \qquad f_z = F_3 = y^2.$$

Se demuestra que estas condiciones pueden satisfacerse. Por integración y diferenciación.

$$f = x^3 + g(y, z), \qquad f_y = g_y = 2yz, \qquad g = y^2z + h(z),$$

$$f_z = y^2 + h' = y^2, \qquad h' = 0 \qquad h = 0, \text{ por ejemplo.}$$

Se obtiene así $f(x, y, z) = x^3 + y^2z$ y por (3),

$$I = f(1, -1, 7) - f(0, 1, 2)$$

$$= 1 + 7 - (0 + 2) = 6.$$ ∎

Integración sobre curvas cerradas e independencia de la trayectoria

De la noción sencilla de que dos trayectorias con puntos extremos comunes (figura 198) forman una simple curva cerrada se llega casi de inmediato.

Teorema 2 (Independencia de la trayectoria)

La integral(1) *es independiente de la trayectoria en un dominio D si y sólo si su valor alrededor de cualquier trayectoria cerrada en D es cero.*

Demostración. Si se tiene independencia de la trayectoria, la integración de A a B sobre C_1 y sobre C_2 en la figura 198 da el mismo valor. Ahora bien, C_1 y C_2 tomadas en conjunto forman una curva cerrada C, y si se integra de A sobre C_1 a B como antes — pero en el sentido opuesto sobre C_2 de regreso a A (por lo que esta integral se multiplica por -1)—, la suma de las dos integrales es cero, pero ésta es la integral alrededor de la curva cerrada C.

Recíprocamente, se supone que la integral alrededor de cualquier trayectoria cerrada C en D es cero. Dados dos puntos cualesquiera A y B en D, se elige cualquier curva cerrada C en D que pase por A y B, de tal modo que C se descompone en C_1 y C_2 como en la figura 198. Puesto que el valor de (1) alrededor de C es cero, se sigue que las integrales sobre C_1 y C_2, tomadas ambas de A a B, deben tener el mismo valor, y el teorema queda demostrado. ∎

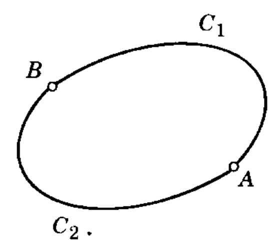


Figura 198. Demostración del teorema 2.

Trabajo. Se recuerda por la sección anterior que, en mecánica, la integral (1) representa el trabajo realizado por una fuerza **F** en el desplazamiento de una partícula sobre C. Entonces el teorema 2 establece que el trabajo es independiente de la trayectoria si y sólo si es cero para el desplazamiento alrededor de cualquier trayectoria cerrada. Además, el teorema 1 establece que esto ocurre si y sólo si **F** es el gradiente de un potencial. En tal caso, a **F** y al campo vectorial definido por **F** se les llama **conservativos**, ya que en este caso la energía mecánica se conserva, es decir, no se realiza ningún trabajo en el desplazamiento desde un punto A y de regreso a él. Se aplica lo mismo al desplazamiento de una carga eléctrica (un electrón, por ejemplo) en un campo electrostático.

En física, la energía cinética de un cuerpo puede interpretarse como la capacidad del cuerpo para realizar trabajo en virtud de su movimiento y si el cuerpo se mueve en un campo de fuerzas conservativo, después de completar un recorrido completo el cuerpo regresará a su posición inicial con la misma energía cinética que tenía originalmente. Por ejemplo, la fuerza gravitacional es conservativa; si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba, regresará (si se supone que la resistencia del aire es despreciable) al punto de lanzamiento con la misma energía cinética que tenía cuando fue lanzada.

La fricción, la resistencia del aire o la resistencia del agua siempre actúan en contra de la dirección del movimiento, tendiendo a disminuir la energía mecánica total de un sistema (convirtiéndola por lo general en calor o en energía mecánica del medio circundante o en ambos) y si en el movimiento de un cuerpo estas fuerzas son

de tal magnitud que ya no es posible despreciarlas, entonces la resultante **F** de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo deja de ser conservativa. En términos muy generales, un sistema físico se llama **conservativo** si todas las fuerzas que actúan en él son conservativas; en caso contrario, se denomina **no conservativo** o **disipativo**.

Exactitud e independencia de la trayectoria

Una tercera idea de interés práctico es relacionar la independencia de la trayectoria con la exactitud de la **forma diferencial**

$$(4) \qquad F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$$

dentro del signo de integral en (1). La forma (4) se llama **exacta** o *diferencial exacta* en un dominio D en el espacio si es la diferencial

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz$$

de una función $f(x, y, z)$ diferenciable en cualquier parte de D, es decir, si se tiene

$$F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = df.$$

Al comparar estas dos fórmulas, se observa que la forma (4) es exacta si y sólo si existe una función diferenciable $f(x, y, z)$ en D tal que

$$(5') \qquad F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad F_3 = \frac{\partial f}{\partial z}$$

en cualquier parte de D; en forma vectorial,

$$(5) \qquad \mathbf{F} = \operatorname{grad} f.$$

Por tanto, por el teorema 1, *la integral* (1) *es independiente de la trayectoria en D si y sólo si la forma diferencial* (4) *es exacta en D.* Lo anterior adquiere importancia práctica porque hay un útil criterio de exactitud en el que interviene el siguiente concepto.

Se dice que un dominio D es **simplemente conexo** si toda curva cerrada en D puede contraerse en forma continua hasta reducirla a un punto cualquiera de D sin salir de éste.

Por ejemplo, el interior de una esfera o de un cubo, el interior de una esfera de la que se ha eliminado un número finito de puntos y el dominio entre dos esferas concéntricas son simplemente conexos, en tanto que el interior de un toro (una rosca; ver la figura 222 en la sección 9.6) y el interior de un cubo del que se ha eliminado una diagonal espacial no son simplemente conexos.

Entonces, el criterio de independencia de la trayectoria basado en la exactitud es el siguiente.

Teorema 3 (Criterio de exactitud e independencia de la trayectoria)

Sean F_1, F_2, F_3 en la integral de línea (1),

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz),$$

continuas y con primeras derivadas parciales continuas en un dominio D en el espacio. Entonces:

(a) *Si* (1) *es independiente de la trayectoria en D —y por tanto la forma diferencial* (4) *dentro del signo de integral es exacta— entonces en D,*

$$\text{(6)} \qquad \boxed{\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0};}$$

en componentes (ver la sección 8.11)

$$\text{(6')} \qquad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

(b) *Si* (6') *es válida en D y este dominio es simplemente conexo, entonces* (1) *es independiente de la trayectoria en D.*

Demostración. **(a)** Si (1) es independiente de la trayectoria en D, entonces $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$ por (2) y

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{rot} (\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$$

[ver (3) en la sección 8.11], por lo que (6) es válida.

(b) En la demostración del recíproco se necesita el "teorema de Stokes" y se presenta en la sección 9.9.

Comentario Para una integral de línea en el plano

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1\, dx + F_2\, dy),$$

rot **F** tiene una sola componente y (6') se reduce a la relación única

$$\text{(6'')} \qquad \boxed{\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}.}$$

EJEMPLO 3 Exactitud e independencia de la trayectoria. Determinación de un potencial

Usando (6'), demostrar que la forma diferencial dentro del signo de integral de

$$I = \int_C [2xyz^2\, dx + (x^2z^2 + z\cos yz)\, dy + (2x^2yz + y\cos yz)\, dz]$$

es exacta, por lo que se tiene independencia de la trayectoria en cualquier dominio, y encontrar el valor de I de A: (0, 0, 1) a B: (1, $\pi/4$, 2).

Solución. La exactitud se sigue de (6'), obteniéndose

$$(F_3)_y = 2x^2z + \cos yz - yz \operatorname{sen} yz = (F_2)_z$$

$$(F_1)_z = 4xyz = (F_3)_x$$

$$(F_2)_x = 2xz^2 = (F_1)_y.$$

Para encontrar f, se integra F_2 (que es una expresión "grande", con lo que se ahorra trabajo) y después se deriva para hacer la comparación con F_1 y F_3,

$$f = \int F_2\, dy = \int (x^2z^2 + z\cos yz)\, dy = x^2z^2y + \operatorname{sen} yz + g(x, z)$$

$$f_x = 2xz^2y + g_x = F_1 = 2xyz^2, \qquad g_x = 0, \qquad g = h(z)$$

$$f_z = 2x^2zy + y\cos yz + h' = F_3 = 2x^2zy + y\cos z, \qquad h' = 0,$$

de donde, tomando $h = 0$, se tiene

$$f(x, y, z) = x^2yz^2 + \operatorname{sen} yz.$$

A partir de esta expresión y de (3) se obtiene

$$I = f(1, \pi/4, z) - f(0, 0, 1) = \pi + \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi - 0 = \pi + 1. \qquad \blacksquare$$

El supuesto del teorema 3 de que D es simplemente conexo es esencial y no puede pasarse por alto. Esto puede verse en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Acerca del supuesto en el teorema 3 de tener un dominio simplemente conexo

Sean

$$F_1 = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad F_2 = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad F_3 = 0.$$

Por diferenciación se demuestra que (6') se satisface en cualquier dominio del plano xy que no contenga al origen, por ejemplo, en el dominio D: $\frac{1}{2} < \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{3}{2}$ ilustrado en la figura 199. De hecho, F_1 y F_2 no dependen de z y $F_3 = 0$, por lo que las dos primeras relaciones de (6') son trivialmente ciertas y la tercera se comprueba por derivación:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

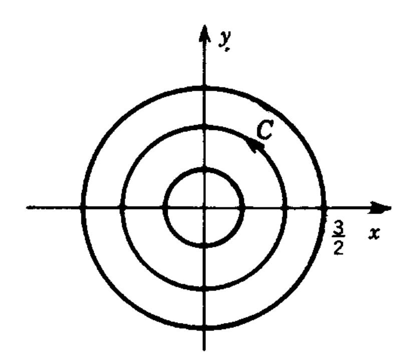


Figura 199. Ejemplo 4.

Resulta evidente que D en la figura 199 no es simplemente conexo. Si la integral

$$I = \int_C (F_1\,dx + F_2\,dy) = \int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

fuera independiente de la trayectoria en D, entonces $I = 0$ sobre cualquier curva cerrada en D, por ejemplo, en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Pero al hacer $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y al observar que la circunferencia está representada por $r = 1$, se tiene

$$x = \cos\theta, \qquad dx = -\text{sen}\,\theta\,d\theta, \qquad y = \text{sen}\,\theta, \qquad dy = \cos\theta\,d\theta,$$

por lo que $-y\,dx + x\,dy = d\theta$ y la integración en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj da como resultado

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1} = 2\pi.$$

Puesto que D no es simplemente conexo, no puede aplicarse el teorema 3 y se concluye que I es independiente de la trayectoria en D. ▮

Problemas de la sección 9.2

Demostrar que la forma dentro del signo de integral es exacta y evaluar

1. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (4\,dx - 6y\,dy + 5\,dz)$
2. $\displaystyle\int_{(0,-1,-1)}^{(1,0,1)} (e^x\,dx - e^z\,dz)$
3. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(2,2,2)} (2x\,dx + 3y^2z\,dy + y^3\,dz)$
4. $\displaystyle\int_{(1,1,0)}^{(1,4,3)} (\cosh^2 z\,dy + y\,\text{senh}\,2z\,dz)$
5. $\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(0,0,1)} (3x^2y^2z^4\,dx + 2x^3yz^4\,dy + 4x^3y^2z^3\,dz)$
6. $\displaystyle\int_{(2,1,0)}^{(0,1,2)} (ze^{xz}\,dx - dy + xe^{xz}\,dz)$
7. $\displaystyle\int_{(0,2,0)}^{(1,\pi,0)} \text{sen}\,xy\,(y\,dx + x\,dy)$
8. $\displaystyle\int_{(0,1,2)}^{(0,2,3)} e^{y^2}(2yz^3\,dy + 3z^2\,dz)$

¿Las siguientes formas diferenciales son exactas? Para las que sean exactas, encontrar f tal que la forma sea igual a df; integrar después la forma exacta de A: (0, 0, 0) a B: (a, b, c).

9. $xyz^2\,dx + x^2z^2\,dy + x^2yz\,dz$
10. $\text{sen}\,x\,dy + \text{sen}\,y\,dx$
11. $\text{senh}\,xz\,(z\,dx - x\,dz)$
12. $e^y(-2\,\text{sen}\,2x\,dx + \cos 2x\,dy)$
13. $(e^y - ze^x)\,dx + xe^y\,dy - e^x\,dz$
14. $\text{sen}\,2yz\,(z\,dy + y\,dz)$
15. $y\cos xy\,dx + x\cos xy\,dy - dz$
16. $\text{senh}\,x\cos z\,dx + \cosh x\,\text{sen}\,z\,dz$
17. $xe^{2z}\,dx + x^2e^{2z}\,dz$
18. $e^z\,dx + e^y\,dy + e^x\,dz$
19. $ye^z\,dy - ze^y\,dz$
20. $e^{xyz}(yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz)$

9.3 DEL CÁLCULO: INTEGRALES DOBLES, *OPCIONAL*

Los estudiantes familiarizados con las integrales dobles del cálculo elemental deberán pasar a la siguiente sección, saltándose el presente repaso (incluido a fin de hacer el libro razonablemente autónomo).

En una integral definida (1), sección 9.1, se integra una función $f(x)$ sobre un intervalo (un segmento) del eje x. En una integral doble se integra una función $f(x, y)$, llamada el *integrando*, sobre una región R cerrada y acotada[1] en el plano xy, cuya curva fronteriza tiene una tangente única en cada punto, aunque puede tener un número finito de cúspides (tales como los vértices de un triángulo o rectángulo).

La definición de la integral doble es muy similar a la de la integral definida. La región R se subdivide trazando paralelas a los ejes x y y (figura 200). Los rectángulos que están dentro de R se numeran de 1 a n. En cada uno de estos rectángulos se elige un punto, por ejemplo, (x_k, y_k) en el k-ésimo rectángulo, y después se forma la suma

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, \Delta A_k$$

donde ΔA_k es el área del k-ésimo rectángulo. Se repite el procedimiento anterior de manera totalmente independiente para enteros positivos n cada vez más grandes, pero de tal modo que la longitud de la diagonal máxima de los rectángulos tienda a cero cuando n tiende a infinito. Se obtiene así una sucesión de números reales $J_{n1}, J_{n2}, \cdots$. Al suponer que $f(x, y)$ es continua en R y que esta región está acotada por un número finito de curvas suaves (ver la sección 9.1), puede demostrarse[2] que esta sucesión converge y que su límite es independiente de la elección de las subdivisiones y de los puntos (x_k, y_k) correspondientes. A este límite se le llama la **integral doble** *de $f(x, y)$ sobre la región R*, y se denota por

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{o} \qquad \iint_R f(x, y)\, dA.$$

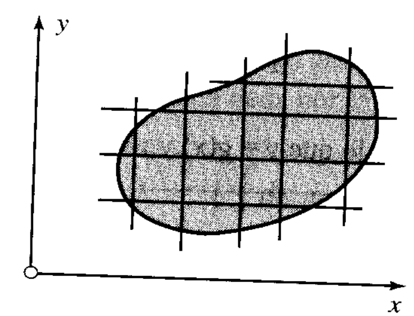


Figura 200. Subdivisión de *R*.

---

[1] "Cerrada" significa que la frontera es parte de la región y "acotada" significa que la región puede encerrarse en una circunferencia de radio suficientemente grande.

[2] Ver la referencia [5] en el apéndice 1.

Por la definición se sigue que las integrales dobles poseen propiedades muy similares a las de las integrales definidas. De hecho, para cualesquiera funciones f y g de (x, y), definidas y continuas en una región R,

$$\iint_R kf\,dx\,dy = k\iint_R f\,dx\,dy \qquad (k \text{ constante})$$

(1) $$\iint_R (f+g)\,dx\,dy = \iint_R f\,dx\,dy + \iint_R g\,dx\,dy$$

$$\iint_R f\,dx\,dy = \iint_{R_1} f\,dx\,dy + \iint_{R_2} f\,dx\,dy \quad \text{(ver la figura 201).}$$

Además, existe al menos un punto (x_0, y_0) en R tal que se tiene

(2) $$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = f(x_0, y_0)A,$$

donde A es el área de R; éste se llama el **teorema del valor medio** *para integrales dobles.*

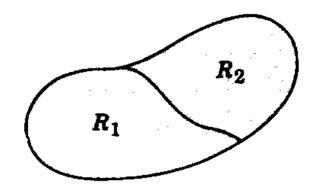


Figura 201. Fórmula (1).

Evaluación de integrales dobles

Las integrales dobles en una región R pueden evaluarse por medio de dos integraciones sucesivas como sigue. Suponer que R puede describirse por desigualdades de la forma

$$a \leqq x \leqq b, \qquad g(x) \leqq y \leqq h(x)$$

(figura 202), por lo que $y = g(x)$ y $y = h(x)$ representan la frontera de R. Entonces

(3) $$\boxed{\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,dy\right] dx.}$$

Se integra primero la integral interior

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,dy.$$

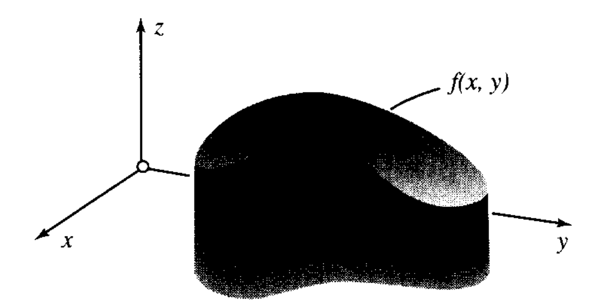


Figura 204. La integral doble como volumen.

porque el término $f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$ en J_n al principio de esta sección representa el volumen de un paralelepípedo rectangular con base ΔA_k y altura $f(x_k, y_k)$.

Sea $f(x, y)$ la densidad (= masa por unidad de área) de una distribución de masa en el plano xy. Entonces la masa total M en R es

$$M = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy,$$

el **centro de gravedad** de la masa en R tiene las coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_R xf(x, y)\,dx\,dy \qquad \text{y} \qquad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint_R yf(x, y)\,dx\,dy,$$

los **momentos de inercia** I_x e I_y de la masa en R alrededor de los ejes x y y son, respectivamente,

$$I_x = \iint_R y^2 f(x, y)\,dx\,dy, \qquad I_y = \iint_R x^2 f(x, y)\,dx\,dy,$$

y el **momento de inercia polar** I_0 alrededor del origen de la masa en R es

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) f(x, y)\,dx\,dy.$$

EJEMPLO 1 Centro de gravedad. Momentos de inercia

Sea $f(x, y) = 1$ la densidad de masa en la región R: $0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$ (figura 205). Encontrar el centro de gravedad y los momentos de inercia I_x, I_y e I_0.

Solución. La masa total en R es

$$M = \iint_R dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\right] dx = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}$$

(x = sen θ), que es el área de R. Las coordenadas del centro de gravedad son

$$\bar{x} = \frac{4}{\pi}\iint_R x\,dx\,dy = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\right] dx = \frac{4}{\pi}\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx = -\frac{4}{\pi}\int_1^0 z^2\,dz = \frac{4}{3\pi}$$

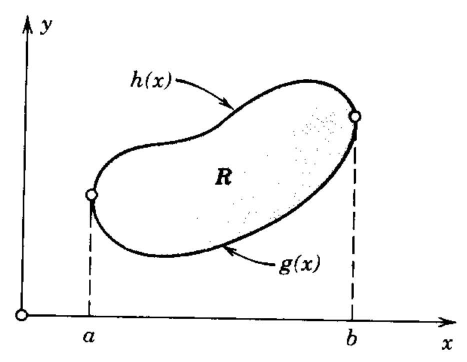


Figura 202. Evaluación de una integral doble.

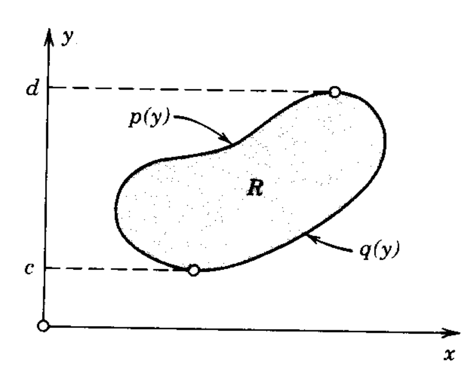


Figura 203. Evaluación de una integral doble.

En esta integración x se mantiene fija, es decir, x se considera como una constante. El resultado de esta integración será una función de x, por ejemplo, $F(x)$. Al integrar $F(x)$ con respecto a x de a a b se obtiene el valor de la integral doble de (3).

De manera similar, si R puede describirse por desigualdades de la forma

$$c \leqq y \leqq d, \qquad p(y) \leqq x \leqq q(y)$$

(figura 203), entonces se obtiene

$$\text{(4)} \qquad \boxed{\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y)\, dx \right] dy;}$$

ahora se integra primero con respecto a x (tratando a y como constante) y después la función de y resultante se integra de c a d.

Si R no puede representarse por las desigualdades anteriores, pero puede subdividirse en un número finito de porciones que tienen esa propiedad, $f(x, y)$ puede integrarse en cada porción por separado y sumar los resultados; se obtendrá así el valor de la integral doble de $f(x, y)$ sobre esa región R.

Aplicaciones de las integrales dobles

Las integrales dobles tienen varias aplicaciones en geometría y física. Por ejemplo, el **área** A de una región R en el plano xy está dada por la integral doble

$$A = \iint_R dx\, dy.$$

El **volumen** V abajo de la superficie $z = f(x, y)$ (> 0) y arriba de una región R en el plano xy es (figura 204)

$$V = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy,$$

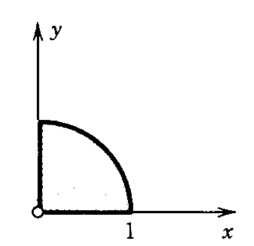


Figura 205. Ejemplo 1.

($\sqrt{1-x^2}=z$), y $y=x$, por razones de simetría. Además,

$$I_x = \iint_R y^2\,dx\,dy = \int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2\,dy\right]dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (\sqrt{1-x^2})^3\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{\pi}{16},\qquad I_y = \frac{\pi}{16},\qquad I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi}{8} \approx 0.3927.$$

Estas integraciones se simplificarían bastante si se hiciera primero un cambio adecuado de variables. Esto es lo que indica a continuación. ∎

Cambio de variables en integrales dobles

En los problemas prácticos con frecuencia será necesario hacer un cambio de las variables de integración en las integrales dobles. Recuérdese del cálculo elemental que para una integral definida la fórmula para el cambio de x a u es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(u))\,\frac{dx}{du}\,du. \tag{5}$$

Se supone aquí que $x = x(u)$ es continua y tiene una derivada continua en algún intervalo $\alpha \leqq u \leqq \beta$ tal que $x(\alpha) = a$ y $x(\beta)$[o $x(\alpha) = b$ y $x(\beta) = a$] y que $x(u)$ varía entre a y b cuando u varía entre α y β.

La fórmula para un cambio de variables en integrales dobles de x, y a u, v es

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R^*} f(x(u,v),\,y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv; \tag{6}$$

es decir, el integrando se expresa en términos de u y v, y $dx\,dy$ se sustituye por $du\,dv$ multiplicado por el valor absoluto del **jacobiano**[3]

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

[3] Nombre dado en honor del matemático alemán CARL GUSTAV JACOB JACOBI (1804-1851), profesor en Königsberg y Berlín, quien realizó importantes aportaciones en funciones elípticas, ecuaciones diferenciales parciales, mecánica, astronomía y cálculo de variaciones.

Se supone aquí lo siguiente. Las funciones

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v)$$

que efectúan el cambio son continuas y tienen derivadas parciales continuas en alguna región R^* en el plano uv de tal modo que el punto (x, y) correspondiente a cualquier (u, v) en R^* está en R y, recíprocamente, a cada (x, y) en R le corresponde uno y sólo un punto (u, v) en R^*; además, el jacobiano J es positivo en toda la región R^* o bien negativo en toda R^*. Para una demostración, ver la referencia [5] en el apéndice 1.

De particular interés práctico son las **coordenadas polares** r y θ, las cuales pueden introducirse haciendo

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Entonces

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

y

$$(7) \qquad \iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R^*} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) r\,dr\,d\theta,$$

donde R^* es la región en el plano $r\theta$ correspondiente a R en el plano xy.

EJEMPLO 2 Integral doble en coordenadas polares

Usando (7), para I_x en el ejemplo 1 se obtiene

$$I_x = \iint_R y^2\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta \int_0^1 r^3\,dr = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{16}. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Cambio de variables en una integral doble

Evaluar la integral doble

$$\iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

donde R es el cuadrado de la figura 206.

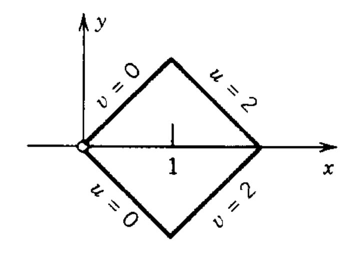


Figura 206. Región del ejemplo 3.

Solución. La forma de R sugiere la transformación $x + y = u$, $x - y = v$. Entonces, $x = \frac{1}{2}(u + v)$, $y = \frac{1}{2}(u - v)$, el jacobiano es

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

R corresponde al cuadrado $0 \leqq u \leqq 2$, $0 \leqq v \leqq 2$ y, por lo tanto,

$$\iint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^2 \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2)\tfrac{1}{2}\, du\, dv = \tfrac{8}{3}.$$

Concluye así el repaso de las integrales dobles. Estas integrales se necesitarán en este capítulo.

Problemas de la sección 9.3

Describir la región de integración y evaluar:

1. $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{2x} (2 + x^2 + y^2)\, dy\, dx$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_{-1}^{1} x^2 y^2\, dx\, dy$

3. $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1 - xy)\, dy\, dx$

4. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^x e^{x+y}\, dy\, dx$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen} x} y\, dy\, dx$

6. $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y\, dx\, dy$

7. $\displaystyle\int_0^2 \int_{\operatorname{senh} x^2}^{\cosh x^2} x\, dy\, dx$

8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^y \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dx\, dy$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos y} x^2 \operatorname{sen} y\, dx\, dy$

10. $\displaystyle\int_1^2 \int_{-x}^{x} e^y \cosh x\, dy\, dx$

Volumen. Encontrar el volumen de las siguientes regiones en el espacio.

11. La región abajo de $z = x^2 + y^2$ y arriba del cuadrado con vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) en el plano xy.
12. La región abajo del plano $z = 6x - y + 12$ y arriba del rectángulo con vértices (0, 0), (2, 0), (2, 6), (0, 6) en el plano xy.
13. La sección del primer octante cortada por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x = y$ en la región interior del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$.
14. El tetraedro del primer octante cortado por el plano $3x + 4y + 2z = 12$.
15. La región del primer octante limitada por los planos de coordenadas y las superficies $y = 1 - x^2$, $z = 1 - x^2$.

Uso de coordenadas polares. Usando coordenadas polares, evaluar $\displaystyle\iint_R f(x,y)\, dx\, dy$, donde

16. $f = 2(x + y)$, R: $x^2 + y^2 \leqq 9$, $x \geqq 0$
17. $f = \cos(x^2 + y^2)$, R: $x^2 + y^2 \leqq \pi/2$, $x \geqq 0$
18. $f = x^2 y - xy^2 + 3$, R: $x^2 + y^2 \leqq a^2$
19. $f = e^{-x^2-y^2}$, R: la corona limitada por $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$
20. $f = (x + y)^2 + 2x - 2y$, R: $x^2 + y^2 \leqq a^2$, $x \geqq 0$, $-x \leqq y \leqq x$

Jacobiano. Encontrar el jacobiano y dar una justificación geométrica del resultado obtenido.

21. Traslación $x = u + a$, $y = v + b$.

22. Dilatación $x = au$, $y = bv$ (donde $a > 1$, $b > 1$).

23. Rotación $x = u \cos\phi - v \operatorname{sen}\phi$, $y = u \operatorname{sen}\phi + v \cos\phi$.

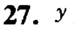
Centro de gravedad. Encontrar las coordenadas $\bar{x}, \bar{y}$ del centro de gravedad de una masa de densidad $f(x, y) = 1$ en una región R, donde R es

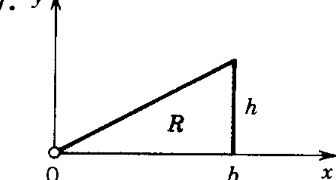
24. El rectángulo $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq 4$.

25. El triángulo con vértices $(0, 0)$, $(b, 0)$, (b, h).

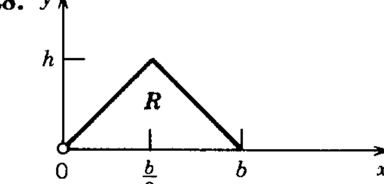
26. La región $x^2 + y^2 \leqq a^2$ en el primer cuadrante.

Momentos de inercia. Encontrar los momentos de inercia I_x, I_y, I_0 de una masa de densidad $f(x, y) = 1$ en la región indicada en las figuras siguientes (las cuales el ingeniero probablemente necesitará en las aplicaciones).

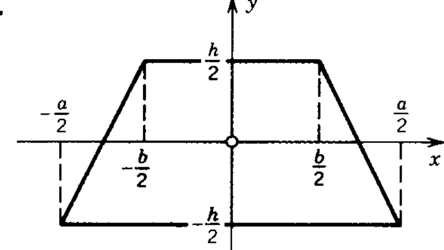
27. 



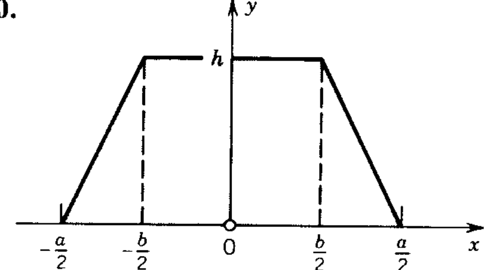
28.



29.



30.



9.4 TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO

Las integrales dobles sobre una región del plano pueden transformarse en integrales de línea sobre la frontera de la región y viceversa. Esto es de interés práctico ya que puede ayudar a hacer más sencilla la evaluación de una integral. También ayuda en la teoría siempre que se desee pasar de un tipo de integral al otro. La transformación puede hacerse aplicando el teorema siguiente.

Teorema 1 Teorema de Green en el plano
(Transformación entre integrales dobles e integrales de línea)

Sea R una región cerrada y acotada en el plano xy cuya frontera C se compone de un número finito de curvas suaves. Sean $F_1(x, y)$ y $F_2(x, y)$ funciones que son continuas y tienen derivadas parciales $\partial F_1/\partial y$ y $\partial F_2/\partial x$ continuas en cualquier parte de un dominio que contiene a R. Entonces

$$\text{(1)} \qquad \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_C (F_1\, dx + F_2\, dy);$$

aquí se integra a lo largo de la frontera completa C de R de tal modo que R está a la izquierda a medida que se avanza en la dirección de integración[4] (ver la figura 207). (La demostración se presenta más adelante.)

Comentario. La fórmula (1) puede escribirse en forma vectorial

$$(1') \qquad \boxed{\iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}} \qquad (\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}).$$

Esta expresión se sigue de (1), sección 8.11, la cual indica que la tercera componente de rot **F** es $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y$.

EJEMPLO 1 Comprobación del teorema de Green en el plano

El teorema de Green en el plano será de suma importancia más adelante. Antes de demostrarlo, sería conveniente que el estudiante se familiarizara con él comprobándolo para $F_1 = y^2 - 7y$, $F_2 = 2xy + 2x$ y C la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Solución. En el primer miembro de (1) se obtiene

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R [(2y + 2) - (2y - 7)]\, dx\, dy = 9 \iint_R dx\, dy = 9\pi$$

ya que el disco circular R tiene área π. En el segundo miembro de (1) se representa C (¡orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj!) por

$$\mathbf{r}(t) = [\cos t,\ \text{sen}\, t]. \qquad \text{Entonces} \qquad \mathbf{r}'(t) = [-\text{sen}\, t,\ \cos t].$$

Entonces sobre C se tiene

$$F_1 = \text{sen}^2 t - 7\ \text{sen}\, t, \qquad F_2 = 2 \cos t\ \text{sen}\, t + 2 \cos t.$$

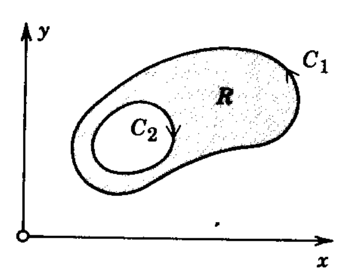


Figura 207. Región R cuya frontera C consta de dos partes; C_1 se recorre en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, en tanto que C_2 se recorre en el otro sentido.

[4] GEORGE GREEN (1793-1841), matemático inglés, quien fue autodidacto, se inició como panadero y a su muerte era miembro del Caius College, Cambridge. Su obra se ocupa de la teoría del potencial con relación a la electricidad y el magnetismo, vibraciones, ondas y teoría de la elasticidad. Permaneció en el anonimato, incluso en Inglaterra, hasta después de su muerte.

Por tanto, la integral en el segundo miembro de (1) queda

$$\oint_C (F_1x' + F_2y')\, dt = \int_0^{2\pi} [(\operatorname{sen}^2 t - 7 \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + 2(\cos t \operatorname{sen} t + \cos t)(\cos t)]\, dt$$

$$= 0 + 7\pi + 0 + 2\pi = 9\pi.$$

Se comprueba así el teorema. ∎

Demostración del teorema de Green. Se demuestra primero el teorema de Green para una *región especial R* que puede representarse en las dos formas siguientes

$$a \leqq x \leqq b, \qquad u(x) \leqq y \leqq v(x) \qquad \text{(Figura 208)}$$

y

$$c \leqq y \leqq d, \qquad p(y) \leqq x \leqq q(y) \qquad \text{(Figura 209).}$$

Aplicando (3) de la sección 9.3, se obtiene

$$\iint_R \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dy\right] dx. \tag{2}$$

Se integra la expresión interior:

$$\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dy = F_1(x, y)\Bigg|_{y=u(x)}^{y=v(x)} = F_1[x, v(x)] - F_1[x, u(x)].$$

Al insertar este resultado en (2) se encuentra

$$\iint_R \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b F_1[x, v(x)]\, dx - \int_a^b F_1[x, u(x)]\, dx$$

$$= -\int_a^b F_1[x, u(x)]\, dx - \int_b^a F_1[x, v(x)]\, dx.$$

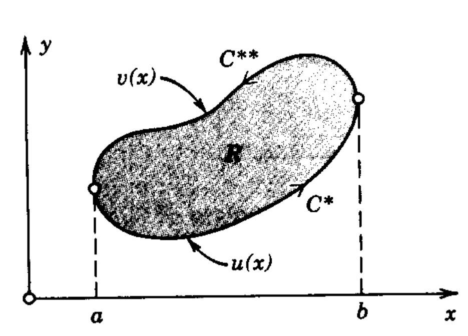


Figura 208. Ejemplo de una región especial.

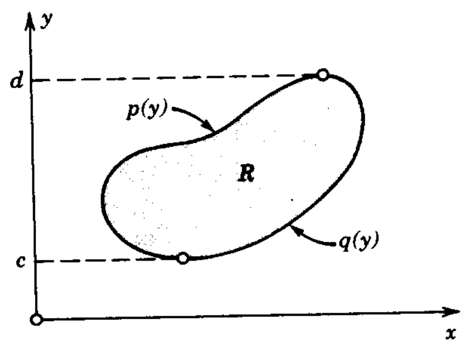


Figura 209. Ejemplo de una región especial.

Puesto que $y = u(x)$ representa la curva C^* (figura 208) y $y = v(x)$ representa C^{**}, las integrales del segundo miembro pueden escribirse como integrales de línea sobre C^* y C^{**} (orientadas como se ilustra en la figura 208); por lo tanto,

$$\iint_R \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{C^*} F_1(x,y)\,dx - \int_{C^{**}} F_1(x,y)\,dx = -\oint_C F_1(x,y)\,dx. \tag{3}$$

Si partes de C son segmentos paralelos al eje y (tales como $\tilde{C}$ y $\tilde{\tilde{C}}$ en la figura 210), el resultado es el mismo que antes, ya que las integrales sobre estas partes son cero y pueden sumarse a las integrales sobre C^* y C^{**} para obtener la integral sobre la frontera completa C en (3). De manera similar, usando (4), sección 9.3, se obtiene (ver la figura 209)

$$\iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dx\right] dy$$

$$= \int_c^d F_2[q(y), y]\,dy + \int_d^c F_2[p(y), y]\,dy$$

$$= \oint_C F_2(x,y)\,dy.$$

A partir de esta expresión y de (3), se establece la fórmula (1) y el teorema queda demostrado para regiones especiales.

Se demuestra ahora el teorema para una región R que no es en sí misma especial pero que puede subdividirse en un número finito de regiones especiales (figura 211). En este caso se aplica el teorema a cada subregión y después se suman los resultados; la suma de los primeros miembros es la integral sobre R en tanto que la suma de los segundos miembros es la integral de línea sobre C más las integrales sobre las curvas

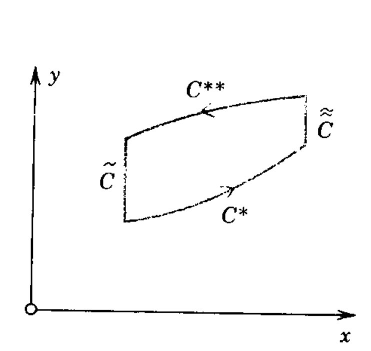


Figura 210. Demostración del teorema de Green.

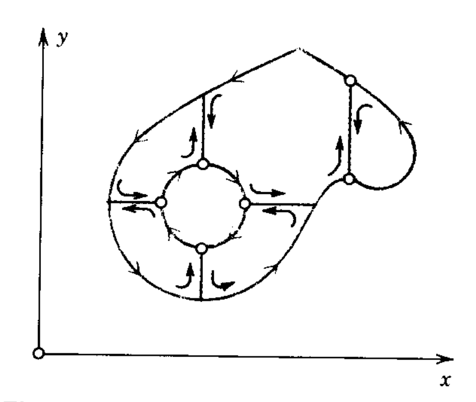


Figura 211. Demostración del teorema de Green.

introducidas al subdividir R. Cada una de estas últimas integrales aparece dos veces, tomadas una vez en cada dirección. Por tanto estas dos integrales se cancelan entre sí y queda únicamente la integral de línea sobre C.

Hasta este punto, la demostración incluye todas las regiones que son de interés en problemas prácticos. Para demostrar el teorema para la región R más general que satisface las condiciones del mismo, es necesario obtener una aproximación de R mediante una región del tipo que se acaba de considerar y aplicar después un proceso de límites. Para los detalles ver la referencia [5] en el apéndice 1. ∎

Otras aplicaciones del teorema de Green

EJEMPLO 2 Área de una región plana como una integral de línea sobre la frontera

En (1), sean $F_1 = 0$ y $F_2 = x$. Entonces

$$\iint_R dx\, dy = \oint_C x\, dy.$$

La integral del primer miembro es el área A de R. De manera similar, sean $F_1 = -y$ y $F_2 = 0$; entonces por (1)

$$A = \iint_R dx\, dy = -\oint_C y\, dx.$$

Al sumar ambas fórmulas se obtiene

$$A = \frac{1}{2}\oint_C (x\, dy - y\, dx), \tag{4}$$

donde la integración se hace como se indica en el teorema de Green. Esta interesante fórmula expresa el área de R en términos de una integral de línea sobre la frontera. Tiene varias aplicaciones; por ejemplo, la teoría de ciertos **planímetros** (instrumentos para medir áreas) se basa en ella.

Para una **elipse** $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ o $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, se obtiene $x' = -a \operatorname{sen} t$, $y' = b \cos t$; así, por (4) se obtiene el familiar resultado

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (xy' - yx')\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [ab \cos^2 t - (-ab \operatorname{sen}^2 t)]\, dt = \pi ab.$$ ∎

EJEMPLO 3 Área de una región plana en coordenadas polares

Sean r y θ las coordenadas polares definidas por $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$. Entonces

$$dx = \cos\theta\, dr - r \operatorname{sen}\theta\, d\theta, \qquad dy = \operatorname{sen}\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta,$$

y (4) se reduce una fórmula que es bien conocida por el cálculo elemental, a saber,

$$A = \frac{1}{2}\oint_C r^2\, d\theta. \tag{5}$$

Como una aplicación de (5), se considera la **cardioide** $r = a(1 - \cos\theta)$, donde $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ (figura 212). Se encuentra

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos\theta)^2\,d\theta = \frac{3\pi}{2}a^2.$$ ∎

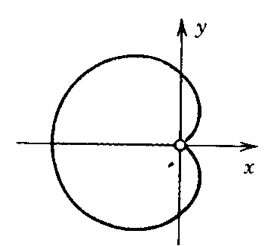


Figura 212. Cardioide.

EJEMPLO 4 Transformación de una integral doble del laplaciano de una función en una integral de línea de su derivada normal

El laplaciano desempeña un papel importante en la física y la ingeniería. En la sección 8.9 se obtuvo una primera impresión de este hecho y en el capítulo 11 se ampliará la discusión del mismo. Entre tanto, se usará el teorema de Green para deducir una fórmula de integrales básica en la que interviene el laplaciano.

Se toma una función $w(x, y)$ que sea continua y que tenga primera y segunda derivadas parciales continuas en un dominio del plano xy que contiene una región R del tipo indicado en el teorema de Green. Se hace $F_1 = -\partial w/\partial y$ y $F_2 = -\partial w/\partial x$. Entonces $\partial F_1/\partial y$ y $\partial F_2/\partial x$ son continuas en R y

(6) $$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w,$$

el laplaciano de w (ver la sección 8.9). Además, al usar esas expresiones para F_1 y F_2 se obtiene

(7) $$\oint_C (F_1\,dx + F_2\,dy) = \oint_C \left(F_1\frac{dx}{ds} + F_2\frac{dy}{ds}\right)ds = \oint_C \left(-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dy}{ds}\right)ds,$$

donde s es la longitud de arco de C y C está orientada como se ilustra en la figura 213. El integrando de la última integral puede escribirse como el producto punto de los vectores

$$\text{grad } w = \frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{n} = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j};$$

es decir,

(8) $$-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dy}{ds} = (\text{grad } w)\cdot\mathbf{n}.$$

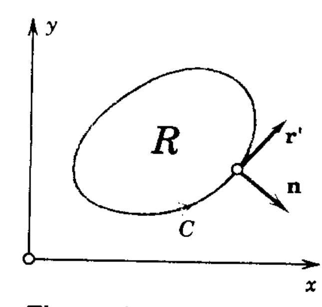


Figura 213. Ejemplo 4.

El vector **n** es un vector unitario normal a C, ya que el vector

$$\mathbf{r}'(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \qquad \text{(Sección 8.5)}$$

es el vector unitario tangente a C y $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n} = 0$. Además, no es difícil ver que **n** está dirigido hacia el *exterior* de C. A partir de lo anterior y de (6) en la sección 8.9, se sigue que la expresión del segundo miembro de (8) es la derivada de w en la dirección de la normal hacia afuera a C. Al denotar esta derivada direccional por $\partial w/\partial n$ y al tomar en consideración (6), (7) y (8), a partir del teorema de Green se obtiene la fórmula de integrales buscada

(9)
$$\iint_R \nabla^2 w \, dx\, dy = \oint_C \frac{\partial w}{\partial n}\, ds.$$

Por ejemplo, $w = x^2 - y^2$ satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 w = 0$. Por tanto, su derivada normal integrada sobre una curva cerrada debe ser 0. ¿Puede el estudiante comprobar esto directamente por integración, por ejemplo, para el cuadrado $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$? ∎

El teorema de Green en el plano puede facilitar la evaluación de integrales y puede usarse en ambas direcciones, dependiendo del tipo de integral que sea el más sencillo en un caso concreto. Esto se ilustra con mayor detalle en los problemas de la sección. Además, y quizás un hecho de mayor importancia, el teorema de Green será una herramienta esencial en la demostración del teorema de Stokes en la sección 9.9.

Problemas de la sección 9.4

Usando el teorema de Green, evaluar la integral de línea $\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la frontera C de la región R, donde

1. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + 4x\mathbf{j}$, R el cuadrado $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq a$
2. $\mathbf{F} = x \operatorname{sen} y\, \mathbf{i} - y \operatorname{sen} x\, \mathbf{j}$, R el rectángulo $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi/2$
3. $\mathbf{F} = -y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$, R el disco circular $x^2 + y^2 \leqq 4$
4. $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + 3y)\mathbf{j}$, R la región elíptica $x^2 + 4y^2 \leqq 4$
5. $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + (e^x + x^2)\mathbf{j}$, R el triángulo con vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1)
6. $\mathbf{F} = x \ln y\, \mathbf{i} + ye^x\mathbf{j}$, R el rectángulo $0 \leqq x \leqq 3$, $1 \leqq y \leqq 2$
7. $\mathbf{F} = \tan 0.1x\, \mathbf{i} + x^5y\mathbf{j}$, R: $x^2 + y^2 \leqq 25$, $y \geqq 0$
8. $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + (x^3 + 3xy^2)\mathbf{j}$, R: $x^2 \leqq y \leqq x$
9. $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$, R: $0 \leqq y \leqq 1/x$, $1 \leqq x \leqq 3$
10. $\mathbf{F} = x^2y^2\mathbf{i} - (x/y^2)\mathbf{j}$, R: $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4$, $x \geqq 0$, $y \geqq x$
11. $\mathbf{F} = e^{x+y}\mathbf{i} + e^{x-y}\mathbf{j}$, R el triángulo $x \leqq y \leqq 2x$, $x \leqq 1$
12. $\mathbf{F} = x \cos y\, \mathbf{i} + x^2 \operatorname{sen} y\, \mathbf{j}$, R: $1 + x^2 \leqq y \leqq 2$, $x \geqq 0$
13. $\mathbf{F} = (xy^2 + \cosh x)\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j}$, R: $x \geqq 0$, $0 \leqq y \leqq 1 - x^2$
14. $\mathbf{F} = x \cosh y\, \mathbf{i} + x^2 \operatorname{senh} y\, \mathbf{j}$, R: $x^2 \leqq y \leqq x$
15. $\mathbf{F} = (x^3 - 2y^3)\mathbf{i} + (x^3 + 2y^3)\mathbf{j}$, R: $x^2 + y^2 \leqq a^2$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$

Área. Usando (4) o (5), encontrar el área de las siguientes regiones.

16. La región abajo del arco del **cicloide** $\mathbf{r} = a(t - \text{sen}\, t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$.

17. La región del primer cuadrante dentro de la **cardioide** (ver el ejemplo 3).

18. La región del primer cuadrante abajo del arco del **limaçon** (caracol de Pascal[5]) $r = 1 + 2 \cos \theta$, $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$.

Integral de la derivada normal. Usando (9), evaluar $\oint_C \frac{\partial w}{\partial n}\, ds$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj sobre la curva fronteriza C de la región R, donde

19. $w = e^x + e^y$, R el cuadrado $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq 2$

20. $w = 2x^2 + y^2$, R: $x^2 \leqq y \leqq x + 2$

21. $w = (x + 3y)^2 + 3x$, R: $x^2 + y^2 \leqq 16$, $x \leqq 0$, $y \geqq 0$

22. $w = e^x \cos y + x^3 - 3xy^2$, R el triángulo con vértices $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(4, 2)$

23. $w = \ln (x^2 + y^2) + xy^3$, R: $1 \leqq y \leqq 2 - x^2$, $x \geqq 0$

24. $w = x^5 y + xy^5$, R: $x^2 + y^2 \leqq 1$, $y \geqq 0$

25. $w = x^3 y + 2e^y$, R el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$

26. **(Ecuación de Laplace)** Si $w(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 w = 0$ en una región R, demostrar que (10) con $\partial w/\partial n$ definida como en el ejemplo 4 es válida. *Sugerencia.* Resolver el problema de manera similar al ejemplo 4.

(10)
$$\iint_R \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = \oint_C w \frac{\partial w}{\partial n}\, ds.$$

27. Demostrar que $w = 2e^x \cos y$ satisface la ecuación de Laplace y, usando (10), integrar $w(\partial w/\partial n)$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la frontera C del cuadrado $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq 2$.

Otras formas del teorema de Green

28. Demostrar que (1) puede escribirse en la forma (11) siguiente, donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario hacia afuera a la curva C (figura 213) y s es la longitud de arco de C. *Sugerencia.* Introducir $\mathbf{F} = F_2\mathbf{i} - F_1\mathbf{j}$.

(11)
$$\iint_R \text{div}\, \mathbf{F}\, dx\, dy = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds.$$

29. Comprobar (11) cuando $\mathbf{F} = 7x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j}$ y C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

30. Demostrar que (1) puede escribirse en la forma (12) siguiente, donde $\mathbf{k}$ es un vector unitario perpendicular al plano xy, $\mathbf{r}'$ es el vector unitario tangente a C y s es la longitud de arco de C.

(12)
$$\iint_R (\text{rot}\, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'\, ds.$$

[5] ETIENNE PASCAL (1588-1651), padre del famoso matemático y filósofo francés BLAISE PASCAL (1623-1662).

9.5 SUPERFICIES PARA INTEGRALES DE SUPERFICIE

Habiéndose introducido las integrales de línea y dobles sobre regiones en el plano, se tratan ahora las integrales de superficie, en las que se integra sobre superficies en el espacio (una esfera, una parte de un cilindro, etc.). Por tanto, es necesario ver primero la manera en que pueden representarse las superficies. Se procede a hacer esto a continuación para discutir después las normales a superficies, que también se necesitarán en las integrales de superficie.

Representaciones de superficies

Para abreviar, el término "superficie" se usa también para denotar una *porción* de una superficie, así como se dice "curva" para referirse al *arco* de una curva.

Representaciones de una superficie S en el espacio xyz son

$$(1) \qquad z = f(x, y) \qquad \text{o} \qquad g(x, y, z) = 0.$$

Por ejemplo, $z = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ o $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ $(z \geqq 0)$ representa una semiesfera de radio a y centro 0.

Ahora bien, para las curvas C en las integrales de línea, resultó más práctico y ofreció una mayor flexibilidad el uso de una representación *paramétrica* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, donde $a \leqq t \leqq b$. Se trata de un mapeo del intervalo $a \leqq t \leqq b$, localizado en el eje t, sobre la curva C en el espacio xyz. Mapea cada t de dicho intervalo sobre el punto de C con vector de posición $\mathbf{r}(t)$. Ver la figura 214.

De manera similar, para superficies S en integrales de superficie, con frecuencia resultará más práctico usar una representación *paramétrica*. Las superficies son *bi*-dimensionales. Por tanto, se necesitan *dos* parámetros, a los que se denomina u y v. En

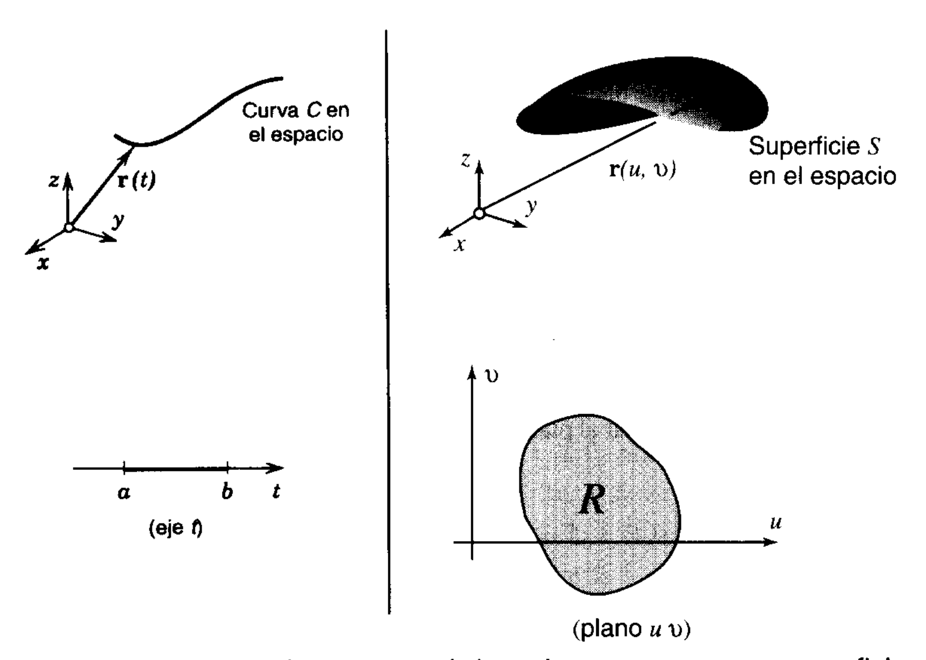


Figura 214. Representaciones paramétricas de una curva y una superficie.

consecuencia, una **representación paramétrica** de una superficie S en el espacio es de la forma

(2) $$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \qquad (u, v) \text{ en } R$$

donde R es alguna región en el plano uv. Este mapeo (2) transforma cada punto (u, v) de R sobre el punto de S con vector de posición $\mathbf{r}(u, v)$. Ver la figura 214.

EJEMPLO 1 Representación paramétrica de un cilindro

El cilindro circular $x^2 + y^2 = a^2$, $-1 \leqq z \leqq 1$, tiene radio a, altura 2 y al eje z como eje. Una representación paramétrica es

$$\mathbf{r}(u, v) = a \cos u\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} u\, \mathbf{j} + v\mathbf{k} \qquad \text{(Figura 215)}$$

donde los parámetros u, v varían en el rectángulo R en el plano uv dado por las desigualdades $0 \leqq u \leqq 2\pi$, $-1 \leqq v \leqq 1$. Las componentes de $\mathbf{r}(u, v)$ son

$$x = a \cos u, \qquad y = a \operatorname{sen} u, \qquad z = v.$$

Las curvas $v = const$ son circunferencias paralelas. Las curvas $u = const$ son rectas verticales. El punto P de la figura 215 corresponde a $u = \pi/3 = 60°$, $v = 0.7$. ▮

EJEMPLO 2 Representación paramétrica de una esfera

Una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ puede representarse en la forma

(3) $$\mathbf{r}(u, v) = a \cos v \cos u\, \mathbf{i} + a \cos v \operatorname{sen} u\, \mathbf{j} + a \operatorname{sen} v\, \mathbf{k}$$

donde los parámetros u, v varían en el rectángulo R en el plano uv dado por las desigualdades $0 \leqq u \leqq 2\pi$, $-\pi/2 \leqq v \leqq \pi/2$. Las componentes de $\mathbf{r}$ son

$$x = a \cos v \cos u, \qquad y = a \cos v \operatorname{sen} u, \qquad z = a \operatorname{sen} v.$$

Las curvas $u = const$ y $v = const$ son los "meridianos" y los "paralelos" de S (ver la figura 216).

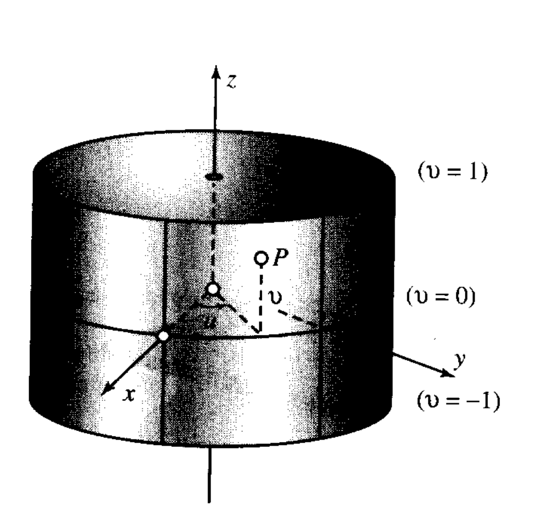


Figura 215. Representación paramétrica de un cilindro.

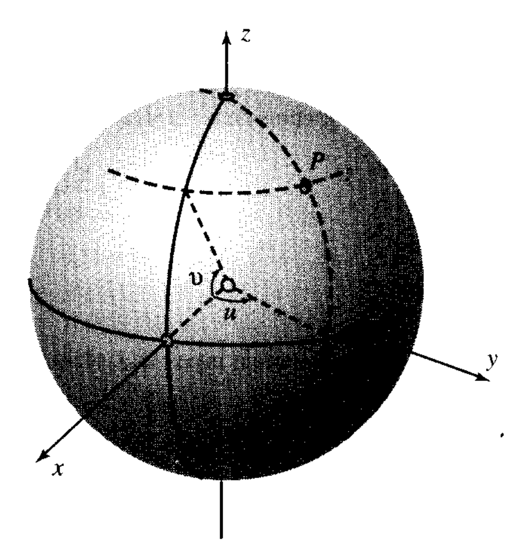


Figura 216. Representación paramétrica de una esféra.

*Esta representación se usa en **geografía** para medir la latitud y la longitud de puntos sobre el globo terráqueo.*

Otra representación paramétrica de la esfera usada también en matemáticas es

(3*) $$\mathbf{r}(u, v) = a \cos u \operatorname{sen} v\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + a \cos v\, \mathbf{k}$$

donde $0 \leqq u \leqq 2\pi$, $0 \leqq v \leqq \pi$. ∎

EJEMPLO 3 Representación paramétrica de un cono

Un cono circular $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leqq z \leqq H$ puede representarse por

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\, \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

donde u, v varían en el rectángulo R: $0 \leqq u \leqq H$, $0 \leqq v \leqq 2\pi$. Las componentes de $\mathbf{r}(u, v)$ son

$$x = u \cos v, \qquad y = u \operatorname{sen} v, \qquad z = u$$

y puede comprobarse que $x^2 + y^2 = z^2$, como debería ser. ¿Qué son las curvas $u = const$ y $v = const$? Hacer una figura. ∎

Plano tangente y normal a una superficie

Antes de definir las integrales de superficie, se da un paso más y se introducen los vectores normales a superficies, los cuales serán necesarios. Un **vector normal** a una superficie S en un punto P es un vector perpendicular al **plano tangente** a S en P (figura 217), el que plano contiene a todos los vectores tangentes a las curvas sobre S que pasan por P, como se sabe por la sección 8.9. Puesto que S está dada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ en (2), la idea es que se obtiene una curva C sobre S al tomar un par de funciones continuas (que no sean ambas constantes)

$$u = u(t), \qquad v = v(t),$$

por lo que C tiene el vector de posición $\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$. Al suponer que estas funciones son derivables y aplicando la regla de la cadena (sección 8.8), se obtiene un vector tangente a C dado por

$$\tilde{\mathbf{r}}'(t) = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} u' + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} v'.$$

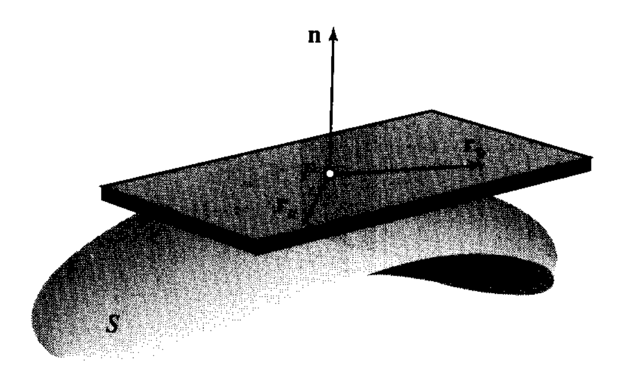


Figura 217. Plano tangente y vector normal.

Por tanto, las derivadas parciales $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ en P son tangenciales a S en P y se supone que son linealmente independientes, por lo que generan el plano tangente a S en P. Entonces su producto vectorial da como resultado un vector $\mathbf{N}$ normal a S en P,

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}.} \tag{4}$$

El vector unitario $\mathbf{n}$ normal a S en P correspondiente es (figura 217)

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{N}|}\mathbf{N} = \frac{1}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v. \tag{5}$$

Además, si S está representada por $g(x, y, z) = 0$, entonces, por el teorema 2 de la sección 8.9,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\text{grad } g|}\text{grad } g. \tag{5*}$$

La discusión puede resumirse como sigue:

Teorema 1 (Plano tangente y normal a una superficie)

Si una superficie S está dada por (2) *con $\mathbf{r}_u = \partial\mathbf{r}/\partial u$ y $\mathbf{r}_v = \partial\mathbf{r}/\partial v$ continuas y que satisfacen* (4) *en cada punto de S, entonces S tiene en cada punto P un plano tangente único que pasa por P y que es generado por $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ así como una normal única cuya dirección depende de manera continua de los puntos de S.*

Un vector unitario $\mathbf{n}$ normal a S está dado por (5). (Ver la figura 217.)

A una superficie S como ésta se le llama **superficie suave**. Se dice que S es **suave por secciones** si está compuesta por un número finito de porciones suaves. Por ejemplo, una esfera es suave y la superficie de la frontera de un cubo es suave por secciones.

EJEMPLO 4 Vector unitario normal a una esfera

Por (5*) se encuentra que la esfera $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ tiene el vector unitario normal

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{x}{a}\mathbf{i} + \frac{y}{a}\mathbf{j} + \frac{z}{a}\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 5 Vector unitario normal a un cono

En la punta del cono $g(x, y, z) = -z + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ del ejemplo 3, el vector unitario normal $\mathbf{n}$ se hace indeterminado, ya que por (5*) se obtiene

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right).$$ ∎

Lo que se ha aprendido sobre superficies en esta sección se aplicará para discutir las **integrales de superficie** en la siguiente sección.

Problemas de la sección 9.5

Representaciones paramétricas y normal a una superficie. Como preparación para las integrales de superficie, el estudiante se familiarizará con las representaciones paramétricas de superficies deduciendo una representación de la forma (1), estableciendo qué son las **curvas paramétricas** (curvas $u = const$ y $v = const$) sobre la superficie y encontrando el vector normal $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ de la superficie.

1. Plano xy $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$
2. Plano xy en coordenadas polares $\mathbf{r} = u \cos v\, \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j}$
3. Cilindro elíptico $\mathbf{r} = 4 \cos u\, \mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} u\, \mathbf{j} + v\mathbf{k}$
4. Helicoide $\mathbf{r} = u \cos v\, \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + v\mathbf{k}$
5. Cono $\mathbf{r} = u \cos v\, \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + cu\mathbf{k}$
6. Elipsoide $\mathbf{r} = a \cos v \cos u\, \mathbf{i} + b \cos v \operatorname{sen} u\, \mathbf{j} + c \operatorname{sen} v\, \mathbf{k}$
7. Paraboloide de revolución $\mathbf{r} = u \cos v\, \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$
8. Elipsoide de revolución $\mathbf{r} = \cos v \cos u\, \mathbf{i} + \cos v \operatorname{sen} u\, \mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} v\, \mathbf{k}$
9. Parabolide elíptico $\mathbf{r} = au \cos v\, \mathbf{i} + bu \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$
10. Paraboloide hiperbólico $\mathbf{r} = au \cosh v\, \mathbf{i} + bu \operatorname{senh} v\, \mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$
11. Hiperboloide $\mathbf{r} = a \operatorname{senh} u \cos v\, \mathbf{i} + b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + c \cosh u\, \mathbf{k}$
12. Catenoide $\mathbf{r} = v \cos u\, \mathbf{i} + v \operatorname{sen} u\, \mathbf{j} + \cosh^{-1} v\, \mathbf{k}$

Obtención de representaciones paramétricas de superficies. Encontrar una representación paramétrica de las siguientes superficies. (La respuesta da *una* de estas representaciones pero hay muchas más.) Encontrar un vector normal.

13. Plano $y = z$
14. Plano yz
15. Plano $x + y + z = 1$
16. Esfera $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 4$
17. Cilindro hiperbólico $x^2 - y^2 = 1$
18. Cilindro elíptico $x^2 + 4z^2 = 4$
19. Paraboloide $z = 16(x^2 + y^2)$
20. Cono elíptico $z = \sqrt{x^2 + 9y^2}$
21. Encontrar una representación paramétrica del paraboloide del problema 20 tal que $\mathbf{N}(0, 0) \neq \mathbf{0}$. Encontrar $\mathbf{N}$.
22. En los problemas 2 y 20, encontrar los puntos en los que (4) no es válida e indicar si esto se debe a la forma de la superficie o a la elección de la representación.
23. Demostrar que una representación $z = f(x, y)$ puede escribirse ($f_u = \partial f/\partial u$, etc.)

$$(6) \qquad \mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + f(u, v)\mathbf{k}, \qquad \text{y} \qquad \mathbf{N} = -f_u\mathbf{i} - f_v\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

24. Escribir $x = h(x, y)$ en forma paramétrica y encontrar un vector normal.
25. **(Parámetros ortogonales sobre una superficie)** Demostrar que las curvas paramétricas $u = const$ y $v = const$ sobre una superficie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ se cortan formando ángulos rectos si y sólo si $\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 0$.

Normal a una superficie. Usando (5*), encontrar un vector unitario normal a las superficies dadas por

26. $x^2 + 4y^2 + 16z^2 = 64$
27. $2x + 3y - 5z = 7$
28. $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$
29. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
30. $3x^2 + 3y^2 - z = 0$
31. $x^2 + y^2 = a^2$
32. $z - x^2 + y^2 = 0$
33. $z - xy = 0$

Plano tangente. El plano tangente $T(P)$ como tal será de importancia secundaria en la discusión subsecuente, pero el estudiante debe saber cómo representarlo. Demostrar que:

34. Si S: $\mathbf{r}(u, v)$, entonces $T(P)$: $(\mathbf{r}^* - \mathbf{r} \quad \mathbf{r}_u \quad \mathbf{r}_v) = 0$ (ver la sección 8.3).

35. Si S: $\mathbf{r}(u, v)$, entonces $T(P)$: $\mathbf{r}^*(p, q) = \mathbf{r}(P) + p\mathbf{r}_u(P) + q\mathbf{r}_v(P)$.

36. Si S: $g(x, y, z) = 0$, entonces $T(P)$: $[\mathbf{r}^* - \mathbf{r}(P)] \cdot \nabla g(P) = 0$.
Si S: $z = f(x, y)$, entonces $T(P)$: $z^* - z = (x^* - x)f_x(P) + (y^* - y)f_y(P)$.

Encontrar una representación del plano tangente a las siguientes superficies en P_0: (x_0, y_0, z_0).

37. $y^2 + z^2 = 4$, P_0: $(3, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$

38. $z^2 = x^2 + y^2$, P_0: $(1, 0, 1)$

39. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, P_0: $(3, 4, 0)$

40. $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 20$, P_0: $(1, 2, 3)$

9.6 INTEGRALES DE SUPERFICIE

Para definir una integral de superficie, se toma una superficie S, dada por una representación paramétrica según se acaba de discutir,

(1) $$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \qquad (u, v) \text{ en } R,$$

y se supone que S es suave por secciones, por lo que S tiene un vector normal

(2) $$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \qquad \text{y vector unitario normal} \qquad \mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{N}|}\mathbf{N}$$

(ver la sección 9.5) en cada punto (con la posible excepción de algunas aristas o cúspides, como en un cubo o cono). Puede definirse ahora la **integral de superficie** de una función vectorial **F** sobre S por

(3) $$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u, v)] \cdot \mathbf{N}(u, v) \, du \, dv.$$

$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ es la componente normal de **F** y esta integral surge de manera natural en problemas de flujo donde da el *flujo* a través de S (= masa de fluido que cruza por S por unidad de tiempo; ver la sección 8.10) cuando $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$, donde ρ es la densidad del fluido y **v** el vector velocidad del flujo (ver el ejemplo siguiente). Por tanto, la integral de superficie (3) puede llamarse la **integral de flujo**.

Otras formas de integrales de superficie se discutirán en las páginas 595–597.

Se observa que la integral del segundo miembro de (3) es una integral doble (sección 9.3) sobre la región R en el plano uv correspondiente a S y que existe para F continua y S suave por secciones, ya que esto hace que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ sea continuo por secciones. Obsérvese asimismo que el integrando es un escalar, no un vector, ya que se toman productos punto.

En (3) se tiene $\mathbf{N}\, du\, dv = \mathbf{n}|\mathbf{N}|\, du\, dv$ por (5) de la sección 9.5. Ahora bien, por la definición de producto vectorial, $|\mathbf{N}| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ es el área del paralelogramo con lados $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$. Por tanto, $|\mathbf{N}|\, du\, dv$ es el elemento de área dA de S, de donde

(3*) $$\boxed{\mathbf{n}\, dA = \mathbf{N}\, du\, dv;}$$

esta expresión motiva (3).

Al hacer $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, $\mathbf{n} = \cos\alpha\, \mathbf{i} + \cos\beta\, \mathbf{j} + \cos\gamma\, \mathbf{k}$ y $\mathbf{N} = N_1\mathbf{i} + N_2\mathbf{j} + N_3\mathbf{k}$, se afirma que (3) puede escribirse

(4) $$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\, dA &= \iint_S (F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta + F_3 \cos\gamma)\, dA \\ &= \iint_R (F_1N_1 + F_2N_2 + F_3N_3)\, du\, dv.\end{aligned}$$

De hecho, los dos segundo miembros se siguen por (2), sección 8.2; el primero a partir de $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ y el segundo a partir de $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}$. Aquí, α, β, γ son los ángulos entre $\mathbf{n}$ y las direcciones positivas de los ejes de coordenadas, ya que se obtiene el producto punto $\mathbf{n}\cdot\mathbf{i} = \cos\alpha$ y, de otra parte, por (4) de la sección 8.2, el mismo resultado, $\cos\alpha = \mathbf{n}\cdot\mathbf{i}/|\mathbf{n}||\mathbf{i}| = \mathbf{n}\cdot\mathbf{i}$. Se aplica un razonamiento similar para β y γ. ∎

EJEMPLO 1 Flujo a través de una superficie

Calcular el flujo de agua que pasa por el cilindro parabólico S: $y = x^2$, $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq z \leqq 3$ (figura 218) si el vector velocidad es $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, con la velocidad medida en metros/segundo.

Solución. Al escribir $x = u$ y $z = v$, se tiene $y = x^2 = u^2$. Por tanto, una representación de S es

$$S: \quad \mathbf{r} = u\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + v\mathbf{k} \qquad (0 \leqq u \leqq 2,\ 0 \leqq v \leqq 3).$$

A partir de esta expresión,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u &= \mathbf{i} + 2u\mathbf{j} \\ \mathbf{r}_v &= \mathbf{k} \\ \mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= 2u\mathbf{i} - \mathbf{j}.\end{aligned}$$

Sobre S,

$$\mathbf{F} = u^2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + uv\mathbf{k}.$$

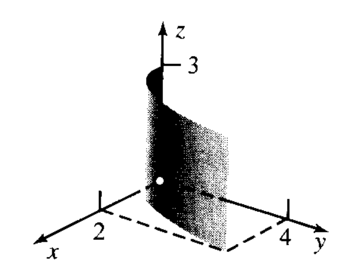


Figura 218. Superficie S en el ejemplo 1.

Por tanto,

$$\mathbf{F}\bullet\mathbf{N} = u^2 \cdot 2u + 2(-1) = 2u^3 - 2.$$

Por integración, a partir de (3) se obtiene

$$\iint_S \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\, dA = \int_0^3 \int_0^2 (2u^3 - 2)\, du\, dv = 3\int_0^2 (2u^3 - 2)\, du = 12 \;\; [\text{metros}^3/\text{seg}].$$

Puesto que el agua tiene la densidad $\rho = 1$ g/cm^3 = 1 kg/l = 1 000 kg/m^3, la respuesta es 12 000 kg/s. ∎

EJEMPLO 2 Integral de superficie

Evaluar (3) cuando $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{k}$ y S es la porción del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante (figura 219).

Solución. Al escribir $x = u$ y $y = v$, se tiene $z = 1 - x - y = 1 - u - v$. Por tanto, el plano $x + y + z = 1$ puede representarse en la forma

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (1 - u - v)\mathbf{k}.$$

La porción S en el primer octante de este plano se obtiene restringiendo $x = u$ y $y = v$ a la proyección R de S en el plano xy. R es el triángulo acotado por los dos ejes de coordenadas y la recta $x + y = 1$; por tanto, $0 \leqq x \leqq 1 - y$, $0 \leqq y \leqq 1$.

Al derivar $\mathbf{r}(u, v)$, se calcula

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (\mathbf{i} - \mathbf{k}) \times (\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Por tanto, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = u^2 + 3v^2$, de donde por (3) se obtiene

$$\iint_S \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\, dA = \iint_R (u^2 + 3v^2)\, du\, dv = \int_0^1 \int_0^{1-v} (u^2 + 3v^2)\, du\, dv$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}(1 - v)^3 + 3v^2(1 - v)\right] dv = \frac{1}{3}. \quad ∎$$

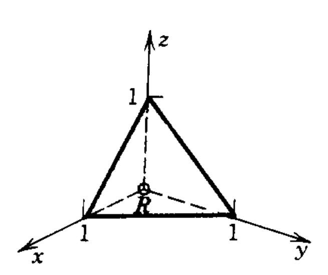


Figura 219. Porción de un plano en el ejemplo 2.

Por (3) o (4) se observa que el valor de la integral depende de la elección del vector normal unitario **n**. (En lugar de **n** pudo haberse elegido −**n**.) Esto se expresa diciendo que esta integral es una *integral sobre una* **superficie orientada** S, es decir, sobre una superficie S sobre la cual se ha elegido uno de los dos vectores normales unitarios posibles en una manera continua. (En el caso de una superficie suave por secciones, el punto necesita analizarse más, lo que se hace más adelante.) Si se cambia la orientación de S, lo que significa que se sustituye **n** por −**n**, entonces cada componente de **n** en (4) se multiplica por −1, por lo que se tiene

Teorema 1 (Cambio de orientación)

La sustitución de **n** *por* −**n** *(y, en consecuencia, de* **N** *por* −**N**) *corresponde a la multiplicación de la integral en* (3) *o* (4) *por* −1.

¿Cómo se efectúa este cambio de **N** en la práctica si S está dada en la forma (1)? La manera más sencilla es intercambiando u y v, ya que entonces $\mathbf{r}_u$ se vuelve $\mathbf{r}_v$ y viceversa, por lo que $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ se convierte en $\mathbf{r}_v \times r_u = -\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = -\mathbf{N}$, como se deseaba. A continuación se ilustrará este hecho.

EJEMPLO 3 Cambio de orientación

En el ejemplo 1 se tenía $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ y S: $y = x^2$, donde $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq z \leqq 3$. Al hacer $x = u$ y $z = v$ se llegó a la representación

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + v\mathbf{k} \qquad (0 \leqq u \leqq 2, 0 \leqq v \leqq 3)$$

obteniéndose +12 como el valor de la integral.

Se comprueba ahora que si se intercambian u y v, de tal modo que

$$\mathbf{r} = v\mathbf{i} + v^2\mathbf{j} + u\mathbf{k} \qquad (0 \leqq u \leqq 3, 0 \leqq v \leqq 2),$$

la integral será −12. De hecho, por cálculos directos se obtiene

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \mathbf{k} \times (\mathbf{i} + 2v\mathbf{j}) = \mathbf{j} - 2v\mathbf{i},$$

$$\mathbf{F} = v^2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + uv\mathbf{k} \qquad (\text{sobre } S)$$

y a partir de esta expresión,

$$\iint_R \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, du\, dv = \int_0^2\int_0^3 (-2v^3 + 2)\, du\, dv = \int_0^2 (-6v^3 + 6)\, dv = -12. \qquad \blacksquare$$

Más acerca de la orientación. Se considera primero una superficie ***suave***. Si S es suave y P es cualquiera de sus puntos, puede escogerse un vector unitario **n** normal a S en P. La dirección de **n** se denomina entonces la *dirección positiva normal* a S en P. Obviamente, existen dos posibilidades para escoger **n**.

Se dice que una superficie suave S es **orientable** si la dirección positiva normal, cuando se da en un punto arbitrario P_0 de S, puede continuarse en una manera única y continua en la superficie entera.

Esencial en la práctica es el hecho de que una *porción suficientemente pequeña de una superficie suave siempre es orientable*. Desde un punto de vista teórico, resulta interesante que esto puede no ser válido para la superficie completa. Existen superficies no orientables. Un ejemplo muy conocido de una superficie no orientable es la **banda de Möbius**[6] ilustrada en la figura 220. Cuando un vector normal, que se da en

[6] AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790-1868), matemático alemán, discípulo de Gauss, profesor de astronomía en Leipzig, conocido por sus importantes trabajos en la teoría de superficies, geometría proyectiva y mecánica. También realizó aportaciones a la teoría de números.

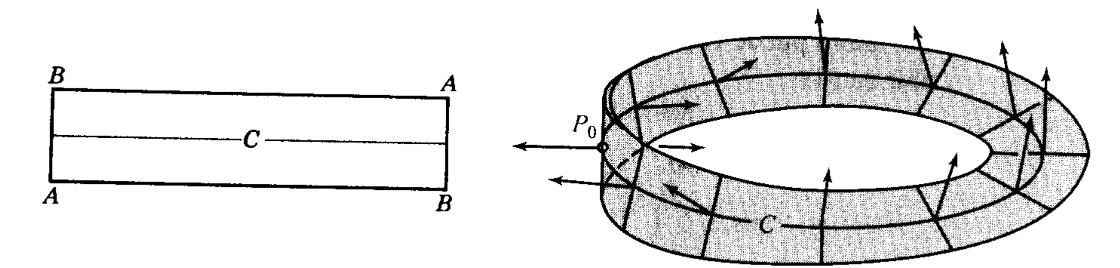


Figura 220. Banda de Möbius.

P_0, se desplaza de manera continua a lo largo de la curva C de la figura 220, el vector normal resultante al regresar a P_0 está en la dirección opuesta a la del vector original en P_0. Puede hacerse un modelo de la banda de Möbius tomando un trozo rectangular largo de papel, haciendo un medio giro y pegando los lados más angostos de tal modo que los dos puntos A y los dos puntos B de la figura 220 coincidan.

Si la frontera de una superficie suave orientable S es una curva cerrada simple C, entonces con cada una de las dos orientaciones posibles de S puede asociarse una orientación de C, como se ilustra en la figura 221*a*. Usando esta idea simple, puede ampliarse ahora fácilmente el concepto de orientación a las superficies suaves por secciones como sigue.

Una superficie S ***suave por secciones*** se llama **orientable** si cada parte suave de S puede orientarse de tal modo que a lo largo de cada curva C^* que es una frontera común de dos partes S_1 y S_2 la dirección positiva de C^* con respecto a S_1 es opuesta a la dirección positiva de C^* con respecto a S_2.

En la figura 221*b* se ilustra la situación para una superficie que se compone de dos partes suaves.

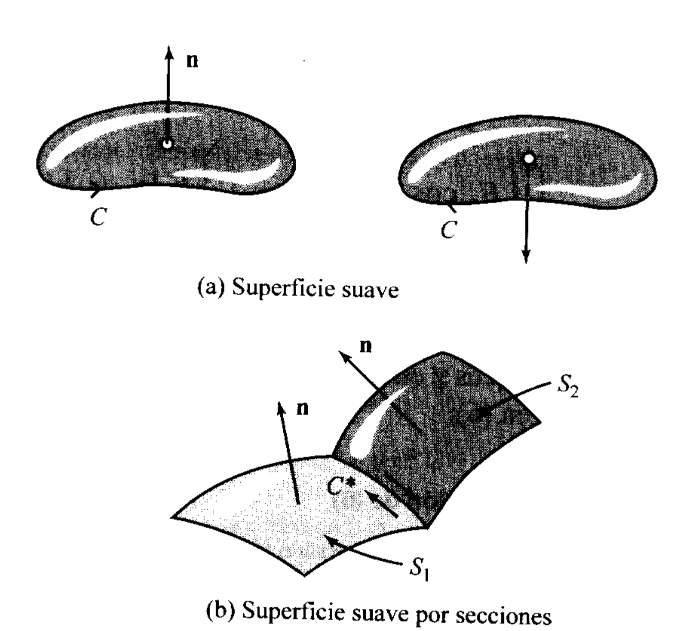


Figura 221. Orientación de una superficie.

Otra notación para las integrales de (4). Después de esta discusión de la orientación, ahora puede explicarse otra manera de escribir (4). También se acostumbra escribir en (4)

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad \iint_S F_1 \cos\alpha \, dA = \iint_S F_1 \, dy\, dz \\ &\text{(b)} \quad \iint_S F_2 \cos\beta \, dA = \iint_S F_2 \, dz\, dx \\ &\text{(c)} \quad \iint_S F_3 \cos\gamma \, dA = \iint_S F_3 \, dx\, dy \end{aligned}$$

y en conjunto

$$\text{(6)}\qquad \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iint_S (F_1 \, dy\, dz + F_2 \, dz\, dx + F_3 \, dx\, dy).$$

Esta fórmula es el análogo de (3') de la sección 9.1 para integrales de línea. Estas fórmulas pueden usarse para evaluar integrales de superficie convirtiéndolas en integrales dobles sobre regiones planas, pero debe tenerse muy presente la orientación de S (la elección de $\mathbf{n}$). Se explica lo anterior para (5c). Si la superficie S está dada por $z = h(x, y)$ con (x, y) variando en una región R en el plano xy y si S está orientada de tal modo que $\cos\gamma > 0$, entonces

$$\text{(5c}')\qquad \iint_S F_3 \cos\gamma \, dA = +\iint_R F_3[x, y, h(x, y)] \, dx\, dy,$$

pero si $\cos\gamma < 0$, entonces

$$\text{(5c}'')\qquad \iint_S F_3 \cos\gamma \, dA = -\iint_R F_3[x, y, h(x, y)] \, dx\, dy.$$

Esto se sigue al observar que el elemento de área $dx\, dy$ en el plano xy es la proyección $|\cos\gamma|\, dA$ del elemento de área dA de S, y se tiene $\cos\gamma = +|\cos\gamma|$ en (5c'), donde $\cos\gamma > 0$, pero $\cos\gamma = -|\cos\gamma|$ en (5c''), donde $\cos\gamma < 0$. Se aplica un razonamiento similar para (5a), (5b) y en (6). ∎

EJEMPLO 4 Una aplicación de (6)

Comprobar el resultado del ejemplo 1 usando (6).

Solución. En el ejemplo 1 se tiene $F_1 = y$, $F_2 = 2$, $F_3 = xz$ y S: $y = x^2$ con $0 \leqq x \leqq 2$ (por tanto $0 \leqq y \leqq 4$) y $0 \leqq z \leqq 3$. La normal a la superficie es paralela al plano xy, por tanto $\cos\gamma = 0$, y $\mathbf{n}$ apunta en la dirección x positiva, por tanto $\cos\alpha > 0$, y ligeramente hacia abajo en la dirección y negativa, por tanto $\cos\beta < 0$, lo

que ocasiona la presencia de un signo menos en (5b). (De hecho, $\mathbf{N} = 2u\mathbf{i} - \mathbf{j} = 2x\mathbf{i} - \mathbf{j}$.) Así, por (6) se obtiene

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iint_R (y\, dy\, dz - 2\, dz\, dx)$$

$$= \int_0^3\int_0^4 y\, dy\, dz - \int_0^2\int_0^3 2\, dz\, dx$$

$$= 3\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^4 - 2\cdot 2\cdot 3 = 24 - 12 = 12.$$

Esto confirma el resultado del ejemplo 1. ∎

Integrales sobre superficies no orientadas

Otro tipo de integral de superficie es

$$\text{(7)} \qquad \iint_S G(\mathbf{r})\, dA = \iint_R G[\mathbf{r}(u, v)]|\mathbf{N}(u, v)|\, du\, dv.$$

Aquí $dA = |\mathbf{N}|\, du\, dv = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv$ es el elemento de área de la superficie S representada por (1) [ver antes de (3*)] y se hace caso omiso de la orientación.

Como en las aplicaciones, si $G(\mathbf{r})$ es la densidad de masa de S, entonces (7) es la masa total de S. Si $G = 1$, entonces (7) da como resultado el **área** $A(S)$ de S,

$$\text{(8)} \qquad A(S) = \iint_S dA = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv.$$

EJEMPLO 5 Área de una esfera

Una esfera de radio a puede representarse por (3), sección 9.5, es decir,

$$\mathbf{r}(u, v) = a \cos v \cos u\, \mathbf{i} + a \cos v \operatorname{sen} u\, \mathbf{j} + a \operatorname{sen} v\, \mathbf{k},$$

donde $0 \leq u \leq 2\pi$, $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$. Mediante cálculos directos se obtiene (¡hacer la comprobación!)

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = a^2 \cos^2 v \cos u\, \mathbf{i} + a^2 \cos^2 v \operatorname{sen} u\, \mathbf{j} + a^2 \cos v \operatorname{sen} v\, \mathbf{k}.$$

Por tanto,

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = a^2[\cos^4 v \cos^2 u + \cos^4 v \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 v \operatorname{sen}^2 v]^{1/2} = a^2\,|\cos v|.$$

Con esta expresión, por (8) se obtiene la conocida fórmula

$$A(S) = a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} |\cos v|\, du\, dv = 2\pi a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v\, dv = 4\pi a^2.$$ ∎

EJEMPLO 6 Representación y área de la superficie de un toro (rosca)

La *superficie S de un toro* se obtiene haciendo girar un círculo C alrededor de una recta L en el espacio de tal modo que C no interseque o toque a L y que su plano pase siempre por L. Si L es el eje z y C tiene radio b y su centro está a la distancia a de L, como en la figura 222, entonces S puede representarse por

$$\mathbf{r}(u, v) = (a + b\cos v)\cos u\,\mathbf{i} + (a + b\cos v)\,\mathrm{sen}\,u\,\mathbf{j} + b\,\mathrm{sen}\,v\,\mathbf{k}.$$

Por tanto

$$\mathbf{r}_u = -(a + b\cos v)\,\mathrm{sen}\,u\,\mathbf{i} + (a + b\cos v)\cos u\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_v = -b\,\mathrm{sen}\,v\cos u\,\mathbf{i} - b\,\mathrm{sen}\,v\,\mathrm{sen}\,u\,\mathbf{j} + b\cos v\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = b(a + b\cos v)[\cos u\cos v\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,u\cos v\,\mathbf{j} + \mathrm{sen}\,v\,\mathbf{k}].$$

En consecuencia, $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = b(a + b\cos v)$ y por (8) se obtiene el área total del toro

(9) $$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a + b\cos v)\,du\,dv = 4\pi^2 ab.$$ ∎

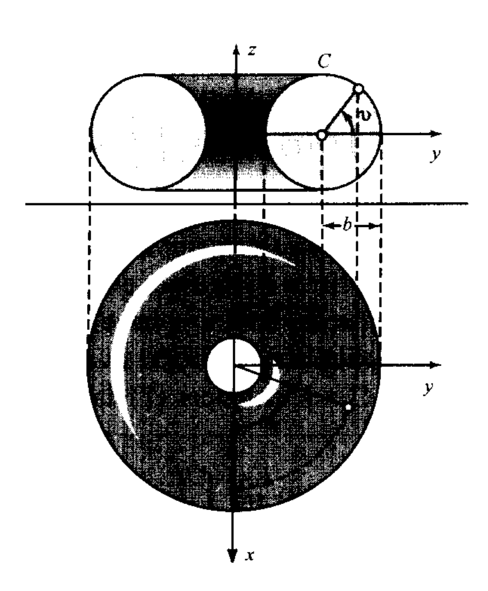


Figura 222. Toro del ejemplo 6.

EJEMPLO 7 Momento de inercia

Encontrar el momento de inercia I de la lámina esférica homogénea S: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ de masa M alrededor del eje z.

Solución. Si una masa se distribuye en una superficie S y $\mu(x, y, z)$ es la densidad de la masa (= masa por unidad de área), entonces el momento de inercia I de la masa con respecto a un eje L dado se define por la integral de superficie

(10) $$I = \iint_S \mu D^2\,dA$$

donde $D(x, y, z)$ es la distancia del punto (x, y, z) a L. Puesto que, en el ejemplo presente, μ es constante y S tiene el área $A = 4\pi a^2$, se tiene

$$\mu = \frac{M}{A} = \frac{M}{4\pi a^2}.$$

Usando para S la representación (3) de la sección 9.5,

$$\mathbf{r}(u, v) = a \cos v \cos u \, \mathbf{i} + a \cos v \operatorname{sen} u \, \mathbf{j} + a \operatorname{sen} v \, \mathbf{k},$$

para el cuadrado de la distancia de un punto (x, y, z) al eje z se obtiene la expresión $D^2 = x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 v$. Además, por cálculos directos,

$$dA = |\mathbf{N}| \, du \, dv = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv = a^2 \cos v \, du \, dv$$

(¡comprobarlos!). Se llega así al resultado

$$I = \iint_S \mu D^2 \, dA = \frac{M}{4\pi a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} a^4 \cos^3 v \, du \, dv = \frac{Ma^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 v \, dv = \frac{2Ma^2}{3}. \quad \blacksquare$$

Si S está dada por $z = f(x, y)$, entonces al hacer $u = x$, $v = y$, $\mathbf{r} = [u, v, f]$ se obtiene

$$|\mathbf{N}| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = |[1, 0, f_u] \times [0, 1, f_v]|$$
$$= |[-f_u, -f_v, 1]| = \sqrt{1 + f_u^{\,2} + f_v^{\,2}}$$

y, como $f_u = f_x, f_v = f_y$, la fórmula (7) queda

$$\text{(11)} \quad \iint_S G(\mathbf{r}) \, dA = \iint_{R^*} G[x, y, f(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

donde R^* es la proyección de S en el plano xy (figura 223) y el vector normal $\mathbf{N}$ en S apunta *hacia arriba*. Si apunta *hacia abajo*, la integral del segundo miembro está precedida de un signo menos.

Por (11) con $G = 1$ se obtiene para el **área** $A(S)$ de S: $z = f(x, y)$ la fórmula

$$\text{(12)} \quad A(S) = \iint_{\bar{S}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

donde $\bar{S}$ es la proyección de S en el plano xy, como antes.

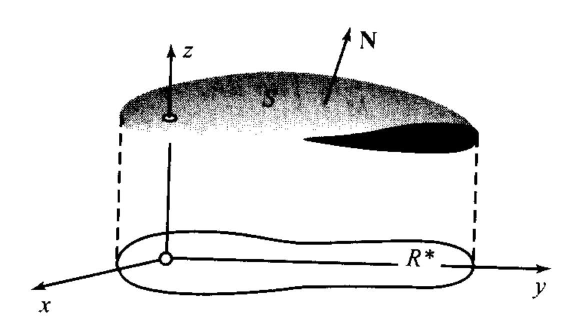


Figura 223. Fórmula (11).

Problemas de la sección 9.6

Integrales de flujo de la forma (3). Evaluar $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA$, donde

1. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$, S: $z = 2x + 3y$, $0 \leqq x \leqq 2$, $-1 \leqq y \leqq 1$
2. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + \mathbf{k}$, S: $x + y + z = 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$
3. $\mathbf{F} = e^y\mathbf{i} - e^z\mathbf{j} + e^x\mathbf{k}$, S: $x^2 + y^2 = 9$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $0 \leqq z \leqq 2$
4. $\mathbf{F} = \cosh yz\,\mathbf{i} + y^4\mathbf{k}$, S: $y^2 + z^2 = 1$, $-5 \leqq x \leqq 5$, $z \geqq 0$
5. $\mathbf{F} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, S: $z = 4(x^2 + y^2)$, $z \leqq 4$
6. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^4\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, S: $z = x^2 + y^2$, $y \geqq 0$, $z = 9$
7. $\mathbf{F} = z^3(\mathbf{i} - \mathbf{k})$, S: $\mathbf{r} = u\cos v\,\mathbf{i} + u\,\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, $0 \leqq u \leqq 5$
8. $\mathbf{F} = (x - z)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} + (z - y)\mathbf{k}$, S como en el problema 7
9. $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, S: $x^2 + 4y^2 = 4$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $0 \leqq z \leqq h$
10. $\mathbf{F} = \tan xy\,\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$, S: $9y^2 + z^2 = 9$, $1 \leqq x \leqq 4$
11. $\mathbf{F} = \mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$, S: $z = xy$, $0 \leqq x \leqq y$, $0 \leqq y \leqq 1$
12. $\mathbf{F} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, S: $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, $z \geqq 0$
13. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, S: $x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$
14. $\mathbf{F} = \cosh x\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} y\,\mathbf{k}$, S: $z = x + y^2$, $0 \leqq y \leqq x$, $0 \leqq x \leqq 1$
15. $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$, S: $\mathbf{r} = \cosh u\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} u\,\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, $0 \leqq u \leqq 2$, $-3 \leqq v \leqq 3$

Integrales de superficie de la forma (7). Usando (7) u (11), evaluar $\iint_S G(\mathbf{r})\,dA$, donde

16. $G = \cos x + \operatorname{sen} y$, S: la porción de $x + y + z = 1$ en el primer octante
17. $G = 3(x + y + z)$, S: $z = x + y$, $0 \leqq y \leqq x$, $0 \leqq x \leqq 1$
18. $G = 2xy + 1$, S: $x^2 + y^2 = 4$, $|z| \leqq 1$
19. $G = xe^y + x^2z^2$, S: $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geqq 0$, $0 \leqq z \leqq h$
20. $G = e^{x^2+y^2} + x^2 - z$, S: $\mathbf{r} = u\cos v\,\mathbf{i} + u\,\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + au\mathbf{k}$, $0 \leqq u \leqq 1$
21. $G = (x^2 + y^2 + z^2)^2$, S: $z = 4\sqrt{x^2 + y^2}$, $y \geqq 0$, $0 \leqq z \leqq 4$
22. $G = x + y + z$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$
23. $G = 27x^3 \operatorname{sen} y$, S: $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u^3\mathbf{k}$, $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq \pi$
24. $G = \arctan(y/x)$, S: $z = x^2 + y^2$, $1 \leqq z \leqq 4$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$
25. $G = 15xy$, S: $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$, $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$

Centro de gravedad. Momentos de inercia

26. **(Centro de gravedad)** Justificar las fórmulas siguientes para la masa M y el centro de gravedad ($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$) de una lámina S de densidad (masa por unidad de área) $\sigma(x, y, z)$ en el espacio:

$$M = \iint_S \sigma\,dA, \quad \bar{x} = \frac{1}{M}\iint_S x\sigma\,dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint_S y\sigma\,dA, \quad \bar{z} = \frac{1}{M}\iint_S z\sigma\,dA.$$

27. **(Momentos de inercia)** Justificar las fórmulas siguientes para los momentos de inercia de la lámina del problema 26 alrededor de los ejes x, y y z, respectivamente:

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\sigma\,dA, \quad I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\sigma\,dA, \quad I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\sigma\,dA.$$

28. Encontrar una fórmula para el momento de inercia de la lámina del problema 26 alrededor de la recta $y = x$, $z = 0$.

Encontrar el momento de inercia de la lámina S de densidad 1 alrededor del eje A, donde

29. S: $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leqq z \leqq h$, A: el eje z

30. S como en el problema 29, A: la recta $z = h/2$ en el plano xz

31. S: $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqq z \leqq h$, A: el eje z

32. **(Teorema de Steiner[7])** Si I_A es el momento de inercia de una distribución de masa de la masa total M con respecto a un eje A que pasa por el centro de gravedad, demostrar que su momento de inercia I_B con respecto a un eje B, que es paralelo a A y está a una distancia k del mismo, es

$$I_B = I_A + k^2 M.$$

33. Usando el teorema de Steiner, encontrar el momento de inercia de S del problema 30 alrededor del eje x.

34. Construir un modelo de papel de la banda de Möbius. ¿Qué ocurre si se recorta a lo largo de la curva C de la figura 220?

Primera forma fundamental de una superficie. Dada una superficie S: $\mathbf{r}(u, v)$, la forma diferencial cuadrática correspondiente

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{13}$$

con coeficientes[8]

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u, \qquad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \qquad G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \tag{14}$$

se conoce como la **primera forma fundamental** de S. Es básica en la teoría de superficies, ya que con su ayuda pueden determinarse longitudes (problema 36 siguiente), ángulos (problema 37) y áreas (problema 38) sobre S, como se ilustra en los problemas siguientes.

35. Por (13), sección 8.5, se tiene $ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$. Demostrar que para una curva C: $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqq t \leqq b$, sobre S a partir de esta expresión se obtienen (13) y (14).

36. Demostrar que C del problema 35 tiene longitud

$$l = \int_a^b \sqrt{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)}\,dt = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\,dt. \tag{15}$$

37. Demostrar que el ángulo γ entre dos curvas que se cortan C_1: $u = g(t)$, $v = h(t)$ y C_2: $u = p(t)$, $v = q(t)$ sobre S: $\mathbf{r}(u, v)$ se obtiene de

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} \tag{16}$$

donde $\mathbf{a} = \mathbf{r}_u g' + \mathbf{r}_v h'$ y $\mathbf{b} = \mathbf{r}_u p' + \mathbf{r}_v q'$ son vectores tangentes a C_1 y C_2.

---

[7] JACOB STEINER (1796-1863), geómetra suizo, nacido en un pequeño pueblo, aprendió a escribir a los 14 años de edad, fue pupilo de Pestalozzi a los 18 años, más tarde estudió en Heidelberg y Berlín y, finalmente, debido a sus notables investigaciones, fue nombrado profesor en la Universidad de Berlín.

[8] E, F, G son notaciones comúnes; desde luego, no guardan relación alguna con las funciones F y G que aparecen en algunas partes de este capítulo.

38. Demostrar que

$$(17)\qquad |\mathbf{N}|^2 = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = EG - F^2,$$

por lo que la fórmula (8) para el área $A(S)$ de S queda

$$(18)\qquad A(S) = \iint_S dA = \iint_R |\mathbf{N}|\, du\, dv = \iint_R \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

39. **(Coordenadas polares)** Demostrar que para las coordenadas polares u $(= r)$ y v $(= \theta)$ definidas por $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, se tiene $E = 1$, $F = 0$, $G = u^2$, de donde

$$ds^2 = du^2 + u^2\, dv^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2$$

y calcular a partir de esta expresión y (18) el área de un disco de radio a.

40. **(Teorema de Pappus[9])** Demostrar que el área A del toro del ejemplo 6 puede obtenerse por el *teorema de Pappus*, el cual establece que el área de una superficie de revolución es igual al producto de la longitud de un meridiano C y la longitud de la trayectoria del centro de gravedad de C cuando C se hace girar un ángulo 2π.

9.7 INTEGRALES TRIPLES. TEOREMA DE GAUSS DE LA DIVERGENCIA

En esta sección se empieza discutiendo las integrales triples. Se obtiene después el primer teorema de integrales "grande", el cual transforma integrales de superficie en integrales triples. Se llama **teorema de Gauss de la divergencia** porque en él interviene la divergencia de una función vectorial (ver la sección 8.10, la cual el estudiante quizás desee repasar).

La integral triple es una generalización de la integral doble introducida en la sección 9.3. Para definir esta integral se considera una función $f(x, y, z)$ definida en una región cerrada y acotada[10] T en el espacio. Esta región T tridimensional se subdivide por medio de planos paralelos a los tres planos de coordenadas. Después se numeran de 1 a n los paralelepípedos de la subdivisión que están dentro de T. En cada paralelepípedo se elige un punto arbitrario, por ejemplo, (x_k, y_k, z_k) en el paralelepípedo k, y se forma la suma

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k$$

donde ΔV_k es el volumen del paralelepípedo k. Se repite el procedimiento anterior para enteros positivos n cada vez más grandes de manera arbitraria, pero de tal modo

[9] PAPPUS DE ALEJANDRÍA (ca. 300), matemático griego. El teorema se llama también *teorema de Guldin*, en honor del matemático austriaco HABAKUK GULDIN (1577-1643), profesor en Graz y Viena.

[10] Explicada en la nota de pie de página 1, página 569, sección 9.3 (con "esfera" en lugar de "circunferencia").

que las longitudes de las aristas del paralelepípedo más grande de la subdivisión tienda a cero cuando n tiende a infinito. Se obtiene así una sucesión de números reales J_{n1}, J_{n2}, $\cdots$. Se supone que $f(x, y, z)$ es continua en un dominio que contiene a T y que T está acotada por un número finito de *superficies suaves* (ver la sección 9.5). Entonces puede demostrarse (ver la referencia [5] en el apéndice 1) que la sucesión converge a un límite que es independiente de la elección de las subdivisiones y de los puntos (x_k, y_k, z_k) correspondientes. Este límite se llama la **integral triple** *de $f(x, y, z)$ sobre la región T* y se denota por

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \qquad \text{o} \qquad \iiint_T f(x, y, z)\, dV.$$

Las integrales triples pueden evaluarse haciendo tres integraciones sucesivas. El procedimiento es similar a la evaluación de integrales dobles haciendo dos integraciones sucesivas, como se discutió en la sección 9.3. A continuación se presenta un ejemplo (ejemplo 1).

Teorema de Gauss de la divergencia

Se demostrará en seguida que las integrales triples pueden transformarse en integrales de superficie sobre la superficie que limita una región en el espacio y viceversa. Esto es de interés práctico, ya que en muchos casos una de las dos clases de integrales es más sencilla que la otra; y ayuda asimismo a establecer ecuaciones fundamentales en la mecánica de fluidos, conducción de calor, etc., como se verá más adelante. La transformación se hace por medio del llamado *teorema de la divergencia* (presentado en seguida), en el que interviene la divergencia de una función vectorial $\mathbf{F}$,

$$(1) \qquad \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \qquad \text{(Sección 8.10).}$$

Teorema 1 Teorema de Gauss de la divergencia
(Transformación entre integrales de volumen e integrales de superficie)

Sea T una región cerrada y acotada[11] *en el espacio cuya frontera es una superficie S suave*[12] *por secciones y orientable. Sea $\mathbf{F}(x, y, z)$ una función vectorial que es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas en algún dominio que contiene a T. Entonces*

$$(2) \qquad \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA$$

donde **n** *es el vector unitario normal* ***exterior*** *a S.* (La demostración se presenta en la página siguiente).

[11] "Cerrada" significa que la superficie frontera S es parte de la región.
[12] Ver la sección 9.5.

Comentario. Si **F** y el vector unitario normal exterior **n** se escriben en componentes,

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k},$$

de tal modo que α, β y γ son los ángulos entre **n** y los ejes x, y y z positivos, respectivamente, y la fórmula (2) adopta la forma

$$\text{(3*)} \qquad \boxed{\begin{aligned}&\iiint_T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \\ &\quad = \iint_S (F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta + F_3 \cos\gamma)\, dA.\end{aligned}}$$

Con base en (6) de la sección anterior, está expresión puede escribirse

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned}&\iiint_T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \\ &\quad = \iint_S (F_1\, dy\, dz + F_2\, dz\, dx + F_3\, dx\, dy).\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Evaluación de una integral de superficie por el teorema de la divergencia

Antes de demostrar el teorema de la divergencia, presentamos una aplicación típica. Haciendo la transformación a una integral triple, evaluar

$$I = \iint_S (x^3\, dy\, dz + x^2 y\, dz\, dx + x^2 z\, dx\, dy)$$

donde S es la superficie cerrada compuesta por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ $(0 \leqq z \leqq b)$ y los discos circulares $z = 0$ y $z = b$ $(x^2 + y^2 \leqq a^2)$.

Solución. En (3) se tiene ahora

$$F_1 = x^3, \quad F_2 = x^2 y, \quad F_3 = x^2 z, \qquad \text{por tanto} \qquad \operatorname{div} \mathbf{F} = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2.$$

Al introducir las coordenadas polares r, θ definidas por $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$ (en consecuencia, las coordenadas cilíndricas r, θ, z), se tiene $dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$ y se obtiene

$$I = \iiint_T 5x^2\, dx\, dy\, dz = 5 \int_{z=0}^{b} \int_{r=0}^{a} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^2 \cos^2\theta\; r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= 5b \int_0^a \int_0^{2\pi} r^3 \cos^2\theta\, dr\, d\theta = 5b\, \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{5}{4}\pi b a^4. \qquad \blacksquare$$

Demostración del teorema de la divergencia. Resulta evidente que (3*) es válida si las integrales de cada componente de ambos miembros de (3*) son iguales, es decir,

$$\text{(4)} \qquad \iiint_T \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_S F_1 \cos\alpha\, dA,$$

(5) $$\iiint_T \frac{\partial F_2}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint_S F_2 \cos\beta\,dA,$$

(6) $$\iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_S F_3 \cos\gamma\,dA.$$

Se demuestra primero (6) para una *región especial* T que está acotada por una superficie suave por secciones y orientable S y que tiene la propiedad de que cualquier recta paralela a cualquiera de los ejes de coordenadas y que corta a T tiene a lo sumo *un* segmento (o un solo punto) en común con T. Esto implica que T puede representarse en la forma

(7) $$g(x, y) \leqq z \leqq h(x, y)$$

donde (x, y) varía en la proyección ortogonal R de T en el plano xy. Evidentemente, $z = g(x, y)$ representa el "fondo" S_2 de S (figura 224), en tanto que $z = h(x, y)$ representa la "tapa" S_1 de S y puede haber una porción vertical sobrante S_3 de S. (La porción S_3 puede degenerar en una curva, como en el caso de una esfera.)

Para demostrar (6) se usa (7). Puesto que $\mathbf{F}$ es diferenciable de manera continua en algún dominio que contiene a T, se tiene

(8) $$\iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_R \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dz\right] dx\,dy.$$

Se integra la expresión interior:

$$\int_g^h \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dz = F_3[x, y, h(x, y)] - F_3[x, y, g(x, y)].$$

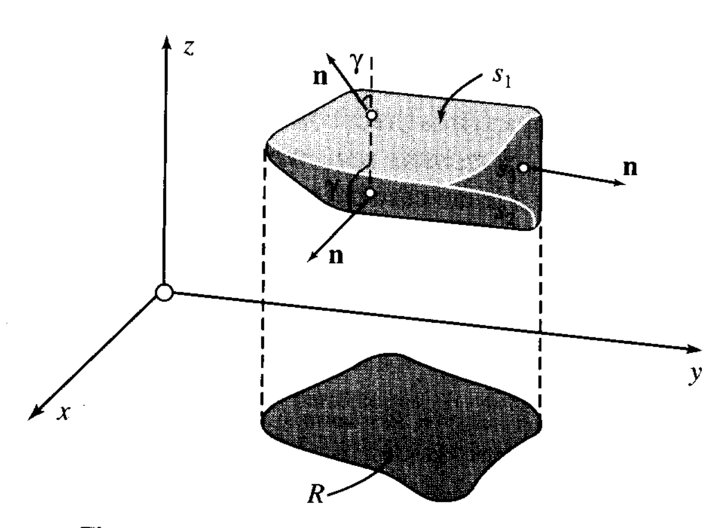


Figura 224. Ejemplo de una región especial.

Por tanto, el primer miembro de (8) es igual a

$$(9) \qquad \iint_R F_3[x, y, h(x, y)]\, dx\, dy - \iint_R F_3[x, y, g(x, y)]\, dx\, dy.$$

Pero también se obtiene el mismo resultado al evaluar el segundo miembro de (6), es decir [ver también (3)]

$$\iint_S F_3 \cos \gamma\, dA = \iint_S F_3\, dx\, dy$$

$$= + \iint_R F_3[x, y, h(x, y)]\, dx\, dy - \iint_R F_3[x, y, g(x, y)]\, dx\, dy,$$

donde la primera integral tiene un signo positivo debido a que $\cos \gamma > 0$ sobre S_1 en la figura 224 [como en (5c′), sección 9.6] y la segunda integral tiene un signo negativo debido a que $\cos \gamma < 0$ sobre S_2 [como en (5c″), sección 9.6, con g en lugar de h]. Se demuestra así (6).

Entonces se llega a las relaciones (4) y (5) simplemente renombrando las variables y usando el hecho de que, por hipótesis, T tiene representaciones similares a (7), a saber,

$$\tilde{g}(y, z) \leqq x \leqq \tilde{h}(y, z) \qquad \text{y} \qquad \tilde{\tilde{g}}(z, x) \leqq y \leqq \tilde{\tilde{h}}(z, x).$$

Con esto se establece el teorema de la divergencia para regiones especiales.

Para cualquier región T que puede subdividirse en *un número finito* de regiones especiales por medio de superficies auxiliares, el teorema se establece sumando el resultado para cada parte por separado; este procedimiento es análogo al de la demostración del teorema de Green en la sección 9.4. Las integrales de superficie sobre las superficies auxiliares se cancelan por pares y la suma de las integrales de superficie restantes es la integral de superficie sobre la frontera completa S de T; la suma de las integrales de volumen sobre las partes de T es la integral de volumen sobre T.

Se prueba ahora el teorema de la divergencia para cualquier región acotada que es de interés en problemas prácticos. La ampliación a la región T más general del tipo caracterizado en el teorema requeriría ciertos procesos de límites; se trata de una situación similar a la del caso del teorema de Green de la sección 9.4. ∎

EJEMPLO 2 Comprobación del teorema de la divergencia

Evaluar $\iint_S (7x\mathbf{i} - z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, dA$ sobre S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (a) usando (2), (b) directamente.

Solución. **(a)** $\operatorname{div}(7x\mathbf{i} - z\mathbf{k}) = 6$. *Respuesta.* $6 \cdot (4/3)\pi \cdot 2^3 = 64\pi$.

(b) S puede representarse por (3), sección 9.5 (con $a = 2$), y se usará $\mathbf{n}\, dA = \mathbf{N}\, du\, dv$ [ver (3*), sección 9.6]. Por consiguiente,

$$S: \quad \mathbf{r} = 2 \cos v \cos u\, \mathbf{i} + 2 \cos v \operatorname{sen} u\, \mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} v\, \mathbf{k}.$$

Entonces

$$\mathbf{r}_u = -2\cos v\ \mathrm{sen}\, u\ \mathbf{i} + 2\cos v\cos u\ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_v = -2\ \mathrm{sen}\, v\cos u\ \mathbf{i} - 2\ \mathrm{sen}\, v\ \mathrm{sen}\, u\ \mathbf{j} + 2\cos v\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = 4\cos^2 v\cos u\ \mathbf{i} + 4\cos^2 v\ \mathrm{sen}\, u\ \mathbf{j} + 4\cos v\ \mathrm{sen}\, v\ \mathbf{k}.$$

A partir de la representación de S se observa que sobre S,

$$7x\mathbf{i} - z\mathbf{k} = 14\cos v\cos u\ \mathbf{i} - 2\ \mathrm{sen}\, v\ \mathbf{k}.$$

Con base en este resultado y la expresión para $\mathbf{N}$ se obtiene

$$\begin{aligned}(7x\mathbf{i} - z\mathbf{k})\cdot\mathbf{N} &= (14\cos v\cos u)(4\cos^2 v\cos u) - (2\ \mathrm{sen}\, v)(4\cos v\ \mathrm{sen}\, v)\\ &= 56\cos^2 u\cos^3 v - 8\ \mathrm{sen}^2 v\cos v\\ &= 56(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2u)(\tfrac{1}{4}\cos 3v + \tfrac{3}{4}\cos v) - 8\ \mathrm{sen}^2 v\cos v.\end{aligned}$$

Se integra esta expresión sobre u de 0 a 2π y sobre v de $-\pi/2$ a $\pi/2$, ya esto corresponde a la esfera completa. Se obtiene así

$$56(\pi + 0)\left[\frac{1}{4}\frac{\mathrm{sen}\, 3v}{3}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{3}{4}\ \mathrm{sen}\, v\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right] - 8\cdot 2\pi\frac{\mathrm{sen}^3 v}{3}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= 56\pi\left[\frac{1}{12}(-1 - 1) + \frac{3}{4}(1 - (-1))\right] - \frac{16\pi}{3}(1 - (-1)) = 64\pi. \qquad \blacksquare$$

En los problemas de la sección y en la siguiente sección se presentan otras aplicaciones del teorema de la divergencia. Los ejemplos de la sección siguiente arrojan más luz acerca de la naturaleza de la divergencia y sus aplicaciones.

Problemas de la sección 9.7

Aplicación de integrales triples

Encontrar la **masa** total de una distribución de masa de densidad σ en una región T en el espacio, donde

1. $\sigma = x^2y^2z^2$, T el cubo $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$, $|z| \leqq 1$
2. $\sigma = x + y + z$, T el paralelepípedo $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 2$, $0 \leqq z \leqq 3$
3. $\sigma = 2(x^2 + y^2)$, T el cilindro $x^2 + y^2 \leqq 4$, $0 \leqq z \leqq 6$
4. $\sigma = 1 + y + z^2$, T el cilindro $y^2 + z^2 \leqq 9$, $1 \leqq x \leqq 3$
5. $\sigma = xy$, T el tetraedro con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$
6. $\sigma = 1 - xy$, T como en el problema 5
7. $\sigma = \mathrm{sen}\, x\cos y + 1$, T el paralelepípedo $0 \leqq x \leqq 2\pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$, $0 \leqq z \leqq 4$
8. $\sigma = 2z$, T la región en el primer octante limitada por $y = 1 - x^2$ y $z = x$
9. $\sigma = x^2y^2$, T: $0 \leqq x \leqq 1$, $1 - x \leqq y \leqq 1$, $1 \leqq z \leqq 2$
10. $\sigma = 1/yz$, T: $0 \leqq x \leqq 2$, $e^{-x} \leqq y \leqq 1$, $e^{-x} \leqq z \leqq 1$

Momento de inercia. Encontrar el momento de inercia $I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$ de una masa de densidad 1 en T alrededor del eje x, donde T es

11. El cubo $0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad 0 \leqq z \leqq 1$

12. El paralelepípedo $0 \leqq x \leqq a, \quad -b/2 \leqq y \leqq b/2, \quad -c/2 \leqq z \leqq c/2$

13. El cilindro $y^2 + z^2 \leqq a^2, \quad 0 \leqq x \leqq h$

14. El cono $y^2 + z^2 \leqq x^2, \quad 0 \leqq x \leqq h$

15. La esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2$

Aplicación del teorema de la divergencia. Evaluar la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA$ por el teorema de la divergencia, donde

16. $\mathbf{F} = e^y\mathbf{j}$, S la superficie del paralelepípedo $0 \leqq x \leqq 3, \quad 0 \leqq y \leqq 2, \quad 0 \leqq z \leqq 1$

17. $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + z^3\mathbf{k}$, S la superficie del cubo del problema 1

18. $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + z^2x\mathbf{k}$, S la superficie del paralelepípedo del problema 2

19. $\mathbf{F} = e^x\mathbf{i} - ye^x\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$, S la superficie de $x^2 + y^2 \leqq a^2, \quad |z| \leqq h$

20. $\mathbf{F} = x^3z^2\mathbf{i} + y^3z^2\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$, S como en el problema 19

21. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$, S la superficie de $x^2 + y^2 \leqq 4, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad |z| \leqq 1$

22. $\mathbf{F} = 10y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, S la superficie de $0 \leqq x \leqq 6, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad 0 \leqq z \leqq y$

23. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - x^2z\mathbf{k}$, S la superficie del tetraedro del problema 5

24. $\mathbf{F} = x^3z\mathbf{i} - xz^2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, S la superficie de $x^2 + y^2 \leqq 4z^2, \quad 0 \leqq z \leqq 1$

25. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - (2x - 1)y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$, S la superficie de $x^2 + y^2 \leqq z^2, \quad 0 \leqq z \leqq 2$

26. $\mathbf{F} = (x + z)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geqq 0$

27. $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

28. $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + 3z(2 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$, S: $9x^2 + y^2 + 9z^2 = 9$

29. $\mathbf{F} = \operatorname{sen}^2 x\, \mathbf{i} - z(1 + \operatorname{sen} 2x)\mathbf{k}$, S la superficie de $x^2 + y^2 \leqq z, \quad z \leqq 1/2$

30. $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, S como en el problema 29

9.8 APLICACIONES ADICIONALES DEL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

El teorema de la divergencia tiene varias aplicaciones y consecuencia. Se ilustran algunas de ellas en los ejemplos siguientes. Se supone aquí que las regiones y las funciones presentes satisfacen las condiciones bajo las cuales el teorema de la divergencia es válida y en todos los casos **n** es el vector unitario normal ***exterior*** de la superficie frontera de la región, como antes.

EJEMPLO 1 Representación de la divergencia independiente de las coordenadas

Al dividir ambos miembros de (2) de la sección 9.7 entre el volumen $V(T)$ de la región T se obtiene

$$\frac{1}{V(T)} \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA \tag{1}$$

donde $S(T)$ es la superficie frontera de T. Las propiedades básicas de la integral triple son en esencia las mismas que las de la integral doble considerada en la sección 9.3. En particular el **teorema del valor**

medio *para integrales triples* establece que para cualquier función continua $f(x, y, z)$ en la región I bajo consideración existe un punto Q: (x_0, y_0, z_0) en T tal que

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = f(x_0, y_0, z_0)V(T).$$

Al hacer $f =$ div **F** y aplicando (1) se tiene

$$\frac{1}{V(T)} \iiint_T \text{div } \mathbf{F}\, dV = \text{div } \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0). \tag{2}$$

Sea P: (x_1, y_1, z_1) cualquier punto fijo en T y sea que T se contrae sobre P, de tal modo que la distancia máxima $d(T)$ de los puntos de T a P tiende a cero. Entonces Q debe tender a P y por (1) y (2) se sigue que la divergencia de **F** en P es

$$\text{div } \mathbf{F}(x_1, y_1, z_1) = \lim_{d(T)\to 0} \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA. \tag{3}$$

Esta fórmula se usa en ocasiones como ***definición*** de la divergencia. Si bien en la definición de divergencia de la sección 8.10 intervienen coordenadas, la fórmula (3) es independiente de las coordenadas. Así, por (3) se sigue de inmediato que ***la divergencia es independiente de la elección particular de las coordenadas cartesianas.*** ∎

EJEMPLO 2 Interpretación física de la divergencia

A partir del teorema de la divergencia puede obtenerse una interpretación intuitiva de la divergencia de un vector. Para ello se considera el flujo de un fluido incompresible (ver la sección 8.10) de densidad constante $\rho = 1$ que es **estacionario**, es decir, no varía con el tiempo. Este flujo está determinado por el campo de su vector velocidad $\mathbf{v}(P)$ en cualquier punto P.

Sea S la superficie frontera de una región T en el espacio y sea **n** el vector unitario normal exterior de S. La masa de fluido que circula por una porción pequeña ΔS de S de área ΔA por unidad de tiempo del interior de S al exterior es igual a $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\Delta A$, donde[13] $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ es la componente normal de **v** en la dirección de **n**, tomada en un punto apropiado de ΔS. Por consiguiente, la masa total de fluido que circula a través de S desde T al exterior por unidad de tiempo está dada por la integral de superficie

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dA.$$

En consecuencia, esta integral representa el flujo total de T y la integral

$$\frac{1}{V}\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dA \tag{4}$$

donde V es el volumen de T, representa el flujo promedio de T. Puesto que el flujo es estacionario y el fluido es incompresible, la cantidad de fluido que circula hacia el exterior debe alimentarse de manera continua. Por tanto, si el valor de la integral (4) es diferente de cero, debe haber **fuentes** (*fuentes positivas y fuentes negativas, llamadas,* **sumideros**) en T, es decir, puntos donde se produce o desaparece fluido.

[13] Obsérvese que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ puede ser negativo en cierto punto, lo que significa que ***entra*** fluido al interior de S en dicho punto.

Si se hace que T se contraiga hacia un punto fijo P de T, a partir de (4) se obtiene la **intensidad de la fuente** en P dada por el segundo miembro de (3) con $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ sustituido por $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. Por lo anterior y la expresión (3) se sigue que ***la divergencia del vector velocidad* v *de un flujo estacionario incompresible es la intensidad de la fuente del flujo en el punto correspondiente.*** No hay fuentes en T si y sólo si div $\mathbf{v} \equiv 0$; en este caso,

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dA = 0$$

para cualquier superficie cerrada S en T. ∎

EJEMPLO 3 Modelado del flujo de calor. Ecuación del calor

Se sabe que en un cuerpo el calor fluye en la dirección en que disminuye la temperatura. Experimentos físicos indican que la rapidez con que se realiza ese flujo es proporcional al gradiente de la temperatura. Esto significa que la velocidad $\mathbf{v}$ del flujo de calor en un cuerpo es de la forma

$$\mathbf{v} = -K \operatorname{grad} U \tag{5}$$

donde $U(x, y, z, t)$ es la temperatura, t es el tiempo y K se denomina la *conductividad térmica* del cuerpo; en circunstancias físicas ordinarias K es una constante. Usando esta información, establecer el modelo matemático para el flujo de calor, la llamada **ecuación del calor**.

Solución. Sea T una región del cuerpo y sea S su superficie frontera. Entonces la cantidad de calor que sale de T por unidad de tiempo es

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dA,$$

donde $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ es la componente de $\mathbf{v}$ en la dirección del vector unitario normal exterior $\mathbf{n}$ de S. Esta expresión se obtiene en una forma similar al ejemplo anterior. Por (5) y el teorema de la divergencia se obtiene [ver (3), sección 8.10]

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dA = -K \iiint_T \operatorname{div} (\operatorname{grad} U)\, dx\, dy\, dz = -K \iiint_T \nabla^2 U\, dx\, dy\, dz \tag{6}$$

donde $\nabla^2 U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$ es el laplaciano de U.

Por otra parte, la cantidad total de calor H en T es

$$H = \iiint_T \sigma \rho U\, dx\, dy\, dz$$

donde la constante σ es el calor específico del material del cuerpo y ρ es la densidad (= masa por unidad de volumen) del material. Por tanto, la rapidez con que disminuye H es

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = -\iiint_T \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t}\, dx\, dy\, dz$$

y debe ser igual a la cantidad anterior del calor que sale; así, por (6) se tiene

$$-\iiint_T \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t}\, dx\, dy\, dz = -K \iiint_T \nabla^2 U\, dx\, dy\, dz$$

o

$$\iiint_T \left(\sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} - K \nabla^2 U \right) dx\, dy\, dz = 0.$$

Puesto que esto es válido para cualquier región T del cuerpo, el integrando (si es continuo) debe ser cero en todas partes; es decir,

$$(7) \qquad \boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \nabla^2 U} \qquad c^2 = \frac{K}{\sigma \rho},$$

donde c^2 se denomina la *difusividad térmica* del material. Esta ecuación diferencial parcial se llama la **ecuación del calor**; es fundamental en la conducción de calor. En el capítulo 11 se considerarán los métodos para resolver problemas de conducción de calor.

Si el flujo de calor no depende del tiempo t (***"flujo de estado estacionario"***), entonces $\partial U/\partial t = 0$ y la ecuación del calor (7) se reduce a la ecuación de Laplace, $\nabla^2 U = 0$; ver más adelante. ∎

Teoría del potencial. Funciones armónicas

La teoría de las soluciones de la ecuación de Laplace

$$(8) \qquad \boxed{\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0}$$

se llama **teoría del potencial**. Una solución de (8) que tiene derivadas parciales de segundo orden ***continuas*** se denomina **función armónica.**[14] En los capítulos 11 y 17 se considerarán los detalles de la teoría del potencial. Entre tanto, se demuestra que el teorema de la divergencia es de suma utilidad en la teoría del potencial.

EJEMPLO 4 Una propiedad básica de las soluciones de la ecuación de Laplace

Considérese la fórmula del teorema de la divergencia:

$$(8^*) \qquad \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA.$$

Suponer que $\mathbf{F}$ es el gradiente de una función escalar, por ejemplo, $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$. Entonces [ver (3) de la sección 8.10]

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} (\operatorname{grad} f) = \nabla^2 f.$$

Además,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} f,$$

y por (6) de la sección 8.9 se observa que el segundo miembro es la derivada direccional de f en la dirección normal exterior de S. Si esta derivada se denota por $\partial f/\partial n$, la fórmula (8*) queda

$$(9) \qquad \boxed{\iiint_T \nabla^2 f \, dV = \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} \, dA.}$$

Evidentemente, esta expresión es el análogo tridimensional de la fórmula (9) de la sección 9.4.

Al tomar en consideración los supuestos bajo los cuales el teorema de la divergencia es válido, a partir de (9) se obtiene de inmediato el siguiente resultado.

[14] Este requisito de continuidad no deberá omitirse en la definición de función armónica, como se hace en algunos libros antiguos.

Teorema 1 (Una propiedad básica de las funciones armónicas)

Sea $f(x, y, z)$ una función armónica en algún dominio D. Entonces la integral de la derivada normal de la función f sobre cualquier superficie orientable, cerrada y suave por secciones[15] *S en D, la totalidad de cuyo interior pertenece a D, es cero.* ▮

EJEMPLO 5 Teoremas de Green

Sean f y g funciones escalares tales que $\mathbf{F} = f \operatorname{grad} g$ satisface los supuestos del teorema de la divergencia en alguna región T. Entonces, por el problema 23 de los problemas de la sección 8.10,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} (f \operatorname{grad} g) = f\nabla^2 g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g.$$

Además, puesto que f es una función escalar,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot (f \operatorname{grad} g) = f(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} g).$$

La expresión $\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} g$ es la derivada direccional de g en la dirección del vector normal exterior $\mathbf{n}$ de la superficie S en el teorema de la divergencia. Si esta derivada se denota por $\partial g/\partial n$, la fórmula del teorema de la divergencia se convierte en la **"primera fórmula de Green"**

$$\iiint_T (f\nabla^2 g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g)\, dV = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n}\, dA. \tag{10}$$

La fórmula (10), junto con los supuestos, se conoce como *primera forma del teorema de Green.*

Al intercambiar f y g se obtiene una fórmula similar. Al restar esta fórmula de (10) se obtiene

$$\iiint_T (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV = \iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}\right) dA. \tag{11}$$

Esta expresión se conoce como la **segunda fórmula de Green** o (junto con los supuestos) como *segunda forma del teorema de Green.* ▮

EJEMPLO 6 Unicidad de las soluciones de la ecuación de Laplace

Suponer que f satisface los supuestos del teorema 1 y que es cero en todo punto de una superficie orientable cerrada y suave por secciones S en D, la totalidad de cuyo interior T pertenece a D. Entonces, al hacer $g = f$ en (10), se obtiene

$$\iiint_T \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} f\, dV = \iiint_T |\operatorname{grad} f|^2\, dV = 0.$$

Puesto que por hipótesis $|\operatorname{grad} f|$ es continuo en T y sobre S y es no negativo, debe ser cero en todo punto de T. Por tanto, $f_x = f_y = f_z = 0$ y f es constante en T y, debido a la continuidad, es igual a su valor 0 sobre S. Con lo anterior se demuestra ▮

[15] Ver la sección 9.5.

Teorema 2 (Funciones armónicas)

Si una función $f(x, y, z)$ es armónica en algún dominio D y es cero en todo punto de una superficie orientable cerrada y suave por secciones S en D, la totalidad de cuyo interior T pertenece a D, entonces f forma una identidad con cero en T.

Este teorema tiene una importante consecuencia. Sean f_1 y f_2 funciones que satisfacen los supuestos del teorema 1 y asumen los mismos valores en S. Entonces su diferencia $f_1 - f_2$ satisface dichos supuestos y tiene el valor 0 en todo punto sobre S. Por tanto, el teorema 2 implica que $f_1 - f_2 = 0$ en la totalidad de T y se llega al resultado siguiente.

Teorema 3 (Teorema de unicidad para la ecuación de Laplace)

Sea T una región que satisface los supuestos del teorema de la divergencia y sea $f(x, y, z)$ una función armónica en un dominio D que contiene a T y a su superficie frontera S. Entonces f se encuentra determinada de manera única en T por sus valores sobre S

Al problema de determinar una solución u de una ecuación diferencial parcial en una región T tal que u asume valores dados sobre la superficie frontera S de T se llama el **problema de Dirichlet**[16]. En consecuencia, el teorema 3 se reformula de la siguiente manera.

Teorema 3* (Teorema de unicidad para el problema de Dirichlet)

Si los supuestos del teorema 3 se satisfacen y el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace tiene una solución en T, entonces esta solución es única.

Estos teoremas demuestran la importancia del teorema de Gauss en la teoría del potencial. ∎

Problemas de la sección 9.8

1. Comprobar el teorema 1 para $f = 2z^2 - x^2 - y^2$ y S la superficie del paralelepípedo $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 2$, $0 \leqq z \leqq 4$.
2. Comprobar el teorema 1 para $f = x^2 - y^2$ y la superficie del cilindro $x^2 + y^2 \leqq 4$, $0 \leqq z \leqq 1$.

Sean f y g funciones armónicas en algún dominio D que contiene una región T y su superficie frontera S tal que T satisface los supuestos del teorema de la divergencia. Demostrar que entonces:

3. $\displaystyle\iint_S g \frac{\partial g}{\partial n}\, dA = \iiint_T |\text{grad } g|^2\, dV.$
4. Si $\partial g/\partial n = 0$ sobre S, entonces g es constante en T.
5. $\displaystyle\iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA = 0.$
6. Si $\partial f / \partial n = \partial g / \partial n$ sobre S, entonces $f = g + c$ en T, donde c es una constante.

[16] PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805-1859), matemático alemán, estudió en París bajo la tutela de Cauchy y otros y fue el sucesor de Gauss en Göttingen en 1855. Surgió a la fama por sus importantes investigaciones sobre la serie de Fourier (conoció personalmente a Fourier) y en la teoría de números.

7. **(Laplaciano)** Demostrar que el laplaciano puede representarse independientemente de todos los sistemas de coordenadas en la forma

$$\nabla^2 f = \lim_{d(T)\to 0} \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} \frac{\partial f}{\partial n}\, dA$$

donde $d(T)$ es la distancia máxima de los puntos de una región T acotada por $S(T)$ al punto en el que se evalúa el laplaciano y $V(T)$ es el volumen de T. *Sugerencia.* Introducir $\mathbf{F}$ = grad f en (3) y usar (6), sección 8.9, con $\mathbf{b} = \mathbf{n}$, el vector normal unitario exterior de S.

8. **(Volumen)** Demostrar que una región T con supérficie frontera S tiene el volumen

$$V = \frac{1}{3}\iint_S r \cos\phi \, dA$$

donde r es la distancia de un punto variable P: (x, y, z) sobre S al origen O y ø es el ángulo entre la recta dirigida OP y la normal exterior de S en P. *Sugerencia.* Usar (2), sección 9.7, con $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

9. Encontrar el volumen de una esfera de radio a por medio de la fórmula del problema 8.

10. **(Volumen)** Demostrar que una región T con superficie frontera S tiene el volumen

$$V = \iint_S x\, dy\, dz$$

$$= \iint_S y\, dz\, dx = \iint_S z\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{3}\iint_S (x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy).$$

9.9 TEOREMA DE STOKES

Después de ver la enorme utilidad del teorema de Gauss (secciones 9.7, 9.8), se discute ahora el segundo teorema "grande" de este capítulo, el *teorema de Stokes*, mediante el cual se transforman integrales de línea en integrales de superficie y viceversa. En consecuencia, este teorema es una generalización del teorema de Green de la sección 9.4. En este teorema se usa el rotacional.

$$\text{(1)} \qquad \text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(ver la sección 8.11).}$$

Teorema de Stokes[17]
(Transformación entre integrales de superficie e integrales de línea)

Sea S una superficie orientada y suave por secciones[18] *en el espacio y sea la frontera de S una curva cerrada simple y suave por secciones*[18] *C. Sea* $\mathbf{F}(x, y, z)$ *una función vectorial continua con primeras derivadas parciales continuas en un dominio del espacio que contiene a S. Entonces*

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\, dA = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'(s)\, ds \tag{2}$$

donde **n** *es un vector unitario normal a S y, dependiendo de* **n**, *la integración alrededor de C se toma en el sentido indicado en la figura 225; además,* $\mathbf{r}' = d\mathbf{r}/ds$ *es el vector tangente unitario y s la longitud de arco de C.* (La demostración se presenta en la página 614).

Comentario. Por (3) de la sección 9.6, con rot **F** en lugar de **F**, se obtiene (2) en términos de componentes [ver (1)]

$$\iint_R \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) N_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) N_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) N_3\right] du\, dv$$
$$= \oint_{\bar{C}} (F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz) \tag{3}$$

donde R es la región con curva frontera $\bar{C}$ en el plano uv que corresponde a S representada por $\mathbf{r}(u, v)$ y $\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_3] = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$.

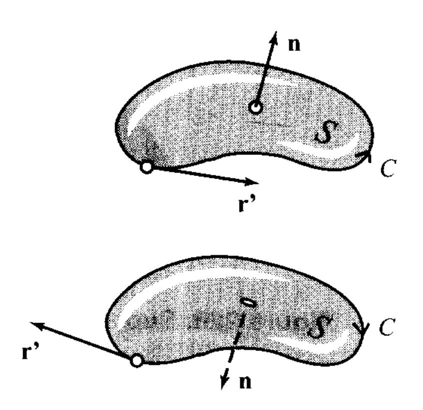


Figura 225. Teorema de Stokes.

[17] Sir GEORGE GABRIEL STOKES (1819-1903), matemático y físico irlandés, fue nombrado profesor en Cambridge en 1849. Se le conoce también por sus importantes aportaciones a la teoría de las series infinitas y de flujos viscosos (ecuaciones de Navier-Stokes), geodesia y óptica.

[18] "Suave por secciones" se define en las secciones 9.1 y 9.5.

EJEMPLO 1 Comprobación del teorema de Stokes

Antes de demostrar el teorema de Stokes, se intentará familiarizar al estudiante con él comprobándolo para

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

y S el paraboloide

$$z = f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2), \quad z \geqq 0$$

de la figura 226.

Solución. C: $\mathbf{r}(s) = \cos s\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} s\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}'(s) = -\operatorname{sen} s\,\mathbf{i} + \cos s\,\mathbf{j}$, de donde

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [(\operatorname{sen} s)(-\operatorname{sen} s) + 0 + 0]\, ds = -\pi.$$

Por otra parte, se considera ahora la integral sobre S en el primer miembro de (2), usando (3), sección 9.6, con rot $\mathbf{F}$ en lugar de $\mathbf{F}$ y $u = x$, $v = y$. Se necesita (comprobarlo)

$$\text{rot } \mathbf{F} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \qquad \mathbf{N} = -f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y a partir de estas expresiones calcular (rot $\mathbf{F}$) $\cdot$ $\mathbf{N} = -2x - 2y - 1$. Ahora S corresponde a $x^2 + y^2 \leqq 1$. Usando las coordenadas polares r, θ, dadas por $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, por (3), sección 9.6, se obtiene

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-2r\cos\theta - 2r\operatorname{sen}\theta - 1) r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} [\tfrac{2}{3}(-\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) - \tfrac{1}{2}]\, d\theta = -\pi.$$

Obsérvese que $\mathbf{N}$ es un vector normal superior de S (¿por qué?) y que C está orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, de conformidad con los requisitos del teorema. ∎

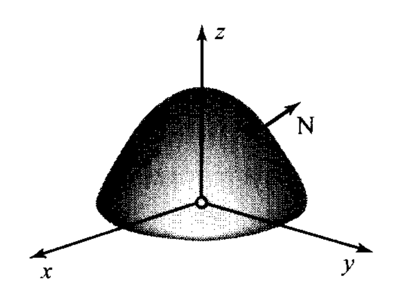


Figura 226. Superficie S en el ejemplo 1.

Demostración del teorema de Stokes. Evidentemente, (2) es válida si las integrales de cada componente en ambos miembros de (3) son iguales, es decir,

$$(4) \qquad \iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} N_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y} N_3\right) du\, dv = \oint_{\bar{C}} F_1\, dx$$

(5) $$\iint_R \left(-\frac{\partial F_2}{\partial z} N_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x} N_3\right) du\, dv = \oint_{\bar{C}} F_2\, dy$$

(6) $$\iint_R \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} N_1 - \frac{\partial F_3}{\partial x} N_2\right) du\, dv = \oint_{\bar{C}} F_3\, dz.$$

Se demuestra esto primero para una superficie S que puede representarse simultáneamente en las formas

(7) (a) $z = f(x, y)$, (b) $y = g(x, z)$, (c) $x = h(y, z)$.

Se demuestra (4), usando (7a). Al hacer $u = x$, $v = y$, por (7a) se tiene

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f\mathbf{k}$$

y en (3), sección 9.6, por cálculos directos

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Obsérvese que $\mathbf{N}$ es un vector normal *superior* de S, ya que tiene una componente *z positiva*. Asimismo, $R = S^*$, la proyección de S en el plano xy, con curva frontera $\bar{C} = C^*$ (figura 227). Por tanto, el primer miembro de (4) es

(8) $$\iint_{S^*} \left[\frac{\partial F_1}{\partial z}(-f_y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\, dy.$$

Se considera ahora el segundo miembro de (4). Se transforma esta integral de línea sobre $\bar{C} = C^*$ en una integral doble sobre S^* aplicando el teorema de Green [fórmula (1) de la sección 9.4 con $F_2 = 0$]. Se obtiene así

$$\oint_{C^*} F_1\, dx = \iint_{S^*} -\frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\, dy.$$

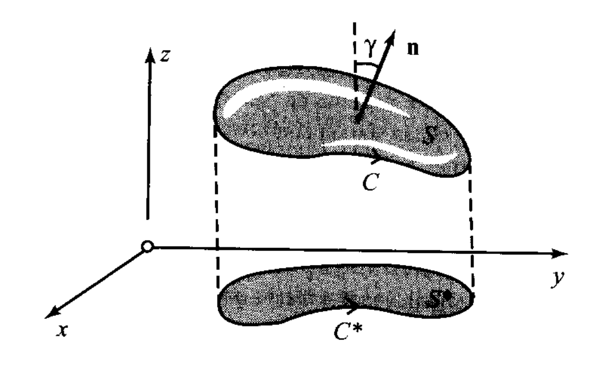


Figura 227. Demostración del teorema de Stokes.

Aquí, $F_1 = F_1[x, y, f(x, y)]$. En consecuencia, por la regla de la cadena (ver también el problema 10 de la sección 8.8),

$$-\frac{\partial F_1[x, y, f(x, y)]}{\partial y} = -\frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad [z = f(x, y)].$$

Se observa que el segundo miembro de esta expresión es igual al integrando en (8). Se demuestra así (4). Las relaciones (5) y (6) se establecen de la misma manera si se usan (7b) y (7c), respectivamente. Por adición se obtiene (3). Se demuestra así el teorema de Stokes para una superficie que puede representarse simultáneamente en las formas (7a), (7b), (7c).

Como en la demostración del teorema de la divergencia, el resultado obtenido puede ampliarse de inmediato a una superficie S que puede descomponerse en un número finito de trozos, cada uno de los cuales es de la clase que acaba de considerarse. Esto abarca la mayoría de los casos de interés práctico. La demostración en el caso de la superficie S más general que satisface los supuestos del teorema requeriría de un proceso de límite; se trata de una situación similar al teorema de Green de la sección 9.4.

EJEMPLO 2 Teorema de Green en el plano como un caso especial del teorema de Stokes

Sea $F = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ una función vectorial que es diferenciable de manera continua en un dominio del plano xy que contiene una región cerrada, acotada y simplemente conexa S cuya frontera C es una curva cerrada simple y suave por secciones. Entonces, de acuerdo con (1),

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Por tanto, ahora la fórmula del teorema de Stokes adopta la forma

$$\iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \oint_C (F_1\, dx + F_2\, dy).$$

Se demuestra así que el teorema de Green en el plano (sección 9.4) es un caso especial del teorema de Stokes. ∎

EJEMPLO 3 Evaluación de una integral de línea por el teorema de Stokes

Evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'\, ds$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $z = -3$, orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj si una persona la viera parada en el origen y, con respecto a coordenadas cartesianas derechas,

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xz^3\mathbf{j} - zy^3\mathbf{k}.$$

Solución. Como una superficie S acotada por C, puede tomarse el disco circular plano $x^2 + y^2 \leqq 4$ en el plano $z = -3$. Entonces $\mathbf{n}$ del teorema de Stokes apunta en la dirección z positiva; por tanto, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. En consecuencia, (rot $\mathbf{F}$) · $\mathbf{n}$ es tan sólo la componente de rot $\mathbf{F}$ en la dirección z positiva. Puesto que $\mathbf{F}$ con $z = -3$ tiene las componentes $F_1 = y$, $F_2 = -27x$, $F_3 = 3y^3$, se obtiene

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -27 - 1 = -28.$$

Por lo tanto, la integral sobre S en el teorema de Stokes es igual a -28 veces el área 4π del disco S. Esto da como resultado la respuesta $-28 \cdot 4\pi = -112\pi \approx -352$.

El estudiante puede confirmar el resultado por cálculos directos, los cuales implican un poco más de trabajo. ∎

EJEMPLO 4 Interpretación física del rotacional. Circulación

Sea S_r un disco circular de radio r y centro P acotado por la circunferencia C_r (figura 228) y sea $\mathbf{F}(Q) \equiv \mathbf{F}(x, y, z)$ una función vectorial diferenciable de manera continua en un dominio que contiene a S_r. Entonces por el teorema de Stokes y el teorema del valor medio para integrales de superficie,

$$\oint_{C_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' \, ds = \iint_{S_r} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dA = (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}(P^*) A_r$$

donde A_r es el área de S_r y P^* es un punto adecuado de S_r. Esto puede escribirse en la forma

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}(P^*) = \frac{1}{A_r} \oint_{C_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' \, ds.$$

En el caso del movimiento de un fluido con vector velocidad $\mathbf{F} = \mathbf{v}$, la integral

$$\oint_{C_r} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}' \, ds$$

se llama la **circulación** del flujo alrededor de C_r; mide el grado en que el movimiento de fluido correspondiente es una rotación alrededor de la circunferencia C_r. Si ahora se hace que r tienda a cero, se encuentra

(9) $$(\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}(P) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{A_r} \oint_{C} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}' \, ds;$$

es decir, la componente del rotacional en la dirección normal positiva puede considerarse como la **circulación específica** (circulación por unidad de área) del flujo en la superficie en el punto correspondiente. ∎

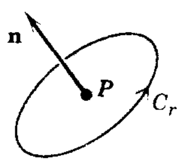


Figura 228. Ejemplo 4.

EJEMPLO 5 Trabajo realizado en el desplazamiento alrededor de una curva cerrada

Encontrar el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = 2xy^3 \operatorname{sen} z\, \mathbf{i} + 3x^2y^2 \operatorname{sen} z\, \mathbf{j} + x^2y^3 \cos z\, \mathbf{k}$ en el desplazamiento alrededor de la curva de intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Solución. Este trabajo está dado por la integral de línea en el teorema de Stokes. Ahora $\mathbf{F} = \text{grad} f$, donde $f = x^2y^3 \operatorname{sen} z$ y rot grad $f = \mathbf{0}$ [ver (3) en la sección 8.11], por lo que $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = 0$ y el trabajo es 0 por el teorema de Stokes. ∎

El teorema de Stokes aplicado a la independencia de la trayectoria. Se ha visto y subrayado en la sección 9.2 que el valor de una integral de línea por lo general no depende tan sólo de la función que va a integrarse y de los dos puntos extremos A y B de la trayectoria de integración C, sino también de la elección particular de una

trayectoria de A a B. En el teorema 3 de la sección 9.2 se demostró que si una integral de línea

$$(10) \qquad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz)$$

(con F_1, F_2, F_3 continuas y con primeras derivadas parciales continuas) es independiente de la trayectoria en un dominio D, entonces

$$(11) \qquad \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Se afirmó que el recíproco también es verdadero, es decir, si (11) es válida, entonces (10) es independiente de la trayectoria en D, siempre que D sea simplemente conexo (ver la sección 9.2).

En la demostración se necesita el teorema de Stokes y puede darse ahora como sigue. Sea C cualquier trayectoria cerrada simple en D. Puesto que D es simplemente conexo, puede encontrarse una superficie S en D limitada por C. Puede aplicarse el teorema de Stokes, obteniéndose

$$\oint_C (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'\,ds = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dA$$

para la dirección correcta sobre C y el vector normal $\mathbf{n}$ sobre S. Ahora bien, sin importar la elección de C, la integral sobre S es cero porque, por (11), su integrando forma una identidad con cero. A partir de este hecho y del teorema 2 de la sección 9.2, se sigue que la integral (10) es independiente de la trayectoria en D. Se completa así la demostración. ∎

Problemas de la sección 9.9

Evaluar $\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dA$ por integración directa, donde

1. $\mathbf{F} = 2z^2\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$, $\quad S$ el cuadrado $0 \leqq x \leqq 1, \; 0 \leqq y \leqq 1, \; z = 1$
2. $\mathbf{F} = 5 \cos y\,\mathbf{i} + \cosh z\,\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, $\quad S$ como en el problema 1
3. $\mathbf{F} = 2z^2\mathbf{i} + 8x\mathbf{j}$, $\quad S$ el rectángulo $0 \leqq x \leqq 1, \; 0 \leqq y \leqq 1, \; z = y$
4. $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} - x^3\mathbf{j}$, $\quad S$ el disco circular $x^2 + y^2 \leqq 1, \; z = 0$
5. $\mathbf{F} = -e^y\mathbf{i} + e^z\mathbf{j} + e^x\mathbf{k}$, $\quad S$ el cuadrángulo $0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1, z = x + y$
6. $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$, $\quad S$: $z^2 = x^2 + y^2, \; y \geqq 0, \; 0 \leqq z \leqq 2$
7. $\mathbf{F} = e^{2z}\mathbf{i} + e^z \operatorname{sen} y\,\mathbf{j} + e^z \cos y\,\mathbf{k}$, $\quad S$: $0 \leqq x \leqq 2, \; 0 \leqq y \leqq 1, \; z = y^2$
8. $\mathbf{F} = 2x \cos z\,\mathbf{k}$, $\quad S$: $x^2 + y^2 = 4, \; y \geqq 0, \; 0 \leqq z \leqq \pi/2$
9. Comprobar el teorema de Stokes para $\mathbf{F}$ y S del problema 1.
10. Comprobar el teorema de Stokes para $\mathbf{F}$ y S del problema 4.

Evaluar $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(s)\, ds$ (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj como la vería una persona parada en el origen) por el teorema de Stokes, donde, con respecto a coordenadas cartesianas derechas,

11. $\mathbf{F} = -3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, C la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1$
12. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xz^3\mathbf{j} - zy^3\mathbf{k}$, C la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, $z = b\ (> 0)$
13. $\mathbf{F} = -2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - x\mathbf{k}$, C la elipse $x^2 + y^2 = 1$, $z = y + 1$
14. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$, C como en el problema 13
15. $\mathbf{F} = xyz\mathbf{j}$, C la frontera del triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$
16. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, C como en el problema 15
17. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{k}$, C como en el problema 15
18. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, C la intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $z = y^2$
19. $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$, C la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$, $z = x + 3$

20. Evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'\, ds$, $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)^{-1}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, C: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, orientada en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Obsérvese que no puede aplicarse el teorema de Stokes. ¿Por qué?

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 9

1. Describir de memoria cómo puede evaluarse una integral de línea. ¿Cuáles eran los supuestos sobre la trayectoria de integración?
2. ¿De qué manera puede expresarse el trabajo realizado por una fuerza variable como una integral de línea?
3. ¿De qué manera puede transformarse una integral doble en una integral de línea?
4. Responder la misma pregunta del problema 3 para una integral de superficie.
5. ¿Qué se entiende por orientar una superficie S? ¿Cuántas posibilidades de hacerlo existen en un punto dado de S?
6. Explicar el papel de la orientación en las integrales de superficie.
7. ¿Qué es una superficie suave? ¿Una superficie suave por secciones? Dar ejemplos. ¿Por qué se necesitan estos conceptos?
8. ¿Por qué es importante la independencia de la trayectoria en las aplicaciones físicas?
9. Enunciar la definición de rotacional. Explicar su importancia en este capítulo.
10. ¿Cómo se usó el teorema de Green en el plano para demostrar el teorema de Stokes?
11. ¿Cómo se usó el teorema de Stokes en relación con la independencia de la trayectoria?
12. Enunciar de memoria el teorema de la divergencia y explicar una aplicación del mismo.
13. Las integrales de línea y de superficie tratadas se construyeron en términos de una función *vectorial* **F**, pero sus integrandos son en realidad funciones *escalares*. ¿Cómo se consiguió hacer esto? ¿Por qué se procedió de esta manera (que a primera vista parecería ser un rodeo)?
14. Enunciar la ecuación de Laplace. ¿En qué parte de la física es importante?
15. ¿Qué es una función armónica? ¿Qué hechos acerca de las funciones armónicas se descubrieron en este capítulo?

Evaluar $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$, para las $\mathbf{F}$ y C dadas, por el método que parezca el más adecuado (integración directa, uso de la exactitud o de los teoremas de Green o de Stokes). Recuérdese que si $\mathbf{F}$ es una fuerza, la integral da como resultado el trabajo realizado en un desplazamiento.

16. $\mathbf{F} = 2x^2\mathbf{i} - 4y^2\mathbf{j}$, C el segmento de recta de $(1, 1)$ a $(3, 3)$

17. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$, C: $y = 1 - x^2$ de $x = -1$ a $x = 1$

18. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + z^2\mathbf{j}$, C: $y = x^2$, $z = x$ de $(1, 1, 1)$ a $(2, 4, 2)$

19. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, C: $\mathbf{r} = \cosh t\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\,\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k}$, $0 \leqq t \leqq 1/2$

20. $\mathbf{F} = y \operatorname{sen} x\,\mathbf{i} + x \cos y\,\mathbf{j}$, C la frontera de $-1 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$

21. $\mathbf{F} = 5(z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k})$, C la elipse $25x^2 + y^2 = 25$, $z = 0$

22. $\mathbf{F} = e^{2y}(z^3\mathbf{i} + 2xz^3\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k})$, C: $x^2 + y^2 = 4$, $z = -x$

23. $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + (x^2 - 2yz)\mathbf{k}$, C: $x^2 + 9y^2 = 9$, $z = x^2$

24. $\mathbf{F} = (y - 3z)\mathbf{i} + (4y^3 + x)\mathbf{j} - 3x\mathbf{k}$, C: $\mathbf{r} = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leqq t \leqq \pi$

25. $\mathbf{F} = 2yz\mathbf{j} + (e^z + y^2)\mathbf{k}$, C: $y = x$, $z = x^2$ de $(0, 0, 0)$ to $(2, 2, 4)$

26. $\mathbf{F} = \cosh y\,\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, C: $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $0 \leqq t \leqq 1$

27. $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$, C: $x^2 + y^2 = 4$, $x + y + z = 0$

28. $\mathbf{F} = 4(z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k})$, C la frontera de $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $z = 1$

29. $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + e^{3y}\mathbf{j} - 3e^{-3z}\mathbf{k}$, C: $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x = z$

30. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + x^5\mathbf{k}$, C: $x^2 + y^2 = 1$, $z = x$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$

31. $\mathbf{F} = 3x^2e^{-3z}(\mathbf{i} - x\mathbf{k})$, C: $y = x^2$, $z = x^3$ de $(0, 0, 0)$ a $(2, 4, 8)$

32. $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, C como en el problema 31

33. $\mathbf{F} = \operatorname{sen} \pi x\,\mathbf{i} + z\mathbf{j}$, C la frontera del triángulo con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$

34. $\mathbf{F} = -y^2e^x\mathbf{i} + 4xy^3\mathbf{j}$, C como en el problema 33

35. $\mathbf{F} = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j} + \operatorname{senh} z\,\mathbf{k}$, C como en el problema 30

Evaluar las siguientes integrales dobles.

36. $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1} xy\,dx\,dy$

37. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} e^{x+y}\,dy\,dx$

38. $\int_{0}^{\pi/2}\int_{-1}^{1} x^2y^2\,dx\,dy$

39. $\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x} (1 - xy)\,dy\,dx$

40. $\int_{0}^{3}\int_{-y}^{y} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$

41. $\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} (x + y)\,dy\,dx$

Encontrar las coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$ del centro de gravedad de una masa de densidad $f(x, y)$ en una región R, donde

42. $f = 1$, R: $0 \leqq y \leqq 1 - x^2$

43. $f = xy$, R: $0 \leqq y \leqq x$, $0 \leqq x \leqq 1$

44. $f = 1$, R: $x^2 + y^2 \leqq a^2$, $y \geqq 0$

45. $f = x^2 + y^2$, R: $x^2 + y^2 \leqq a^2$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$

Representar las siguientes superficies en forma paramétrica $\mathbf{r}(u, v)$ y encontrar un vector normal.

46. $4x - 3y + z = 5$

47. $x^2 + y^2 = 9$

48. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

49. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

50. $x^2 - y^2 = 1$

51. $x^2 + 4y^2 - 4z = 0$

Evaluar $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA$, donde

52. $\mathbf{F} = 2x^2\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$, S: $z = 1 - x - y$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$
53. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$, S: $3x + 2y + z = 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$
54. $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$, S: $z = x^2 + y^2$, $z \leqq 4$
55. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + x^2y^2\mathbf{k}$, S: $z = e^{xy}$, $-1 \leqq x \leqq 1$, $-1 \leqq y \leqq 1$
56. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + e^{yz}\mathbf{k}$, S: $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leqq z \leqq h$
57. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} - z^4\mathbf{k}$, S: $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$
58. $\mathbf{F} = 3z^2x\mathbf{i} - (x^2 + 1)y\mathbf{j} + (x^2 - z^2)z\mathbf{k}$, S: $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$
59. $\mathbf{F} = \operatorname{sen}^2 x\, \mathbf{i} - y \operatorname{sen} 2x\, \mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$, S la superficie de $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$, $|z| \leqq 1$
60. $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} - (6xy + 4yz)\mathbf{j} + 2z(z - 1)\mathbf{k}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Resumen del capítulo 9

Cálculo integral vectorial. Teoremas sobre integrales

En el capítulo 8 se hizo la generalización del cálculo *diferencial* a vectores, es decir, a funciones vectoriales $\mathbf{v}(x, y, z)$ o $\mathbf{v}(t)$ y en el capítulo 9 se hizo la generalización del cálculo *integral* a las funciones vectoriales. Para ello se discutieron las *integrales de línea* (sección 9.1), las *integrales dobles* (sección 9.3), las *integrales de superficie* (sección 9.6) y las *integrales triples* (sección 9.7) así como los tres teoremas "grandes" para transformar estas integrales de una forma a otra, los teoremas de Green (sección 9.4), de Gauss (sección 9.7) y de Stokes (sección 9.9).

El análogo de la integral definida del cálculo elemental es la **integral de línea**

$$(1) \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz) = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$$

donde C: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ($a \leqq t \leqq b$) es una curva en el espacio (o en el plano). Ver la sección 9.1. En física, (1) puede representar el trabajo realizado por una fuerza (variable) en un desplazamiento. En la sección 9.1 también se discuten otros tipos de integrales de línea y sus aplicaciones.

Independencia de la trayectoria de una integral de línea en una región D significa que la integral de una función dada sobre cualquier trayectoria C con puntos extremos P y Q tiene el mismo valor para todas las trayectorias de P a Q que están en D; aquí P y Q son puntos fijos. Una integral (1) es independiente de la trayectoria en D si y sólo si la forma diferencial $F_1\, dx + F_2\, dy + F_1\, dz$ es exacta en D (sección 9.2). Asimismo, si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3]$, tiene primeras derivadas parciales continuas en un dominio *simplemente conexo*, entonces la integral (1) es independiente de la trayectoria en D (sección 9.2).

Las **integrales dobles** sobre una región R en el plano (sección 9.3) pueden transformarse en integrales de línea sobre la frontera C de R (y viceversa) por el **teorema de Green en el plano** (sección 9.4)

(2) $$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_C (F_1\, dx + F_2\, dy).$$

En la sección 9.4 se dan otras formas de esta expresión. Este teorema se necesita asimismo como herramienta esencial en la demostración del teorema de Stokes (ver más adelante) y es un caso especial de este último.

Las **integrales triples** (sección 9.7) tomadas sobre una región T en el espacio pueden transformarse en integrales de superficie sobre la superficie frontera S de T (y viceversa) por el **teorema de Gauss de la divergencia** (sección 9.7)

(3) $$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA$$

Entre otras cosas, este teorema implica las **fórmulas de Green** (sección 9.8)

(4) $$\iiint_T (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n}\, dA,$$

(5) $$\iiint_T (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV = \iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}\right) dA.$$

Las integrales de superficie sobre una superficie S con curva frontera C pueden transformarse en integrales de línea sobre C (y viceversa) por el **teorema de Stokes** (sección 9.9)

(6) $$\iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(s)\, ds.$$

Apéndice

1

Bibliografía

Bibliografía general

[1] Abramowitz, M. and I. A. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions*. 10th printing, with corrections. Washington, DC: National Bureau of Standards. (Also New York: Dover.)

[2] Cajori, F., *A History of Mathematics*. 3rd ed. New York: Chelsea.

[3] *CRC Handbook of Mathematical Sciences*. 6th ed. Boca Raton, FL: CRC Press.

[4] Courant, R. and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*. 2 vols. New York: Wiley-Interscience.

[5] Courant, R. and F. John, *Introduction to Calculus and Analysis*. 2 vols. New York: Wiley-Interscience.

[6] Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*. 3 vols. New York: McGraw-Hill, 1953, 1955.

[7] Hildebrand, F. B., *Advanced Calculus for Applications*. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[8] Itô, K. (ed.), *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*. 4 vols. 2nd ed. Cambridge, MA: MIT Press.

[9] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: Wiley.

[10] Magnus, W., F. Oberhettinger and R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. 3rd ed. New York: Springer.

[11] Sneddon, I. N. (ed.), *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*. Elmsford, NY: Pergamon.

[12] Thomas, G. B. and R. L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry*. 8th ed. Reading, MA: Addison-Wesley.

Parte A. Ecuaciones diferenciales ordinarias (capítulos 1-6)

Ver también **Parte E: Métodos numéricos**

[A1] Birkhoff, G. and G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations*. 4th ed. New York: Wiley.

[A2] Cesari, L., *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*. 3rd ed. New York: Springer. 1971.

[A3] Churchill, R. V., *Operational Mathematics*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill.

[A4] Coddington, E. A. and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill.
[A5] Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*. 2 vols. New York: McGraw-Hill.
[A6] Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover.
[A7] Kamke, E., *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 3rd ed. New York: Chelsea. 1948. (This extremely useful book contains a systematic list of more than 1500 differential equations and their solutions.)
[A8] Oberhettinger, F. and L. Badii, *Tables of Laplace Transforms*. New York: Springer.
[A9] Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 2nd ed. Cambridge: University Press.
[A10] Widder, D. V., *The Laplace Transform*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Parte B. Álgebra lineal, cálculo vectorial (capítulos 7-9)

Ver también **Parte E: Métodos numéricos, para libros de álgebra lineal *numérica***

[B1] Bellman, R., *Introduction to Matrix Analysis*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill.
[B2] Gantmacher, F. R., *The Theory of Matrices*. 2 vols., 2nd ed. New York: Chelsea.
[B3] Gohberg, I., P. Lancaster and L. Rodman, *Invariant Subspaces of Matrices with Applications*. New York: Wiley.
[B4] Herstein, I. N., *Topics in Algebra*. 2nd ed. Lexington, MA: Xerox College Publishing.
[B5] Kreyszig, E., *Differential Geometry*. Mineola, NY: Dover.
[B6] Lang, S., *Linear Algebra*. 3rd ed. New York: Springer.
[B7] MacDuffee, C. C., *The Theory of Matrices*. New York: Chelsea.
[B8] Nef, W., *Linear Algebra*. 2nd ed. New York: Dover.
[B9] Wilkinson, J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford: Clarendon,
[B10] Wilkinson, J. H. and C. Reinsch, *Linear Algebra*. 2nd ed. New York: Springer.

Parte C. Análisis de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales (capítulos 10, 11)

Ver también **Parte E: Métodos numéricos, para libros de métodos *numéricos* de ecuaciones diferenciales parciales**

[C1] Carslaw, H. S. and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. Oxford: Clarendon.
[C2] Churchill, R. V. and J. W. Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems*. 4th ed. New York: McGraw-Hill.
[C3] Epstein, B., *Partial Differential Equations*. Malabar, FL: Krieger.
[C4] Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*. 2 vols. New York: McGraw-Hill.

[C5] Gilbarg, D. and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2nd ed. New York: Springer.
[C6] Gustafson, K. E., *Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods*. New York: Wiley.
[C7] John, F., *Partial Differential Equations*. 4th ed. New York: Springer.
[C8] Sneddon, I. N., *Elements of Partial Differential Equations*. New York: McGraw-Hill.
[C9] Sommerfeld, A., *Partial Differential Equations in Physics*. New York: Academic Press.
[C10] Szegö, G., *Orthogonal Polynomials*. 4th ed. New York: American Mathematical Society.
[C11] Tolstov, G. P., *Fourier Series*. New York: Dover.
[C12] Widder, D. V., *The Heat Equation*. New York: Academic Press.
[C13] Zauderer, E., *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. 2nd ed. New York: Wiley.
[C14] Zygmund, A., *Trigonometric Series*. 2nd ed., reprinted with corrections. Cambridge: University Press.

Parte D. Análisis complejo (capítulos 12-17)

[D1] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill.
[D2] Ahlfors, L. V. and L. Sario, *Riemann Surfaces*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
[D3] Bieberbach, L., *Conformal Mapping*. New York: Chelsea.
[D4] Henrici, P., *Applied and Computational Complex Analysis*. 3 vols. New York: Wiley.
[D5] Hille, E., *Analytic Function Theory*. 2 vols. 2nd ed. New York: Chelsea.
[D6] Knopp, K., *Theory of Functions*. 2 parts. New York: Dover.
[D7] Knopp, K., *Elements of the Theory of Functions*. New York: Dover.
[D8] Rothe, R., F. Ollendorf and K. Pohlhausen, *Theory of Functions as Applied to Engineering Problems*. New York: Dover.
[D9] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill.
[D10] Titchmarsh, E. C., *The Theory of Functions*. 2nd ed. London: Oxford University Press.
[D11] Weyl, H., *The Concept of a Riemann Surface*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Parte E. Métodos numéricos (capítulos 18-20)

[E1] Aho, A. V., J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Reading, MA: Addison-Wesley.
[E2] Collatz, L., *The Numerical Treatment of Differential Equations*. 3rd ed. New York: Springer.
[E3] Dahlquist, G. and Å. Björck, *Numerical Methods*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
[E4] Davis, P. and P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*. 2nd ed. New York: Academic Press.
[E5] DeBoor, C., *A Practical Guide to Splines*. New York: Springer. printed 1991.)
[E6] Dongerra, J. J. et al., *LINPACK Users Guide*. Philadelphia: SIAM Publications.

[E7] Dongerra, J. J. et al., *Solving Linear Systems on Vector and Shared Memory Computers*. Philadelphia: SIAM Publications.

EISPACK, see [E19].
EISPACK 2, see [E9].

[E8] Forsythe, G. E. and W. R. Wasow, *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*. New York: Wiley.
[E9] Garbow, B. S. et al., *Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension*. New York: Springer.
[E10] Golub, G. H. and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*. 2nd ed. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
[E11] Hildebrand, F. B., *Introduction to Numerical Analysis*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill.
[E12] IMSL (International Mathematical and Statistical Libraries), *FORTRAN Subroutines for Mathematics and Statistics. User's Manuals, Version 2.0*. 6 vols. Houston, TX: IMSL.
[E13] Isaacson, E. and H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*. New York: Wiley.
[E14] Knuth, D. E., *The Art of Computer Programming*. 3 vols. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley.
[E15] Lambert, J. D., *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*. New York: Wiley.

LINPACK, see [E6].

[E16] Ostrowski, A., *Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces*. 3rd ed. New York: Academic Press.
[E17] Prenter, P. M., *Splines and Variational Methods*. New York: Wiley, 1989.
[E18] Press, W. H. et al., *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge: University Press.
[E19] Smith, B. T. et al., *Matrix Eigensystems Routines-EISPACK Guide*. 2nd ed. New York: Springer.
[E20] Smith, G. D., *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. 3rd ed. London: Oxford University Press.
[E21] Stetter, H. J., *Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations*. New York: Springer.
[E22] Stewart, G. W., *Introduction to Matrix Computations*. New York: Academic Press.
[E23] Strang, G. and G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
[E24] Todd, J. (ed.), *Survey of Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill.
[E25] Todd, J., *Basic Numerical Mathematics*. 2 vols. New York: Academic Press.

[E26] Wilkinson, J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford: Clarendon. 1965.
[E27] Wilkinson, J. H. and C. Reinsch, *Linear Algebra*. New York: Springer.

Parte F. Optimización, gráficas (capítulos 21, 22)

[F1] Berge, C., *Graphs*. 3rd ed. New York: North-Holland.
[F2] Bondy, J. A. and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*. New York: North-Holland.
[F3] Christofides, N. et al. (eds.), *Combinatorial Optimization*. New York: Wiley.

[F4] Chvátal, V., *Linear Programming*. San Francisco: Freeman.
[F5] Cook, W. J., W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank and A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*. New York: Wiley.
[F6] Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*. 2nd ed. Princeton, NJ: Princeton University Press.
[F7] Dixon, L. C. W., *Nonlinear Optimization*. London: English Universities Press.
[F8] Fletcher, R., *Practical Methods of Optimization*. 2nd ed. New York: Wiley.
[F9] Ford, L. R., Jr., and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
[F10] Gass, S. I., *Linear Programming, Methods and Applications*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill.
[F11] Gondran, M. and M. Minoux, *Graphs and Algorithms*. New York: Wiley.
[F12] Gotlieb, C. C. and L. R. Gotlieb, *Data Types and Structures*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
[F13] Harari, F., *Graph Theory*. Reading, MA: Addison-Wesley.
[F14] Papadimitriou, C. H. and K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Parte G. Probabilidad y estadística (capítulos 23, 24)

[G1] Anderson, T. W., *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. 2nd ed. New York: Wiley.
[G2] Cochran, W. G., *Sampling Techniques*. 3rd ed. New York: Wiley.
[G3] Cramér, H., *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton: Princeton University Press.
[G4] David, H. A., *Order Statistics*. 2nd ed. New York: Wiley.
[G5] Dodge, H. F. and H. G. Romig, *Sampling Inspection Tables*. 2nd ed. New York: Wiley.
[G6] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. I. 3rd ed. New York: Wiley.
[G7] Gibbons, J. D., *Nonparametric Statistical Inference*. 2nd ed. New York: Dekker.
[G8] Hooke, R., *How to Tell the Liars from the Statisticians*. New York: Dekker.
[G9] Huber, P. J., *Robust Statistics*. New York: Wiley.
[G10] IMSL, *FORTRAN Subroutines for Mathematics and Statistics. User's Manuals, Verson 2.0*. 6 vols. Houston, TX: IMSL.
[G11] Kendall, M. and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*. 3 vols. 4th ed. New York: Macmillan. (Vol. 3 coauthored by K. Ord.) (*See also* [G16].)
[G12] Kreyszig, E., *Introductory Mathematical Statistics. Principles and Methods*. New York: Wiley.
[G13] Maindonald, J. H., *Statistical Computation*. New York: Wiley.
[G14] Pearson, E. S. and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*. Vol. I. 3rd ed. Cambridge: University Press.
[G15] Rand Corporation, *A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates*. Glencoe, IL: Free Press.
[G16] Stuart, A. and J. K. Orth, *Kendall's Advanced Theory of Statistics*. Vols. 1, 2. 5th ed. Kent, U.K.: Arnold.

Apéndice



Respuestas a los problemas impares

Problemas de la sección 1.1, página 30

1. De primer orden. **3.** De primer orden. **5.** De primer orden.

7. $-\frac{1}{2}e^{-2x} + c$ **9.** $-2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x + c$ **11.** $1.5e^{-x} + 1$

13. $3x^2$ **15.** $-2 \operatorname{sen} x$ **17.** $y' = 2y/x$

19. $y' = y^2 + 1$

23. $y'' = k$, $y = \frac{1}{2}kt^2 + 5t$, $y(40) = 800k + 200 = 1800$, $k = 2$, $y'(40) = 85$ m/sec $= 190$ mi/hr

25. (a) $3e^x$, (b) $y(2) = ce^2 = 100$, $y(0) = c = 13.53$.

27. $y = 5.3 \exp(0.030t) = 32$ (1860), 78 (1890), donde los otros valores son demasiado grandes. Un mejor modelo es la "fórmula logística" de la sección 1.7.

29. Aproximadamente 1600 años.

Problemas de la sección 1.2, página 35

1. Si se supone que en el ejemplo 2 se olvidó c, se escribió arc tan $y = x$, esto se transformó en $y = \tan x$ y que a continuación se sumó una constante c, así, $y = \tan x + c$, que, para $c \neq 0$, no es una solución de $y' = 1 + y^2$.

3. $y = ce^{3x} - 1$ **5.** $y = \tan(x + \frac{1}{2}x^2 + c)$

7. $y = c(\operatorname{sen} 2x)^{1/2}$ **9.** $y = c \cosh x$

11. $\tan y = \frac{1}{2}e^{2x} + c$ **13.** $y = c \ln |x|$

15. $y = \operatorname{sen}(x + c)$ **17.** $y = -\sqrt{4 - x^2}$

19. $\cot y = \tanh x + 1$ **21.** $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

23. $v^2 = v_0^2 + 2g(t - t_0)$ **25.** $r = -0.3 \operatorname{sen} \theta$

27. $I = I_0 e^{-(R/L)t}$

Problemas de la sección 1.3, página 41

1. $-v_0$ **3.** 78.5% de y_0. **5.** 70.7%, 25% **7.** 10 horas.

9. $\Delta A = -kA\Delta x$ (A = cantidad de luz incidente, ΔA = luz absorbida, Δx = espesor, $-k$ = constante de proporcionalidad). Sea $\Delta x \to 0$. Entonces $A' = -kA$. Por tanto, $A(x) = A_0 e^{-kx}$ es la cantidad de luz en una capa gruesa a profundidad x de la superficie de incidencia.

11. 11.3, 19.2, 38.4. **15.** 1.21 metros.

17. $pV = c = constante$, la ley que Boyle(1662) y Mariotte (1676) descubrieron empíricamente.

19. $y(t) = 0.01e^{-0.275t}$

Problemas de la sección 1.4, página 45

1. $y = x(\ln|x| + c)$

3. $y^2 = x^2 - cx$

5. $y = x \tan(\ln|x| + c)$

7. $y = -x/(\ln|x| + c)$

9. $y^2 - 2xy - x^2 = c$

11. $y = x(\ln|x| - 7.4)$

13. $y = x(e^x - e)^{1/4}$

15. $y = x(x^2 + 5)^{1/2}$

17. $y = -x + \tan(x + c)$

19. $\text{sen}(x^2y^2) = ce^x$

21. $(y - x)^2 + 10y - 2x = c$

23. $u' = a + by' = a + bf(u),\ du/(a + bf(u)) = dx$

25. $y = ce^{2x} - 4x - 2$

27. $y = [(c - 15x)^{-1/3} - 2]/5$

29. $y = ax,\ y/x = a = const,\ y' = g(a) = const$

Problemas de la sección 1.5, página 49

1. $2x\,dx + 2y\,dy = 0$

3. $(b - y)\,dx - (x - a)\,dy = 0$

5. $e^{xy^2}(y^2\,dx + 2xy\,dy) = 0$

7. $2(y\,dx + x\,dy)/xy = 0$

9. $2(y - x + 1)(-dx + dy) = 0$

11. $xy = c$

13. $xy^3 = c$

15. $re^{-\theta} = c$

17. $\text{senh}\,x \cos y = c$

19. $x(x + e^y) = c$

21. No, $y = 1/(5 + \ln|x|)$

23. Sí $(x - 3)(y - 1) = 1$

25. Sí $e^{y/x} = e$ o $y = x$

27. No, $y = \sqrt{x^2 + 3x}$. Use $u = y/x$.

29. No, $y = \pi/\cosh x$

31. $y = cx$

33. $b = k,\ ax^2 + 2kxy + ly^2 = c$

35. $\partial f/\partial y = g'(x)h(y)$

37. $x^2 + y/x = c$

39. $y = cx^3$

Problemas de la sección 1.6, página 53

Comentario. Como los factores de integración no son únicos, las F que obtenga el lector pueden diferir de las aquí proporcionadas.

7. $x^2y = 2$

9. $xe^{xy} = 1$

11. $x^2y^3 - x^3y^2 = -2$

13. $y \cosh(x - y) = 3$

15. $F = e^{2x},\quad e^{2x}\cos \pi y = c$

17. $F = 1/xy,\quad x^2y^2e^x = c$

19. $F = e^{x^2},\quad (x + 2y)e^{x^2} = c$

21. $F = 1/(x + 1)(y + 1),\quad y + 1 = c(x + 1)$

23. $F = x^{a-1}y^{b-1},\quad x^ay^b = c$

25. $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x + (a/x)Q$

27. $(b/y)P + \partial P/\partial y = (a/x)Q + \partial Q/\partial x$

29. $\dfrac{b}{y}\left(\dfrac{2y}{x} - 3\right) + \dfrac{2}{x} = \dfrac{a}{x}\left(3 - \dfrac{2x}{y}\right) - \dfrac{2}{y}$. Ahora se igualan los términos en $1/x$ y en $1/y$, get $a = b = 2$. para obtener

Problemas de la sección 1.7, página 58

5. $y = ce^{4x} - 0.2$
7. $y = ce^{-2x} + 2e^x$
9. $y = ce^{4x} + x^2$
11. $y = cx^{-2} + 3x$
13. $y = (c + x)e^{-3x}$
15. $y = (c + 2e^{x^2})x^{-2}$
17. $y = cx^2 + x^2e^x$
19. $y = 2e^{-3x} + 4$
21. $y = 2e^{-x} + x^2 + 1$
23. $y = e^{-x^2} + 2$
25. $y = 1 - \cosh 2x$
27. $y = (0.7 + x)e^{-kx}$
37. $y = 1/(1 + ce^x)$
39. $\operatorname{sen} y = 2 + ce^{-x^2/2}$
41. $x = (c + y)e^y$
43. $y^{-3} = ce^x - 2x - 1$
45. $y^2 = cxe^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$
47. 327.5 min
49. $y' + 0.025y = 0$, $y = \tilde{c}e^{-0.025t}$ si $t \geqq 10$, $y(10) = \tilde{c}e^{-0.25} = 119.6$ por el ejemplo 2, $\tilde{c} = 153.6$, $y(t) = 0.01$ si $t = 385.6$ min.
51. $T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}$, donde T_1 es la temperatura del agua.
53. Con la ecuación (7) se obtiene $y' = Ay\,[1 - (B/A)]\,y >$ si $0 < y < A/B$ y $y' < 0$ si $y > A/B$.
55. Con la ecuación (7) se obtiene $y'' = Ay' - Byy' = 0$ si $A - 2By = 0$.
57. Se sustituye $y = w + v$, $y' = w' + v'$. Como v es una solución, queda $w' = -pw + g(w^2 + 2wv)$, una ecuación de Bernoulli.
59. $y' = y' + xy'' + (dg/ds)y''$, $y''(x + dg/ds) = 0$, etc.

Problemas de la sección 1.8, página 66

5. Decrece.
7. L = 0.348 henrios
11. $I(0) = -E_0(R^2 + \omega^2L^2)^{-1/2}$ sen $\delta = -E_0\omega L/(R^2 + \omega^2L^2)$
13. (a) $I(t) = ce^{-(R/L)t} + e^{-t}/(R - L)$, (b) $I(t) = (c + t/L)e^{-t}$
15. $I = I_1 = 1 - \frac{1}{2}e^{-t}$ if $0 \leqq t \leqq 3$, $I = I_2 = c_2e^{-(t-3)}$, $c_2 = I_2(3) = I_1(3) = 1 - \frac{1}{2}e^{-3} = 0.975$
21. $RQ' + Q/C = E_0$, $Q(t) = E_0C(1 - e^{-t/RC})$, $V(t) = Q(t)/C = 12(1 - e^{-0.05t})$
23. $Q = ce^{-2t} + 0.001(1 - 2e^{-t})$
25. $Q = \operatorname{sen} \pi t - 2\pi \cos \pi t$
27. Como la carga en el capacitor no puede cambiar abruptamente, debe tenerse J = *salto de* RI, y por tanto, *salto de* $I = J/R$.
29. $I = 1$ si $0 < t < a$ e $I = -ae^{a-t}$ si $t > a$.

Problemas de la sección 1.9, página 71

1. $xy' + y = 0$
3. $y' = 2y \cot 2x$
5. $xy' = 2y \ln |y|$
7. $xy' - 2y = x^3e^x$
9. $y' + y = x/y$
11. $y = c^*x$
13. $y = c^* - \frac{1}{2}x^2$
15. $y = c^*e^{-2x}$
17. $y = c^*e^{x^2}$
19. $y = c^*x^4$
21. $y = \frac{1}{2}\sqrt{c - x}$
23. $y = c^*x$
25. $x^2 - y^2 = c^*$
29. $e^x \operatorname{sen} y = c^*$

Problemas de la sección 1.10, página 76

1. $y = cx^2$
3. $y = ce^{-x^2/2}$
5. $x^2 + 9y^2 = c$
7. $v(t) = 5(1 - e^{-4t})/(1 + e^{-4t})$, $5(1 + \frac{1}{6}e^{-4t})/(1 - \frac{1}{6}e^{-4t})$
13. $y_1(1) = 2$, $y_2(1) = 2.5$, $y_3(1) = 2.667$

15. $y_n = 1 + 2\int_0^x y_{n-1}(t)\,dt$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1 + 2x$, $y_2 = 1 + 2x + (2x)^2/2!$, etc., $y = e^{2x}$

17. $y_0 = -1$, $y_n = -1 - x + x^{n+1}/(n+1)!$, $y = -1 - x$

19. $y_0 = 0$, $y_1 = x^2 - \frac{1}{4}x^4$, $y_2 = x^2 - \frac{1}{4 \cdot 6}x^6$, etc., $y = x^2$

Problemas de la sección 1.11, página 81

1. $y = cx^3$, c arbitrario. No; $f(x, y) = 3y/x$ no está definida cuando $x = 0$.
3. $y = (x-1)^2$, $y \equiv 0$.
5. $y = cx^2$, (a) $y(0) = k \neq 0$, (b) $y(0) = 0$, (c) $y(x_0) = y_0$, $x_0 \neq 0$. No, ya que $f(x, y) = 2y/x$ no está definida cuando $x = 0$.
7. El plano xy sin el origen.
9. Esto violaría la unicidad.
11. $\frac{1}{2}$, el mayor valor de $b/(1 + b^2)$, en donde $1 + b^2$ es el menor K.
13. $\alpha = \frac{1}{4}$, el mayor valor de $b/(b^2 + 4)$, en donde $b^2 + 4$ es el menor K. La solución $y = 2 \tan 2x$ existe para $|x| < \pi/4$.
15. $y = (2x-4)^2$, $y \equiv 0$. No sobre el eje x ($y = 0$).
17. Sí, con $M = 1$. No sobre el eje x ($y = 0$).
19. $f(x, y) = r(x) - p(x)y$, $\partial f/\partial y = p(x)$.

Capítulo 1 (cuestionario y problemas de repaso), página 82

11. $e^{2xy} + \operatorname{sen} y = c$
13. $y = ce^{x^2} - x^2$
15. $y = \tan(\frac{1}{2}x^2 + x + c)$
17. $y^2 = 1 + ce^{-x^2}$
19. $x^4 + x^3y^2 = c$
21. $e^{x^2} \tan y = c$
23. $y = x + x(c - x^2)^{-1/2}$
25. $u = y/x$, $\ln(x^2 + y^2) + 2 \arctan(y/x) = c$
27. $4x^2 + 9y^2 = 36$
29. $y = \frac{1}{2} - x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2}$
31. $y = \operatorname{sen} x + x^2$
33. $x^2 + xe^y = 2$
35. $x = \frac{1}{2}y^4 + 4y^2$
37. $y_n = 1 + 2\int_0^x t y_{n-1}(t)\,dt$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1 + x^2$, $y_2 = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4$, etc., $y = e^{x^2}$, $y_1(1) = 2$, $y_2(1) = 2.5$, $y_3(1) = 2.667$
39. $(y-1)^2 - (x-1)^2 = c^*$
41. 0.93%, 8.94%, 29.3%
43. 7.27 días, 11.5 días.
45. $y = cx^k$
47. 46 ohms.
49. $m\,dv/dt = mg(\operatorname{sen}\alpha - 0.2\cos\alpha) = 9.80(0.500 - 0.2 \cdot 0.866)m = 3.203m$, $v = 3.203t$, $s = 3.203t^2/2 = 10$. *Respuesta:* 8.00 metros/s
51. $dy/(y-a)(y-b) = k\,dx$. Ahora se usan fracciones parciales. *Respuesta.* $y(t) = (b - acf)/(1 - cf)$, en donde $f(t) = \exp(b-a)kt$
53. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$
55. $y' = y$, $y = ce^x$

Problemas de la sección 2.1, página 93

3. Puesto que $y'' + py' + qy = cr$
5. Puesto que $y'' + py' + qy = r - r$
7. $y = c_1x^3 + c_2$
9. $y = c_1 \cosh 2x + c_2$

11. $y = c_1^{-1} \ln |c_1 x + 1| + c_2$
15. $x = \frac{1}{4}e^{2y} + c_1 y + c_2$
17. $x = -\cos y + c_1 y + c_2$
19. $(y - 1)e^y = c_1 x + c_2$
21. $xy = 1$
23. $y = e^{3x} + e^{-3x} = 2 \cosh 3x$
25. $y = (4 - x)e^x$
27. $y = e^x - 2e^{3x}$
29. $y = (2 + \ln |x|)x^2$
31. Linealmente independientes.
33. Linealmente dependientes.
35. Linealmente dependientes.
37. Linealmente independientes.
39. Linealmente independientes.

Problemas de la sección 2.2, página 98

1. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$
3. $y = (c_1 + c_2 x)e^{-5x}$
5. $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$
7. $y'' + y' - 6y = 0$
9. $y'' + 2.5y' + y = 0$
11. $y'' - y = 0$
15. $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = \lambda^2 + a\lambda + b$. Ahora se compara
17. $y = 3e^{4x} - 2e^{-4x}$
19. $y = (2x - 4)e^{-3x}$
21. $y = 3e^{-0.2x} + 0.3e^{-2x}$
23. $y = e^{-0.5x}$
25. $y = e^{3x} + 3e^{-3x} = 4 \cosh 3x - 2 \operatorname{senh} 3x$

Problemas de la sección 2.3, página 102

1. $y = A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x$
3. $y = e^{-\alpha x}(A \cos x + B \operatorname{sen} x)$
5. $y = e^{-\alpha x}(A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x)$
7. I, $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-5x}$
9. II, $y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}$
11. I, $y = c_1 + c_2 e^{-2x}$
13. III, $e^{-0.3x}(A \cos x + B \operatorname{sen} x)$
15. III, $y = e^{-x}(A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x)$
17. $y = 2 \cos 3x - \operatorname{sen} 3x$
19. $y = (3 + 4x)e^{2x}$
21. $y = (3 + 2x)e^{-10x}$
23. $y = e^{0.5x} - e^{-x}$
25. $y = 5e^{4x}$
27. $y = e^{2x} - 2$
29. $y = -3e^x \cos x$

Problemas de la sección 2.4, página 104

1. $3x^2 + 20x,\ 0,\ (6 + \pi) \cos \pi x + (3 - 2\pi) \operatorname{sen} \pi x$
3. $0,\ -5e^{-4x},\ 0$
5. $y = e^{-x}(A \cos x + B \operatorname{sen} x)$
7. $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x/2}$
9. $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x/\pi}$
11. $y = (c_1 + c_2 x)e^{-0.6x}$
13. $y = -3e^{-2x} \operatorname{sen} x$
15. $y = e^x(\cos \pi x - \operatorname{sen} \pi x)$
17. $y = (1 - 3x)e^{-x/3}$
19. $y = (1 - x)e^{-x}$

Problemas de la sección 2.5, página 113

1. $y = (y_0^2 + v_0^2\omega_0^{-2})^{1/2} \cos (\omega_0 t - \arctan (v_0/y_0\omega_0))$
3. Es menor por $\sqrt{2}$, más alta, permanece sin cambio.
7. $1/k = 1/k_1 + 1/k_2,\ k = k_1k_2/(k_1 + k_2) = 21/10 = 2.1$
9. $mL\theta'' = -mg \operatorname{sen} \theta \approx -mg\theta$ (la componente tangencial de $w = mg$).
$\theta'' + \omega_0^2\theta = 0,\ \omega_0^2 = g/L$. *Respuesta.* $\sqrt{g/L}/2\pi$.

11. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{mL}{mg + (k_1 + k_2)L}}$

13. $\theta(t) = 0.2618 \cos 3.7t + 0.0472 \operatorname{sen} 3.7t$ [rad]

17. Si c_1 y c_2 tienen el mismo signo.

19. $y = [(v_0 + \alpha y_0)t + y_0]e^{-\alpha t}$

21. $y = c_2 e^{-v_0/c_2}/\alpha$, en donde $c_2 = v_0 + \alpha y_0$

25. $\omega^* = \omega_0[1 - (c^2/4mk)]^{1/2} \approx \omega_0[1 - \frac{1}{2}(c^2/4mk)]$

27. Las soluciones positivas de $\tan t = 1$, es decir, $\alpha/4$ (máx), $5\alpha/4$ (mín), etc.

29. 0.046 kg/s, a partir de $\exp(-20 \cdot 3c/2m) = \frac{1}{2}$.

Problemas de la sección 2.6, página 118

3. $y = c_1 + c_2 x^{-3}$
5. $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-4}$
7. $y = (c_1 + c_2 \ln x)/x$
9. $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-2.6}$
11. $y = A \cos(\ln x) + B \operatorname{sen}(\ln x)$
13. $y = c_1 x^{1.5} + c_2 x^{-2.5}$
15. $y = 4/\sqrt{x}$
17. $y = -x \cos(\ln x)$
19. $y = x^{0.1}$
21. $x = e^t$, $t = \ln x$; por la regla de la cadena, $y' \ \dot{y} t' = \dot{y}/x$, $y'' = \ddot{y}/x^2 - \ddot{y}/x^2 - \dot{y}/x^2$, por tanto, $\ddot{y} - \dot{y} + a\dot{y} + by = 0$.
25. $z - 2 = x$, $y = c_1(z - 2)^{-3} + c_2(z - 2)^{-1}$

Problemas de la sección 2.7, página 125

1. $W = (\lambda_2 - \lambda_1) \exp(\lambda_1 x + \lambda_2 x)$
3. $W = e^{-\alpha x}\omega$
5. $W = \nu x^{2\mu - 1}$
7. $y'' - 2y' + y = 0$, $W = e^{2x}$
9. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $W = e^{2x}$
11. $y'' + \pi^2 y = 0$, $W = \pi$
13. $xy'' - 2y' = 0$, $W = 3x^2$
15. $x^2 y'' - xy' + 0.75y = 0$, $W = x$
17. $W = 0$, como $y_1' = 0$, $y_2' = 0$ en tal x, por cálculo.
19. $z_1 = (y_1 + y_2)/2$, $z_2 = (y_1 - y_2)/2$, $\det[a_{jk}] = -1/2$
21. $y_2 = x^2 + x$
23. $y_2 = (1 - x)^{-2}$
25. $y_2 = x^{-1} \cos x$

Problemas de la sección 2.8, página 128

1. $c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{2x}$
3. $A \cos x + B \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$
5. $c_1 e^x + c_2 e^{-4x} + xe^x$
7. $c_1 x + c_2 x^2 - 5x \cos x$
9. $(c_1 + c_2 \ln x)x^{1/2} + \cos \frac{1}{2}x$
11. $(x + x^2)e^{3x}$
13. $(1 + 3x) \cos 2x$
15. $(1 - \operatorname{sen} x)e^x$
19. $A \cos x + B \operatorname{sen} x + e^x + x \operatorname{sen} x$

Problemas de la sección 2.9, página 132

1. $A \cos x + B \operatorname{sen} x + 3x^2 - 6$
3. $(c_1 + c_2 x)e^{-3x} + \operatorname{sen} 3x$
5. $c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$
7. $e^{-x}(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x) + x^2$
9. $c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \operatorname{sen} x$
11. $(c_1 + c_2 x)e^x + x^2 e^x$

13. $A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{6}x \operatorname{sen} 3x$
15. $(c_1 + \frac{1}{4}x)e^{2x} + (c_2 + \frac{1}{4}x)e^{-2x} - \frac{1}{4}x$
17. $e^{-x} - e^{2x} + xe^{2x}$
19. $4e^x + 2e^{-2x} + x^2 - 6$
21. $\cos x - 3 \operatorname{sen} x$
23. $3 \cos 2x - e^{-2x}$
25. $c_1e^{-2x} + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x$

Problemas de la sección 2.10, página 135

1. $(c_1 + c_2x + \frac{4}{35}x^{7/2})e^x$
3. $(c_1 + c_2x)e^x + 6e^x/x$
5. $(c_1 + c_2x - \ln|x|)e^{-2x}$
7. $(c_1 + c_2x + 4x^{7/2})e^x + x^2 + 4x + 6$
9. $(c_1 + c_2x - \operatorname{sen} x)e^x$
11. $(c_1 + c_2x + x^{-2})e^{2x}$
13. $(c_1 + c_2x + (2x)^{-1})e^x$
15. $c_1x^2 + c_2x^3 + x^{-4}$
17. $c_1x + c_2x^2 - 5x \cos x$
19. $c_1 + c_2x^2 + (x - 1)e^x$
21. $c_1x + c_2x^2 + 2x^{-2}$
23. $c_1x^2 + c_2x^3 + \frac{1}{42}x^{-4}$
25. $c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} + 8 \operatorname{sen} 2x - \cos 2x$

Problemas de la sección 2.11, página 142

1. $A \cos 2t + B \operatorname{sen} 2t + 5 \operatorname{sen} t$. Observar que la solución general correspondiente al movimiento libre no se extingue porque no hay amortiguamiento.
3. $4 \operatorname{sen} t - 12 \cos t$
5. $y = -0.4 \cos \frac{1}{2}t + 0.92 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t$
7. $-0.025 \cos 0.2t + 0.252 \operatorname{sen} 0.2t$
9. $c_1 \cos 5t + c_2 \operatorname{sen} 5t + 2 \operatorname{sen} t$
11. $e^{-t}(A \cos t + B \operatorname{sen} t) + 0.2 \cos t + 0.4 \operatorname{sen} t$
13. $e^{-t/4}[A \cos (\sqrt{31}/4)t + B \operatorname{sen} (\sqrt{31}/4)t] + 4 \cos t + 2 \operatorname{sen} t$
15. $y = A \cos t + B \operatorname{sen} t + (1 - \omega^2)^{-1} \cos \omega t$
17. $\cos 3t + \operatorname{sen} t$
19. $[y_0 - (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}] \cos \omega_0 t + (v_0/\omega_0) \operatorname{sen} \omega_0 t + (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1} \cos \omega t$
21. $y = 3te^{-t/2} + 2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t$
25. $y = (1 - \omega^2)^{-1}(\cos \omega t - \cos t)$

Problemas de la sección 2.12, página 147

3. $R > R_{crit} = 2\sqrt{L/C}$ en el caso I, etc.
5. $I = 0$
7. $I = (4 \cos t - 198 \operatorname{sen} t)/1961$
9. $I = e^{-t}(A \cos t + B \operatorname{sen} t) + \cos t + 2 \operatorname{sen} t$
11. $I = 5e^{-2t} \operatorname{sen} t$
13. $I = e^{-3t}(3 \operatorname{sen} 4t - 4 \cos 4t) + 4 \cos 5t$
15. $I = A \cos 5t + B \operatorname{sen} 5t + [275\omega/(25 - \omega^2)] \cos \omega t$
17. $I = A \cos 20t + B \operatorname{sen} 20t + 0.02t$
19. $I = 10(\cos t - \cos 2t)$
21. $I = 1 - \cos t$
23. $I = \operatorname{sen} t$ if $0 < t < 1$, $I = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} (t - 1)$ si $t > 1$
25. $I = \frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \operatorname{sen} t)$ si $0 < t < \pi$,
$I = -\frac{1}{2}(1 + e^{-\pi}) \cos t + \frac{1}{2}(3 - e^{-\pi}) \operatorname{sen} t$ si $t > \pi$

Problemas de la sección 2.13, página 151

1. $\frac{1}{73}(50 \operatorname{sen} 4t - 110 \cos 4t)$
3. $-0.9704 \cos 5t + 0.4621 \operatorname{sen} 5t$
5. $-0.1 \cos 2t + 0.2 \operatorname{sen} 2t$
9. $y_p = -4 \cos 2t$
11. $0.2 \cos t + 0.4 \operatorname{sen} t$
13. $8 \operatorname{sen} 2t - \cos 2t$
15. $-3 \cos 3t - 4 \operatorname{sen} 3t$

Capítulo 2 (cuestionario y problemas de repaso), página 152

17. $c_1e^x + c_2e^{-2x} + xe^x$
19. $(c_1 + c_2 \ln x)x^{0.7}$
21. $(c_1 + c_2x + x \ln x - x)e^{2x}$
23. $(c_1 + c_2x - \cos x)e^{-x}$
25. $c_1x^2 + c_2x^3 - x^2 \operatorname{sen} x$
27. $c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$
29. $(c_1 + c_2x - \ln x)e^{-2x}$
31. $0.3e^x + 2x^2$
33. $x^{-1/2} + 2x^{-3/2}$
35. $x - 4x^{-1} + 2x^3$
37. $3e^{-\alpha x} \cos \pi x$
39. $2e^{-x} \cos x$
41. $e^{-x} \cos x$
43. $\operatorname{sen} x$
45. $e^{x/2} - 2 \cos x + e^x$
47. $c_1c^{-1999.87t} + c_2e^{-0.125\,008t}$
49. $\frac{1}{73}(50 \operatorname{sen} 4t - 110 \cos 4t)$
51. $\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$
53. $e^{-t} \cos \sqrt{5}t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$
55. $c_1e^{-4x} + c_2e^{-2x} - 3 \cos 2x + \operatorname{sen} 2x$

Problemas de la sección 3.1, página 164

17. $W = 12$, $y = 6x - 8x^3$
19. $W = 2x^{-3}$, $y = 2 - 3x + 5x^{-1}$
21. Linealmente independientes.
23. Linealmente dependientes.
25. Linealmente independientes.
27. Linealmente independientes.
29. Linealmente dependientes.
31. Linealmente dependientes.
33. $I = -1, 1$. Linealmente dependientes sobre $[0, 1]$ o $[-1, 0]$, por ejemplo.
39. Se tendría $W = 0$ como tal punto.

Problemas de la sección 3.2, página 170

1. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$
3. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
5. $y^{IV} - 2y'' + y = 0$
7. $y^{IV} + 4y'' = 0$
9. $c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^x$
11. $(c_1 + c_2x)e^x + c_3e^{-x}$
13. $(A + Cx) \cos x + (B + Dx) \operatorname{sen} x$
15. $c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x$
17. $4x^2 - 4$
19. $(2 - x)e^x$
21. $3 \cosh x$
23. $c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x}$
25. $c_1e^{2x} + A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x$
27. $c_1e^{4x} + c_2e^{-x/2} + c_2e^{-3x/2}$
33. $c_1x + c_2x^2 + c_3x^{-2}$
35. $c_1x^{-1} + c_2x^{-2} + c_3x$

Problemas de la sección 3.4, página 176

1. $c_1e^{-x} + c_2e^{x} + c_3e^{-2x} + e^{2x}$
3. $c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{x} - \operatorname{sen} 2x$
5. $(c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{x} + 2x^3e^{x}$
7. $(c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x} + 2e^{x} + x$
9. $\cosh x + \cos x$
11. $x - 3x^2 + x^3/3 + x^4/6$
13. $e^{-x}\operatorname{sen} x - x^2 - x - 1$
15. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + 0.1 \operatorname{senh} x$

Problemas de la sección 3.5, página 179

1. $[c_1 + c_2x + c_3x^2 + (8/105)x^{7/2}]e^{x}$
3. $c_1e^{x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + \frac{1}{2}e^{2x}\cos x$
5. $c_1 + c_2\cos x + c_3 \operatorname{sen} x + \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + (\operatorname{sen} x)\ln|\cos x|$
7. $c_1x^{-1} + c_2 + c_3x + x^{-1}e^{x}$
9. $c_1x^{-1} + c_2x + c_3x^2 - 1/12x^2$

Capítulo 3 (cuestionario y problemas de repaso), página 180

11. $c_1e^{-x} + c_2e^{x} + c_3xe^{x}$
13. $c_1x^{1/2} + c_2x^{-1/2} + c_3$
15. $c_1 + c_2x^2 + c_3x^4$
17. $c_1\cosh x + c_2 \operatorname{senh} x + c_3\cos x + c_4 \operatorname{sen} x + 2e^{2x} + x^2$
19. $c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x} + \cos 2x$
21. $4 - 3e^{x} + 2.4e^{-x}$
23. $(2 - x)e^{x}$
25. $(1 + x)e^{x}$
27. $3x^2 - 0.5x^{-1}$
29. $(2 + 4x^2)e^{x}$

Problemas de la sección 4.1, página 195

3. $y_1 = (2/\sqrt{6}) \operatorname{sen} \sqrt{6}t,\ y_2 = -(1/\sqrt{6}) \operatorname{sen} \sqrt{6}t$
5. $y_1 = -2\cos t + 8 \operatorname{sen} \sqrt{6}t,\ y_2 = -4\cos t - 4 \operatorname{sen} \sqrt{6}t$
7. $I_1 = 16e^{-2t} - 10e^{-0.8t} + 3,\ I_2 = 8e^{-2t} - 8e^{-0.8t}$

Problemas de la sección 4.3, página 207

1. $y_1 = c_1e^{t} + c_2e^{-t},\ y_2 = c_1e^{t} - c_2e^{-t}$
3. $y_1 = A\cos 2t + B \operatorname{sen} 2t,\ y_2 = A \operatorname{sen} 2t - B\cos 2t$
5. $y_1 = c_1e^{t} + c_2e^{3t},\ y_2 = (-c_1e^{t} + c_2e^{3t})/3$
7. $y_1 = -2c_1e^{-t} - 3c_2e^{-2t},\ y_2 = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$
9. $y_1 = e^{t}(A\cos t + B \operatorname{sen} t),\ y_2 = e^{t}(A \operatorname{sen} t - B\cos t)$
11. $y_1 = 3e^{2t} - 12e^{-2t},\ y_2 = 3e^{2t} + 12e^{-2t}$
13. $y_1 = -6e^{4t} + 2,\ y_2 = -3e^{4t} - 1$
15. $y_1 = 4e^{2t} - e^{-5t},\ y_2 = 3e^{2t} + e^{-5t}$
17. $y_2 = y_1' + y_1,\ y_2' = y_1'' + y_1' = -y_1 - (y_1' + y_1),\ y_1 = e^{-t}(A\cos t + B \operatorname{sen} t)$,
$y_2 = y_1' + y_1 = e^{-t}(B\cos t - A \operatorname{sen} t)$
19. $I_1 = c_1e^{-t} + 3c_2e^{-3t},\ I_2 = -3c_1e^{-t} - c_2e^{-3t}$

Problemas de la sección 4.4, página 212

1. $y_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{4t}$, $y_2 = c_1e^{2t} - c_2e^{4t}$; nodo inestable

3. $y_1 = c_1e^{t} + c_2e^{-2t}$, $y_2 = 4c_1e^{t} + c_2e^{-2t}$; punto silla

5. $y_1 = 3c_1e^{5t} + c_2e^{-2t}$, $y_2 = 4c_1e^{5t} - c_2e^{-2t}$; punto silla

7. $y_1 = e^{-2t}(A \cos 2t + B \text{ sen } 2t)$, $y_2 = e^{-2t}(-A \text{ sen } 2t + B \cos 2t)$; punto espiral estable y atractivo

9. $y_1 = 3c_1e^{3t} + 3c_2e^{9t}$, $y_2 = -c_1e^{3t} + c_2e^{9t}$; nodo inestable

13. $\Delta = -16$ para cualquier k, de modo que la respuesta es no.

15. $y = c_1e^{kt} + c_2e^{-kt}$; hipérbolas $k^2y_1^2 - y_2^2 = const$

17. $y = A \cos \omega_0 t + B \text{ sen } \omega_0 t$; elipses $\omega_0^2y_1^2 + y_2^2 = const$

19. Elipses

Problemas de la sección 4.5, página 219

1. At $(0, 0)$, $y_1' = y_2$, $y_2' = y_1$; punto silla En $(1, 0)$, sea $y_1 = 1 + \tilde{y}_1$. Entonces $y_1 - y_1^2 = -\tilde{y}_1 - \tilde{y}_1^2 \approx -\tilde{y}_1$; por tanto, $\tilde{y}_1' = y_2$, $y_2' = -\tilde{y}_1$; centro.

3. $(0, 0)$ punto silla $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ centros

5. $(\frac{1}{2}\pi \pm 2n\pi, 0)$ puntos silla: $(-\frac{1}{2}\pi \pm 2n\pi, 0)$ centro

7. $(n\pi, 0)$ puntos silla (n par) o centros (n impar)

11. Ya que las trayectorias en el plano de fase tienden entonces a circunferencias.

13. Considerar $dy_2/dy_1 = 0$. **15.** Hipérbolas $y_1y_2 = constante$.

Problemas de la sección 4.6, página 225

1. $y_1 = c_1e^{t} + c_2e^{-t} + 3e^{2t}$, $y_2 = c_1e^{t} - c_2e^{-t}$

3. $y_1 = c_1e^{-2t} + c_2e^{-4t} + \cos t$, $y_2 = c_1e^{-2t} - c_2e^{-4t} - \text{sen } t$

5. $y_1 = A \cos 2t + B \text{ sen } 2t + 4 \cos t$, $y_2 = -2A \text{ sen } 2t + 2B \cos 2t + \text{sen } t$

7. $y_1 = \cos 5t + 2 \text{ sen } 5t + 3t$, $y_2 = -\text{sen } 5t + 2 \cos 5t - 4$

9. $y_1 = e^{10t} - e^{-4t} + 2 \text{ sen } t$, $y_2 = 0.75e^{10t} + e^{-4t} + \text{sen } t$

11. $y_1 = 4e^{6t} + e^{t} + t^2 - 5$, $y_2 = e^{6t} - e^{t} - t$

13. $I_1 = 2c_1e^{\lambda_1 t} + 2c_2e^{\lambda_2 t} + 100$,
$I_2 = (1.1 + \sqrt{0.41})c_1e^{\lambda_1 t} + (1.1 - \sqrt{0.41})c_2e^{\lambda_2 t}$,
$\lambda_1 = -0.9 + \sqrt{0.41}$, $\lambda_2 = -0.9 - \sqrt{0.41}$

15. $c_1 = 17.948$, $c_2 = -67.948$

Capítulo 4 (cuestionario y problemas de repaso), página 226

11. $y_1 = 4c_1e^{5t} + c_2e^{-2t}$, $y_2 = 3c_1e^{5t} - c_2e^{-2t}$; punto silla

13. $y_1 = e^{-t}(2A \cos t + 2B \text{ sen } t)$,
$y_2 = e^{-t}[A(5 \cos t + \text{sen } t) + B(5 \text{ sen } t - \cos t)]$; punto espiral

15. $(0, 0)$ saddle point; $(-1, 0)$, $(1, 0)$ centros

17. $y_2 = \frac{1}{4}(y_1' - 2y_1)$, $y_2' = \frac{1}{4}(y_1'' - 2y_1') = 3y_1 + \frac{1}{4}(y_1' - 2y_1)$,
$y_1 = c_1e^{5t} + c_2e^{-2t}$, $y_2 = \frac{1}{4}(y_1' - 2y_1) = \frac{3}{4}c_1e^{5t} - c_2e^{-2t}$

19. Punto silla

21. $I_1 = (-19 - 62.5t)e^{-5t} - 19\cos t + 62.5 \text{ sen } t$,
$I_2 = (-6 + 62.5t)e^{-5t} + 6\cos t + 2.5 \text{ sen } t$

23. $y_1 = 30e^{-0.03t} - 30e^{-0.15t}$, $y_2 = 45e^{-0.03t} + 45e^{-0.15t}$

27. $y_1 = c_1e^{-t} + 3c_2e^{t} + te^{-t} + e^{-t}$, $y_2 = -c_1e^{-t} - c_2e^{t} - te^{-t}$

29. $y_1 = 4e^{2t} - e^{-5t} + e^{t} - t$, $y_2 = 3e^{2t} + e^{-5t} - e^{t} - 3$

Problemas de la sección 5.2, página 542

1. $y = -1 + c_3x^3$

3. $y = a_0e^{x^2}$

5. $y = a_0(1 + 3x + 4x^2 + \frac{10}{3}x^3 + 2x^4 + \frac{14}{15}x^5 + \cdots) = a_0(x + 1)e^{2x}$

7. $y = c_0 + c_1x + (\frac{3}{2}c_1 - c_0)x^2 + (\frac{7}{6}c_1 - c_0)x^3 + \cdots$. Al hacer $c_0 = A + B$ y $c_1 = A + 2B$ se obtiene $y = Ae^x + Be^{2x}$. Esto ilustra el hecho de que inclusive si la solución de una ecuación es una función conocida, el método de la serie de potencias puede no producirla de inmediato en la forma de costumbre. Prácticamente, ésto no importa porque el interés principal concierne a ecuaciones para las cuales las soluciones obtenidas por series de potencias definen *nuevas* funciones.

9. $y = a_1x + a_0(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \frac{1}{7}x^8 - \cdots)$. Éste es un caso particular de la ecuación de Legendre ($n = 1$), que se considerará en la sección 5.3.

11. $(t + 1)\dot{y} - y = t + 1$, $y = c_0(1 + t) + (1 + t)(t - \frac{1}{2}t^2 + - \cdots)$
$= c_0x + x \ln x \quad (\dot{y} = dy/dt)$

13. $y = a_0(1 - t^2/2! + t^4/4! - + \cdots) + a_1(t - t^3/3! + - \cdots)$
$= a_0 \cos(x - 1) + a_1 \text{ sen }(x - 1)$

15. 3 **17.** ∞ **19.** $\sqrt{|k|}$ **21.** $\sqrt{5/7}$ **23.** 0 **25.** $\sqrt{2}$

29. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m + 1)(m + 2)}{(m + 1)^2 + 1} x^m$; 1

Problemas de la sección 5.3, página 248

9. Sea $(x^2 - 1)^n = v(x)$. Como $v', v'', \cdots v^{(n-1)}$ son cero en $x = \pm 1$ y $v^{(2n)} = 2n!$, entonces por (12) se obtiene

$$(2^n n!)^2 \int_{-1}^{1} P_n^2\, dx = \int_{-1}^{1} v^{(n)}v^{(n)}\, dx = [v^{(n-1)}v^{(n)}]|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} v^{(n-1)}v^{(n+1)}\, dx$$

$$= \cdots = (-1)^n \int_{-1}^{1} vv^{(2n)}\, dx = (-1)^n(2n)! \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n\, dx$$

$$= 2(2n)! \int_{0}^{1} (1 - x^2)^n\, dx = 2(2n)! \int_{0}^{\pi/2} \text{sen}^{2n+1} \beta\, d\beta$$

$$= 2(2n)! \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n + 1)} = \frac{2}{2n + 1}.$$

$(x = \cos \beta)$.

13. Se hace $x = -1$ y se aplica la fórmula para la suma de una serie geométrica.

15. Se hace $x = 0$ y se aplica $(1 + u^2)^{-1/2} = \sum \binom{-1/2}{m} u^{2m}$.

Problemas de la sección 5.4, página 258

1. $y_1 = x^{-1} \cos x,\ y_2 = x^{-1} \operatorname{sen} x$

3. $y_1 = \dfrac{1}{x^2}\left(1 + \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} + \cdots\right) = \dfrac{\operatorname{senh} x}{x^3},\ y_2 = \dfrac{\cosh x}{x^3}$

5. $y_1 = (\sin x)/x^3,\ y_2 = (\cos x)/x^3$

9. $y_1 = \dfrac{1}{x^2}\left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - + \cdots\right) = \dfrac{\operatorname{cox} x}{x^2},\ y_2 = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

11. $y_1 = e^x,\ y_2 = e^x \ln x$

13. $y_1 = x^{-2} \operatorname{sen} x^2,\ y_2 = x^{-2} \cos x^2$

15. $y_1 = (x-1)^2,\ y_2 = (x-1)^{-2}$

17. $y_1 = x,\ y_2 = x \ln x + x^2$

19. $y_1 = \sqrt{x}\, e^x,\ y_2 = (x+1)e^x$

35. $y = AF(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; x) + B\sqrt{x}\, F(1, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}; x)$

37. $y = AF(\frac{1}{5}, -1, \frac{4}{5}; x) + Bx^{1/5}F(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{6}{5}; x)$

39. $y = A(1 - 8x + \frac{32}{5}x^2) + Bx^{3/4}F(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{4}; x)$

41. $y = AF(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}; x) + Bx^{1/2}(1 + \frac{4}{3}x)$

43. $y = C_1F(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; t - 1) + C_2(t-1)^{1/2}$

45. $y = c_1F(-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}; t + 1) + c_2(t+1)^{2/3}F(-\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}; t + 1)$

Problemas de la sección 5.5, página 266

1. Usar (7b), sección 5.2, y $\dfrac{x^{2m+2}}{2^{2m+2+n}(m+1)!(n+m+1)!} \Big/ \dfrac{x^{2m}}{2^{2m+n}m!(n+m)!} \to 0$

cuando $m \to \infty$ (x fijo).

5. Valores aproximados $\frac{3}{4}\pi + k\pi = 2.356, 5.498, 8.639, 11.781, 14.923$.

7. $\frac{1}{4}\pi + k\pi$, $k = 1, 2, 3, 4$; 2.5%, 0.8%, 0.4%, 0.2%

11. $AJ_{1/3}(x) + BJ_{-1/3}(x)$

13. $AJ_{3/2}(5x) + BJ_{-3/2}(5x)$

15. $AJ_{2/3}(x^2) + BJ_{-2/3}(x^2)$

17. $x^{-2}J_2(x)$; ver el teorema 2.

19. $x^{1/3}(AJ_{1/3}(x^{1/3}) + BJ_{-1/3}(x^{1/3}))$

Problemas de la sección 5.6, página 271

5. $J_2(x) = 2x^{-1}J_1(x) - J_0(x)$; ver (3) con $\nu = 1$.

7. Se empieza a partir de (2), con reemplazada por $\nu - 1$, y se sustituye $J_{\nu-1}$ aplicando (1).

9. Sea $J_n(x_1) = J_n(x_2) = 0$. Entonces, por el teorema de Rolle se tiene que $x_1J_n(x_1) = x_2J_n(x_2)$, y $x^{-n}J_n(x)' = 0$ en alguna parte entre x_1 y x_2. Luego se usa (2). A continuación se aplica (1) con $\nu = n + 1$.

13. $-2J_2(x) - J_0(x) + c$ by (4)

15. $-2J_4 - 2J_2 - J_0 + c$ by (4)

17. 0.886 227, 1.329 340, 3.323 351

Problemas de la sección 5.7, página 276

1. $AJ_2(x) + BY_2(x)$
3. $AJ_0(\sqrt{x}) + BY_0(\sqrt{x})$
5. $AJ_{1/4}(x^2) + BY_{1/4}(x^2)$
7. $x^2[AJ_2(x^2) + BY_2(x^2)]$
9. $\sqrt{x}\,[AJ_{1/2}(\sqrt{x}) + BJ_{-1/2}(\sqrt{x})] = x^{1/4}[\tilde{A}\text{ sen }\sqrt{x} + \tilde{B}\cos\sqrt{x}]$
11. $\sqrt{x}\,[AJ_{1/4}(\tfrac{1}{2}x^2) + BY_{1/4}(\tfrac{1}{2}x^2)]$
13. $\sqrt{x}[AJ_{1/4}(\tfrac{1}{2}kx^2) + BY_{1/4}(\tfrac{1}{2}kx^2)]$
15. 1.1
17. Sea $H_\nu^{(1)} = kH_\nu^{(2)}$; aplicar (10) y obtener una contradicción.
19. Para $x \neq 0$, todos los términos de la serie (13) son reales y positivos.

Problemas de la sección 5.8, página 284

3. $\lambda = [(2n+1)\pi/2]^2,\ n = 0, 1, \cdots; y_n(x) = \text{sen}(\tfrac{1}{2}(2n+1)\pi x)$
5. $\lambda = [(2n+1)\pi/2L]^2,\ n = 0, 1, \cdots; y_n(x) = \text{sen}((2n+1)\pi x/2L)$
7. $\lambda = n^2,\ n = 0, 1, \cdots; y_n(x) = \cos nx$
9. $\lambda = (n\pi/L)^2,\ n = 0, 1, \cdots; y_n(x) = \cos(n\pi x/L)$
11. $\lambda = ((2n+1)\pi/2)^2,\ n = 0, 1, \cdots; y_n(x) = \text{sen}\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\ln|x|\right)$
13. $\lambda = n^2\pi^2,\ n = 1, 2, \cdots; y_n(x) = x\text{ sen }(n\pi\ln|x|)$; ecuación de Euler–Cauchy
15. $P_0/\sqrt{2},\ \sqrt{\tfrac{3}{2}}P_1(x),\ \sqrt{\tfrac{5}{2}}P_2(x)$
17. Determinar $x = ct + k$.

Problemas de la sección 5.9, página 292

1. $4P_1 + 2P_3$
3. $x^2 = \tfrac{1}{3}P_0 + \tfrac{2}{3}P_2, x^3 = \tfrac{3}{5}P_1 + \tfrac{2}{5}P_3$
5. $\tfrac{1}{4}P_0 + \tfrac{1}{2}P_1 + \tfrac{5}{16}P_2 + \cdots$
7. $\tfrac{1}{2}P_0 + \tfrac{5}{8}P_2 + \cdots$
15. Como la máxima potencia en L_m es x_m, basta demostrar que $\int e^{-x}x^kL_n\,dx = 0$ para $k < n$:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^kL_n(x)\,dx = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^k\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})\,dx = -\frac{k}{n!}\int_0^\infty x^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^ne^{-x})\,dx$$
$$= \cdots = (-1)^k\frac{k!}{n!}\int_0^\infty\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^ne^{-x})\,dx = 0.$$

21. $G_x = \sum a_n'(x)t^n = \sum He_n'(x)t^n/n! = tG = \sum He_{n-1}(x)t^n/(n-1)!$, etc.
23. Escribir $e^{-x^2/2} = v$, $v^{(n)} = d^nv/dx^n$, etc., integrar por partes, usar la fórmula $He_n' = nHe_{n-1}$ (Prob. 21); entonces, para $n > m$,

$$\int_{-\infty}^\infty vHe_mHe_n\,dx = (-1)^n\int_{-\infty}^\infty He_mv^{(n)}\,dx = (-1)^{n-1}\int_{-\infty}^\infty He_m'v^{(n-1)}\,dx$$
$$= (-1)^{n-1}m\int_{-\infty}^\infty He_{m-1}v^{(n-1)}\,dx = \cdots$$
$$= (-1)^{n-m}m!\int_{-\infty}^\infty He_0\,v^{(n-m)}\,dx = 0.$$

25. Por (1) en la sección 5.6, con $\nu = 1$,

$$a_m = \frac{2}{R^2J_1^2(\alpha_{m0})}\int_0^R xJ_0\left(\frac{\alpha_{m0}}{R}x\right)dx = \frac{2}{\alpha_{m0}{}^2J_1^2(\alpha_{m0})}\int_0^{\alpha_{m0}} wJ_0(w)\,dw$$

$$= \frac{2}{\alpha_{m0}J_1(\alpha_{m0})}, \qquad f = 2\left(\frac{J_0(\lambda_{10}x)}{\alpha_{10}J_1(\alpha_{10})} + \frac{J_0(\lambda_{20}x)}{\alpha_{20}J_1(\alpha_{20})} + \cdots\right).$$

27. $a_m = \dfrac{2akJ_1(\alpha_{m0}a/R)}{\alpha_{m0}RJ_1^2(\alpha_{m0})}$ **29.** $a_m = \dfrac{4J_2(\alpha_{m0})}{\alpha_{m0}^2J_1^2(\alpha_{m0})}$

31. $a_m = \dfrac{2R^2}{\alpha_{m0}J_1(\alpha_{m0})}\left[1 - \dfrac{2J_2(\alpha_{m0})}{\alpha_{m0}J_1(\alpha_{m0})}\right]$

35. $x^3 = 16\left[\dfrac{J_3(\alpha_{13}x/2)}{\alpha_{13}J_4(\alpha_{13})} + \dfrac{J_3(\alpha_{23}x/2)}{\alpha_{23}J_4(\alpha_{23})} + \cdots\right]$.

Capítulo 5 (cuestionario y problemas de repaso), página 295

17. $(1 - x)^{-1}, x^{-1}$
19. $e^x, e^x \ln x$
21. $\sqrt{x}, 1 + x$
23. $x + 1, (x + 1)\ln x$
25. $x^2 + x^3, (x^2 + x^3)\ln x$
27. $[AJ_1(x) + BY_1(x)]/x$
29. $x[AJ_1(x) + BY_1(x)]$
31. $1/\sqrt{2}, \cos \pi x, \cos 2\pi x, \cdots$
33. $\sqrt{2/\pi}, (2/\sqrt{\pi}) \cos 4mx, (2/\sqrt{\pi}) \operatorname{sen} 4mx$
35. $\frac{1}{2}P_0(\frac{1}{2}x), \frac{1}{2}\sqrt{3}\,P_1(\frac{1}{2}x), \frac{1}{2}\sqrt{5}\,P_2(\frac{1}{2}x)$
37. $\lambda = n^2, y_n(x) = \operatorname{sen}(n \ln |x|)$
39. $\lambda = n^2\pi^2, y_n(x) = \cos(n\pi \ln |x|)$
41. $2(-P_0 + P_1 - P_2 + P_3)$
43. $-4P_0 + 10P_2 + 16P_4$
45. $-30P_0 + \frac{138}{5}P_1 - 6P_2 + \frac{2}{5}P_3$

Problemas de la sección 6.1, página 306

1. $3/s^2 + 4/s$
3. $2/s^3 + a/s^2 + b/s$
5. $(s \cos\theta - \omega \operatorname{sen}\theta)/(s^2 + \omega^2)$
7. $2n\pi[T(s^2 + (2n\pi/T)^2)]^{-1}$
9. $\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega t$. *Respuesta.* $1/2s + s/(2s^2 + 8\omega^2)$.
11. $1/2s + s/(2s^2 + 8)$
13. $e^b/(s - a)$
15. $\frac{1}{2}[s/(s^2 - 16) - 1/s]$
17. $k(1 - e^{-cs})/s$
19. $k/s - k(1 - e^{-cs})/cs^2$
27. $5e^{-3t}$
29. $\frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t$
31. $t^3/6$
33. $1 - e^{-t}$
35. $3 - 3e^{-3t}$
37. $2 + e^{-2t}$

Problemas de la sección 6.2, página 313

1. $(s^2 + 2)/s(s^2 + 4)$
3. $(s - a)^{-2}$
5. $(s^2 - 8)/s(s^2 - 16)$
7. $(s^2 + 18)/s(s^2 + 36)$
15. $3 - 3e^{-t}$
17. $1 - \cos 2t$
19. $\operatorname{senh} 2t - 2t$
21. $(e^{2t} - 1 - 2t - 2t^2)/8$
23. $t^2/2 - t/\pi + (e^{\pi t} - 1)/\pi^2$
25. $1 + t - \cos t - \operatorname{sen} t$
27. $2\cos 2t - 4\operatorname{sen} 2t$
29. $y = A\cos\omega t + (B/\omega)\operatorname{sen}\omega t$
31. $e^{-2t} - e^{-3t}$
33. $\cos 5t + \frac{1}{25}t$
35. $y = 2e^{kt}$

Problemas de la sección 6.3, página 320

1. $4.5/(s - 3.5)^2$
3. $1/(s^2 - 2s + 2)$
5. $(\omega \cos \theta + (s + 1) \text{ sen } \theta)/[(s + 1)^2 + \omega^2]$
7. $12/(s + \frac{1}{2})^4$
9. $[A(s + \alpha) + B\beta]/[(s + \alpha)^2 + \beta^2]$
11. $\pi t e^{-\pi t}$
13. $e^{2t} \cos t$
15. $e^{-3t}(\cos t - 3 \text{ sen } t)$
17. $2e^{2t} \text{ senh } 3t$
23. $k(e^{-as} - e^{-bs})/s$
25. $u(t) - u(t - 1) + u(t - 2) - + \cdots,$
$s^{-1}(1 - e^{-s} + e^{-2s} - + \cdots) = s^{-1}(1 + e^{-s})^{-1}$ (series geométricas)
27. e^{-s}/s^2
29. $2e^{-s}/s^3$
31. $e^{1/2}e^{-s/2}/(s - 1)$
33. $-se^{-\pi s}/(s^2 + 1)$
35. $t - tu(t - 1) = t - (t - 1)u(t - 1) - u(t - 1), \quad s^{-2} - s^{-2}e^{-s} - s^{-1}e^{-s}$
37. $(1 - e^{1-s})/(s - 1)$
39. $s^{-2} - e^{-as}(s^{-2} + as^{-1})$
41. $-2s(e^{-s} + e^{-2s})/(s^2 + \pi^2)$
43. $t - 3$ if $t > 3$; 0 if $t < 3$
45. -3 if $1 < t < 4$; 0 otherwise
47. $\cos 2t$ if $t > \pi$; 0 en caso contrario
49. $(t - 1)^3/6$ si $t > 1$; 0 otherwise
51. $e^{-t} \text{ sen } t$
53. $3e^{t/2} \cos 3t$
55. $e^{-2t} \text{ sen } 3t + 9 \cos 2t + 8 \text{ sen } 2t$
57. $e^{-2t} + e^{-3t} + e^{-4t} + e^{-5t}$
59. $t - \text{sen } t$ if $0 < t < 1$; $\cos (t - 1) + \text{sen } (t - 1) - \text{sen } t$ if $t > 1$
61. $\text{sen } 3t + \text{sen } t$ if $0 < t < \pi$; $\frac{4}{3} \text{ sen } 3t$ if $t > \pi$
63. $\text{sen } 2t + \text{sen } t$ if $0 < t < \pi$; $-\text{sen } t$ if $t > \pi$
65. $e^t - \text{sen } t$ if $0 < t < 2\pi$; $e^t - \frac{1}{2} \text{ sen } 2t$ if $t > 2\pi$
67. $i(t) = V_0(1 - e^{-Rt/L})/R$
69. $sI + I/s = (1 - e^{-s})/s^2$. *Ans.* $1 - \cos t$ if $0 < t < 1$,
$\cos (t - 1) - \cos t$ if $t > 1$.

Problemas de la sección 6.4, página 328

1. $i = 0 \ (t < 1), \quad i = e^{-0.1(t-1)} \ (1 < t < 2), \quad i = e^{-0.1(t-1)} - e^{-0.1(t-2)} \ (t > 2)$
3. $i = 0 \ (t < 2), \quad i = (10e^{-(t-2)} - e^{-0.1(t-2)})/900e^2 \ (t > 2)$
5. $i = 20(1 - e^{-0.1t}) \ (0 < t < 1), \quad i = 20(e^{0.1} - 1)e^{-0.1t} \ (t > 1)$
7. $y = 0 \ (t < 1), \quad y = \frac{1}{3} \text{ sen } (3t - 3) \ (t > 1)$
9. $y = \text{sen } t \ (0 < t < \pi), \quad y = 0 \ (\pi < t < 2\pi), \quad y = -\text{sen } t \ (t > 2\pi)$
11. $y = e^{-t} \cos t \ (0 < t < 2\pi), \quad y = e^{-t}(\cos t + e^2 \text{ sen } t) \ (t > 2\pi)$
13. $y = 3e^{-2t} \text{ sen } t \ (0 < t < 1), \quad y = e^{-2t}[3 \text{ sen } t + e^2 \text{ sen } (t - 1)] \ (t > 1)$
15. $y = 2e^{-3t} + e^{-t} \ (0 < t < \frac{1}{2}), \quad y = 2e^{-3t} + e^{-t} + \frac{1}{4}[e^{-3(t-1/2)} - e^{t-1/2}] \ (t > \frac{1}{2})$
17. $y = e^{-t} \cos 2t + e^t \ (0 < t < 1),$
$y = e^{-t} \cos 2t + e^t + e^{-(t-1)} \text{ sen } 2(t - 1) \ (t > 1)$
19. $y = 5t - 2 \ (0 < t < \pi), \quad y = 5t - 2 - \frac{1}{2}e^{-(t-\pi)} \text{ sen } 2t \ (t > \pi)$

Problemas de la sección 6.5, página 332

1. $\dfrac{2s^2 - 8}{(s^2 + 4)^2}$
3. $\dfrac{2}{(s - 1)^3}$
5. $\dfrac{6s}{(s^2 - 9)^2}$

7. $\dfrac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$ 9. $\dfrac{2s(s^2 - 3)}{(s^2 + 1)^3}$ 11. $\dfrac{s + 2}{(s^2 + 4s + 5)^2}$

13. $4e^{-t}t$ 15. t senh $2t$ 17. $\frac{1}{2}t$ sen t

19. $(e^t - 1)/t$ 21. (sen $\omega t)/t$

Problemas de la sección 6.6, página 337

1. t 3. te^t 5. $t^5/30$ 7. $\frac{1}{2}t$ sen ωt

9. $\frac{2}{3}$ sen t − $\frac{1}{3}$ sen $2t$ 11. 0 $(t < \pi)$, −sen t $(t > \pi)$

13. $e^t * e^t = te^t$ 15. $(e^{3t} - 1)/9 - t/3$

17. $(1 - \cos \omega t)/\omega^2$ 19. (t sen $\omega t)/2\omega$ 21. $t \cos \omega t$

23. $e^{-t} - e^{-2t}$

25. Sea $t - \tau = \sigma$. Then $\displaystyle\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau = \int_t^0 g(\sigma)f(t - \sigma)(-d\sigma)$.

29. Sea $t > k$. Entonces $(f_k * f)(t) = \displaystyle\int_0^k \frac{1}{k} f(t - \tau)\, d\tau = f(t - \tilde{t})$ para algún $\tilde{t}$ entre 0 y k. Así, cuando $k \to 0$. Entonces $\tilde{t} \to 0$ y $f_k(t - \tilde{t}) \to \delta(t)$, de modo que se concluye la fórmula.

31. $\frac{3}{8}$ sen t − $\frac{1}{8}$ sen $3t$ 33. t − sen t

35. $0.2e^{-t} + \cos 5t - 2$ sen $5t$

39. 0 si $0 < t < 1$; $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t - 2)$ if $t > 1$

41. sen t + sen $3t$ if $0 < t < \pi$; $\frac{4}{3}$ sen $3t$ if $t > \pi$

43. sen t + sen $2t$ if $0 < t < \pi$; −sen t if $t > \pi$

45. e^t 47. $\cos t$ 49. senh t

Problemas de la sección 6.7, página 348

1. $(e^{4t} - e^t)/3$ 3. $2e^{-4t} + e^{2t}$

5. $e^{-t}(\cos 3t + 4$ sen $3t)$ 7. $2 + e^t - 2e^{2t}$

9. $e^{2t}(2t - 4)$ 11. $e^{-t}(1 - t - t^2)$

13. $\cosh 3t - 3 \cosh t$ 15. $e^{-t}(\cos 2t - 2t$ sen $2t)$

17. $(1 + t^2 - 2t^3)e^{-2t}$ 19. $2e^{2t} + te^t$

27. $y_1 = \cos t$, $y_2 =$ sen t 29. $y_1 = e^{-t}\cos t$, $y_2 = -e^{-t}$ sen t

31. $y_1 = -6e^{4t} + 2$, $y_2 = -3e^{4t} - 1$ 33. $y_1 = 4e^t - e^{-2t}$, $y_2 = e^t - e^{-2t}$

35. $y_1 = 3e^{2t} + e^{-5t}$, $y_2 = 4e^{2t} - e^{-5t}$ 37. $y_1 = e^t + e^{2t}$, $y_2 = e^{2t}$

39. $y_1 = e^t$, $y_2 = e^{-t}$, $y_3 = e^t - e^{-t}$

Problemas de la sección 6.8, página 353

1. $\dfrac{\pi s - 1 + (\pi s + 1)e^{-2\pi s}}{s^2(1 - e^{-2\pi s})} = \dfrac{\pi}{s}\coth \pi s - \dfrac{1}{s^2}$

3. $\dfrac{(4\pi^2 s^2 - 2)e^{2\pi s} + 4\pi s + 2}{s^3(e^{2\pi s} - 1)}$ 5. $\dfrac{e^{2(1-s)\pi} - 1}{(1 - s)(1 - e^{-2\pi s})}$

7. $\left[\frac{1}{s^2}(1 - e^{-\pi s}) - \frac{\pi}{s} e^{-\pi s}\right] \Big/ (1 - e^{-2\pi s})$

9. $\left[\frac{\pi}{s} e^{-\pi s}(e^{-\pi s} - 1) + \frac{1}{s^2}(e^{-\pi s} - 1)^2\right] \Big/ (1 - e^{-2\pi s})$

15. $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \coth \frac{\pi s}{2\omega}$

21. $i(t) = (V_0/\omega^* L)e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega^* t$ si $0 < t < a$, $\alpha = R/2L$, $\omega^{*2} = 1/LC - \alpha^2$,
$i(t) = (V_0/\omega^* L)[e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega^* t - e^{-\alpha(t-a)} \operatorname{sen}\{\omega^*(t - a)\}]$ if $t > a$

25. $i(t) = \frac{1}{R}\left(\frac{e^{-kt}}{1 - e^{-k}} + t - \frac{L}{R}\right)$ si $0 < t < 1$, and $i(t + 1) = i(t)$, $k = \frac{R}{L}$.

27. $Ri + q/C = v(t)$, y como la carga q sobre el capacitor no puede cambiar abruptamente, entonces i debe tener un salto.

29. $i(t) = \begin{cases} a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t - ae^{-t/(RC)} & \text{if } 0 < t < \pi/\omega \\ -a(1 + e^{\pi/(\omega RC)})e^{-t/(RC)} & \text{if } t > \pi/\omega \end{cases}$

en donde $a = \omega CK$, $b = \omega^2 RC^2 K$, $K = 1/[1 + (\omega RC)^2]$.

31. $i(0) = 0$, $i'(0) = -\frac{100}{16}$, $i = \frac{20}{3}(e^{-t} - e^{-t/16})$, $q = \frac{20}{3}(16e^{-t/16} - e^{-t})$

33. $y = \frac{P}{K}\left[1 + \frac{1}{2\beta}(\alpha - \beta)e^{-(\alpha+\beta)t} - \frac{1}{2\beta}(\alpha + \beta)e^{(-\alpha+\beta)t}\right]$, where $\beta^2 = -\omega^{*2}$,
$y = P(1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t})/K$

35. Para $0 < t < 1$ la solución es como en el problema 34. Si $t > 1$,

$$v = \omega - \frac{P}{M_1 + M_2} + \frac{P}{k(M_1 + M_2)}[\operatorname{sen} kt - \operatorname{sen}(k(t - 1))],$$

$$k^2 = c\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right), \quad c = \text{rigidez del eje}$$

39. $i_1 = V_0\left[e^{-\alpha t}\left(-\frac{1}{R_1}\cos \omega^* t + \frac{1}{\omega^*}\left(\frac{L_2}{A} - \frac{\alpha}{R_1}\right)\operatorname{sen} \omega^* t\right) + \frac{1}{R_1}\right]$

Capítulo 6 (cuestionario y problemas de repaso), página 361

17. $2\pi/[(s + 1)^2 + 4\pi^2]$

19. $(s^2 - 2)/(s^3 - 4s)$

21. $2s^2/(s^2 + 1)^2$

23. $1/2s + s/(2s^2 + 8)$

25. arc tan $(1/s)$

27. $e^{-t}(\cos 3t - \operatorname{sen} 3t)$

29. $(1 - e^{-3t})/3$

31. $e^{2t} - 1 - 2t - 2t^2$

33. $2 + e^t - 2e^{2t}$

35. $2t + 3 + \frac{1}{2}e^{3t} - 2e^{2t} - \frac{1}{2}e^t$

37. 0 si $0 < t < 3$, $0.2[1 - \cos(3t - 9)]$ si $t > 3$

39. 0 si $t < 2\pi$, $-\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}e^{-(t-2\pi)}$ si $t > 2\pi$

41. $1.5e^t \cos t + te^t \operatorname{sen} t$

43. $2te^{2t} + (20 + 12t + 3t^2)e^t$

45. $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2t$ si $\pi < t < 2\pi$, $\operatorname{sen} 2t$ en caso contrario

47. e^{-3t}

51. $y_1 = \cos\sqrt{2}t$, $y_2 = \cos\sqrt{2}t$

53. $1 - e^{-t}$ si $0 < t < 4$, $(e^4 - 1)e^{-t}$ si $t > 4$

55. $i(t) = e^{-4t}(\frac{3}{26}\cos 3t - \frac{10}{39}\operatorname{sen} 3t) - \frac{3}{26}\cos 10t + \frac{8}{65}\operatorname{sen} 10t$

57. $i_1 = 2(1 - e^{-t})$, $i_2 = 2e^{-t}$

59. $i_1 = e^{-4t} + t$, $i_2 = -4e^{-4t} + \frac{1}{5}$

Problemas de la sección 7.1–7.2, página 374

1. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 18 & 2 & -6 \\ 18 & -4 & 28 \end{bmatrix}$

5. Todos indefinidos

7. $\begin{bmatrix} 0 & 24 \\ 0 & 60 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -8 \\ -1 & 3 & 8 \\ 8 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 3 & 3 & -4 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

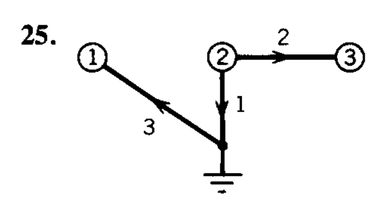
11. **0**, **0**, $[11 \quad 1 \quad 9]$

13. $\begin{bmatrix} 8 & 6 & -16 \\ -2 & 6 & 16 \\ 16 & -8 & 10 \end{bmatrix}$

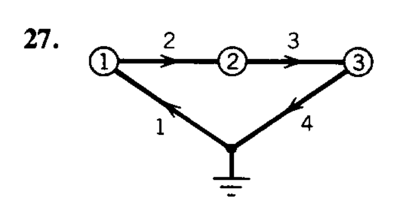
19. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

25.



27.



Problemas de la sección 7.3, página 386

1. $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ -3 & 3 & 11 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$

7. [26], [82], [15]

11. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, etc.

13. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, etc.

15. **0**

19. Alargamiento o contracción uniforme, igual en todas las direcciones

21. (a) C_1 to J_2, C_3 to J_1, J_3; (b) C_1 to J_2, C_2 to J_1, C_3 to J_3

23. $[0.7 \quad 0.7]$, $[0.49 \quad 0.91]$, $[0.427 \quad 0.973]$, $[0.4081 \quad 0.9919]$

Problemas de la sección 7.4, página 396

1. $x = -4, y = 4$

3. $x = 6, y = 5$

5. $x = -2, y = 0, z = 4$

7. $x = -2, y = 0, z = 1$

9. $x = 2, y = 1, z = 3$

11. $x = 3y + 2, z = 0$

13. $w = 2x + 1, y = 1, z = 2$ **15.** $w = 4, x = 0, y = 2, z = 6$

17. $I_1 = (R_1 + R_2)E_0/R_1R_2, I_2 = E_0/R_1, I_3 = E_0/R_2$ (amperes)

19. $I_1 = 2, I_2 = 6, I_3 = 8$

23. $P_1 = 6, P_2 = 10, D_1 = S_1 = 18, D_2 = S_2 = 26$

Problemas de la sección 7.5, página 647

1. Sí, ı, 2, $[1 \;\; -\frac{1}{2} \;\; 0]^T, [0 \;\; 0 \;\; 1]^T$ **3.** No

5. Sí, , 1, 1 **7.** No

9. Sí, , 1, $[0 \;\; \cdots \;\; 0 \;\; 1]^T$ **11.** 2

13. 3 **15.** 2 **17.** 2 **19.** 4

21. Usar el teorema 1. **23.** Usar el teorema 1.

25. $[1 \;\; 1], [1 \;\; -1]$ and $[7 \;\; \frac{1}{2} \;\; 0]^T, [7 \;\; -\frac{1}{2} \;\; 0]^T$

27. Linealmente independientes **29.** Linealmente dependientes

31. Linealmente dependientes **33.** Linealmente independientes

35. Linealmente dependientes

Problemas de la sección 7.7, página 414

1. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$ **5.** No tiene inversa

7. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & -0.8 & -0.64 \\ 0 & 0.2 & -0.04 \\ 0 & 0 & 0.10 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 11 & 4 & 24 \\ 20 & 9 & 44 \\ 64 & 20 & 139 \end{bmatrix}$ **19.** Usar el problema 18.

Problemas de la sección 7.8, página 424

1. 257 **3.** -40.12 **5.** 180 **7.** 0 **9.** 45.045 **11.** 72

13. -24 **15.** 72

17. $\begin{vmatrix} 20 & 31 & 66 \\ 60 & 93 & 90 \\ 40 & 64 & 34 \end{vmatrix}$

Problemas de la sección 7.9, página 431

1. 1 **3.** 2 **5.** 3

7. $\begin{bmatrix} 14 & -5 \\ -25 & 9 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} \cos 3\theta & -\operatorname{sen} 3\theta \\ \operatorname{sen} 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 10 & 20 & 5 \\ 5 & 10 & 5 \\ 15 & 20 & 10 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 11 \end{bmatrix}$ **17.** $x = 2, y = 1, z = -3$

21. Usar el teorema 4 **25.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

Problemas de la sección 7.10, página 437

1. $1, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, -4, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **3.** $2, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}, 5, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **5.** 0, cualquier $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

7. $1, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, -1, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **9.** $4, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}, -3, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **11.** $i, \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, -i, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

13. $4, 8, 6, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **15.** $0, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, -2, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

17. $6, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 8, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, 2, \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ **19.** $9, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, 2, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

21. $0, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, 8, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

23. Esto se concluye por el hecho de que los ceros de un polinomio con coeficientes reales son reales o conjugados complejos por pares.

27. $\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j \ (\mathbf{x}_j \neq \mathbf{0}), \ (\mathbf{A} - k\mathbf{I})\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j - k\mathbf{x}_j = (\lambda_j - k)\mathbf{x}_j$

29. Usar inducción; premultiplicar $\mathbf{A}^k \mathbf{x}_j = \lambda_j^k \mathbf{x}_j$ según **A**.

Problemas de la sección 7.11, página 442

1. 35.3°, 4; 125.3°, 1 **3.** 45°, 1.2; 135°, 0.8 **5.** 45°, 3; 135°, 1

7. $[5 \quad 7]^T$ **9.** $[1 \quad 4 \quad 3.2]^T$ **11.** 2

13. $c[1 \quad 1.6 \quad 2.5], \ c > 0$

15. $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{y} = [0.55 \quad 0.64375 \quad 0.6875]^T$

Problemas de la sección 7.12, página 446

1. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 & 7 \\ 5 & 0 & -9 \\ -7 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

5. Simétrica, 10, −10 **7.** Antisimétrica, $3i$, $-3i$

9. Ortogonal, 1, i, $-i$ **11.** Simétrica, 0

13. Antisimétrica, 0, $50i$, $-50i$ **15.** No

17. $|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}| = \sqrt{20}$, $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = \sqrt{5}$; Teorema 2

19. Rotación a través de un ángulo θ alrededor del eje x_1

21. No, sí **23.** $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{AB})^T$

25. $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} = (-\mathbf{A})^{-1} = -\mathbf{A}^{-1}$ (ver Prob. 18, Sec. 7.7).

Problemas de la sección 7.13, página 453

3. $[2 + i \quad i]^T$, $[2 + i \quad -5i]^T$

5. Antihermitiana i, $[1 \quad 1]^T$; $-i$, $[1 \quad -1]^T$

7. Hermitiana $3 + \sqrt{2}$, $[-i \quad 1 - \sqrt{2}]$; $3 - \sqrt{2}$, $[-i \quad 1 + \sqrt{2}]$

9. Hermitiana, unitaria 1, $[1 \quad i - i\sqrt{2}]$; -1, $[1 \quad i + i\sqrt{2}]$

11. Para **A**, **B** unitarias, $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{B}}^T\overline{\mathbf{A}}^T = (\overline{\mathbf{AB}})^T$.

17. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

23. −2 **25.** $5i$ **27.** 1

29. $3|x_1|^2 - 2\,\mathrm{Im}\,(x_1\bar{x}_2 + 2x_3\bar{x}_2) + 4|x_3|^2$

Problemas de la sección 7.14, página 460

1. $\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 36 & -16 \end{bmatrix}$, 2, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$; -4, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, 3, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; 2, $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, 9, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$; -5, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, 9, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; 2, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

11. Comparar el coeficiente de λ^{n-1} en

$$(-1)^n(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots$$

con el de λ^{n-1} en el desarrollo del determinante característico.

13. $[1/\sqrt{2} \quad -i/\sqrt{2}]^T$, $[1/\sqrt{2} \quad i/\sqrt{2}]^T$

15. $[3/\sqrt{10} \quad 1/\sqrt{10}]^T$, $[1/\sqrt{10} \quad -3/\sqrt{10}]^T$

17. $[1/\sqrt{2} \quad i/\sqrt{2}]^T, [1/\sqrt{2} \quad -i/\sqrt{2}]^T$

19. $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}8 & 0\\0 & -8\end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}i & 0\\0 & -i\end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

25. Hipérbola $2y_1^2 - 3y_2^2 = 1$; $x_1 = 0.8y_1 - 0.6y_2$, $x_2 = 0.6y_1 + 0.8y_2$

27. Elipse $9y_1^2 + y_2^2 = 9$; $x_1 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}y_2$, $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}y_1 + \frac{1}{2}y_2$

29. Rectas paralelas $y_1 = \pm 1$; $x_1 = (y_1 - 3y_2)/\sqrt{10}$, $x_2 = (3y_1 + y_2)/\sqrt{10}$

Problemas de la sección 7.15, página 469

1. 5; $1, x, x^2, x^3, x^4$ **3.** 1; $\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$

5. No **7.** 2; xe^{-x}, e^{-x}

9. Si $S_0 = \{\mathbf{a}_{(1)}, \cdots, \mathbf{a}_{(k)}\}$, entonces $c_1\mathbf{a}_{(1)} + \cdots + c_k\mathbf{a}_{(k)} = \mathbf{0}$ para $c_1, \cdots, c_k$ no todos 0, y $c_1\mathbf{a}_{(1)} + \cdots + c_k\mathbf{a}_{(k)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{0}$ para tales $c_1, \cdots, c_k$ y $c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$.

11. Por ejemplo, $[1, \; 0], [0, \; 1]$ y $[1, \; 1], [1, \; -1]$ y $[1, \; 0], [0, \; -1]$

13. $\sqrt{11}$ **15.** 5 **17.** $\sqrt{62}$ **19.** $10 \leqq \sqrt{11}\sqrt{20} = 14.83$

21. $\|[8 \quad 1 \quad 0 \quad 10]^T\| = \sqrt{165} = 12.85 \leqq 5 + \sqrt{62} = 12.87$

23. $[v_1, -\frac{1}{2}v_1, v_3]$; v_1, v_3 arbitrario, sí **25.** $x_1 = 2y_1 + y_2$, $x_2 = 5y_1 + 3y_2$

27.
$$\begin{aligned} x_1 &= \quad\;\; - 2y_2 + y_3 \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{1}{2}y_2 - \tfrac{1}{2}y_3 \\ x_3 &= -y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

29.
$$\begin{aligned} x_1 &= 4y_1 - 2y_2 + 2y_3 \\ x_2 &= -2y_1 - 4y_2 + 4y_3 \\ x_3 &= -4y_1 + 2y_2 + 8y_3 \end{aligned}$$

Capítulo 7 (preguntas y problemas de repaso), página 470

17. $\begin{bmatrix}26\\-16\\11\end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix}15\\-22\\0\end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix}-0.7 & -0.75 & 1\\0.1 & 0.25 & 0\\0.2 & 0 & 0\end{bmatrix}$ **23.** 1

25. $\begin{bmatrix}25 & -10 & 10\\-10 & 20 & 8\\10 & 8 & 14\end{bmatrix}$ **27.** $\begin{bmatrix}52\\42\\-42\end{bmatrix}$ **29.** $\begin{bmatrix}-15\\-12\\-11\end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\0 & 0 & 0\\-2 & 0 & 1\end{bmatrix}$, [5] **33.** $x = 2, y = 1, z = 3$ **35.** $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}, z = -\frac{1}{2}$

37. $x = z = y + 3$ **39.** $x = -2z, y = \frac{1}{4}$ **41.** 2 **43.** 3

45. $\begin{bmatrix} -1.6 & 1 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}$ **47.** $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ **49.** $\begin{bmatrix} 5 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

51. $1, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, -1, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **53.** $10, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; 6, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; 0, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

55. $5, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; 0, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; -5, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **57.** $3, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}; 0, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; -5, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

59. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ **61.** $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

63. Hipérbola $y_1^2 - y_2^2 = 1; x_1 = 0.8y_1 - 0.6y_2, x_2 = 0.6y_1 + 0.8y_2$

65. Elipse $4y_1^2 + 9y_2^2 = 1; x_1 = (12y_1 - 5y_2)/13, x_2 = (5y_1 + 12y_2)/13$

67. $2i|x_1|^2 + 8i \operatorname{Im} \bar{x}_1 x_2$

69. 2

71. $I_1 = 15, I_2 = 10, I_3 = 5$ [amps]

73. $I_1 = 4, I_2 = 5, I_3 = 1$ [amps]

Problemas de la sección 8.1, página 485

1. $3, 2, 0, |\mathbf{v}| = \sqrt{13}$

3. $-3, 0, 3, |\mathbf{v}| = 3\sqrt{2}$

5. $4, 1, 1, |\mathbf{v}| = 3\sqrt{2}$

7. $0, 0, 0, |\mathbf{v}| = 0$

9. Q: $(3, 0, 0), |\mathbf{v}| = \sqrt{2}$

11. Q: $(0, 0, 0), |\mathbf{v}| = \sqrt{41}$

13. Q: $(1, -1, -2), |\mathbf{v}| = 0$

15. Q: $(6, -6, 12), |\mathbf{v}| = \sqrt{56}$

17. [3, 0, 2]

19. [4, −5, 27]

21. [3, 3, −27]

23. $\sqrt{13}, \sqrt{14} + \sqrt{3}$

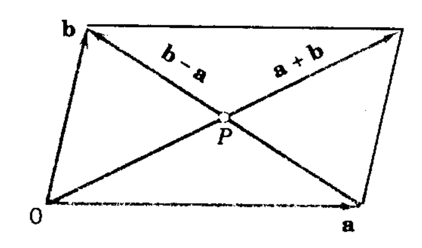
27. [6, 2, 0], $\sqrt{40}$

29. [14, 4, 2], $\sqrt{216}$

31. [−1, −2, 4]

33. $1 \leqq |\mathbf{p} + \mathbf{q}| \leqq 3$, nada sobre la dirección.

35. El vector $\mathbf{r}$ que va de 0 a P es de la forma $\mathbf{r} = k(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. También se tiene $\mathbf{r} = \mathbf{a} + l(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. Así, $k\mathbf{a} + k\mathbf{b} = (1 - l)\mathbf{a} + l\mathbf{b}$. A partir de ésto, $k = 1 - l$, $k = l$; por tanto, $k = 1/2$, $l = 1/2$ y la demostración está completa.



Problemas de la sección 8.2, página 491

1. -10 **3.** 6 **5.** $\sqrt{37}$ **7.** $-21, 21$

9. $\sqrt{122}$ **11.** $\sqrt{6}, 0$ **15.** $2, 0, -2$

17. 0 **19.** 2 **23.** $-8/3$

27. $\pm(1/3)\,[2, 1, -2]$ **29.** $c = -2$ **31.** 0

33. $1/\sqrt{50}$ **35.** $90°$

37. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ son normales; (3) produce el valor $71° = \text{arc cos}\,\sqrt{3/28}$.

39. 55°, 79°, 46°, aproximadamente

41. $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \gamma$, etc.

43. 2 **45.** 0 **47.** $-\sqrt{13}$

49. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leqq |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$

Problemas de la sección 8.3, página 500

1. $[0, 0, 3], [0, 0, -3]$ **3.** $[1, -1, 1], \sqrt{3}, 5$

5. $[3, 0, -6]$ **7.** $[1, -1, 1]$ **9.** $\mathbf{0}$ **11.** $[-9, -9, 45]$

13. $[2, 3, 1], 3$ **15.** $1, -1$ **17.** $[-3, 39, 0]$ **19.** -87

21. 3 **23.** 180 **27.** $\mathbf{0}$ **29.** $[13, -10, 14]$

31. $[-12, -12, -6]$ **33.** 10 **35.** 9

37. $\sqrt{34}$ **39.** $\frac{1}{2}\sqrt{53}$ **41.** $3x - 2y + 4z = 0$

43. $4x + z = 5$ **45.** 8 **47.** 4

49. $1/6$ **51.** $7/6$ **53.** Sí **55.** No

59. Esto se excluye a partir de (15) sustituido por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Problemas de la sección 8.4, página 507

9. $f(x, 2x^2) = x^2 + 16x^4$ **11.** Planos paralelos

13. Cilindros coaxiales **15.** Conos de revolución

17. Elipsoides de revolución **19.** Elipses $3x^2 + y^2 = const$

27. $x^2 + y^2 = const,\ x/y = const$ **29.** $y^2 + x^4 = const,\ y = cx^2$

31. $[1, 2t, 0], [0, 2, 0], \sqrt{1 + 4t^2}, 2$

33. $[-3 \operatorname{sen} t, 2 \cos t, 0], [-3 \cos t, -2 \operatorname{sen} t, 0], \sqrt{9 \operatorname{sen}^2 t + 4 \cos^2 t}, \sqrt{9 \cos^2 t + 4 \operatorname{sen}^2 t}$

35. $[-3 \operatorname{sen} t, 3 \cos t, 4], [-3 \cos t, -3 \operatorname{sen} t, 0], 5, 3$

37. $[-\operatorname{sen} t, 2 \cos 2t, 0], [-\cos t, -4 \operatorname{sen} 2t, 0], \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 4 \cos^2 2t}, \sqrt{\cos^2 t + 16 \operatorname{sen}^2 2t}$

39. $[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]$ **41.** $[y, 0, 0], [x, z, 0], [0, y, 0]$

43. $[0, 0, 2x], [2y, 0, 0], [0, 2z, 0]$

45. $-6t - 3$ **47.** $32t^7 - 216t^5 - 4t^3 - 3t^2$

Problemas de la sección 8.5, página 514

1. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = (-3 + 3t)\mathbf{i} + \mathbf{j} - (2 + t)\mathbf{k}$

5. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

7. $\mathbf{r}(t) = (3 + 2t)\mathbf{i} - (1 + 4t)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

9. $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j} + (-2 + 5t)\mathbf{k}$

11. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$

13. $\mathbf{r}(t) = (1 - 2t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

15. $xy = 1, z = 0$

17. $4y^2 + (z - 2)^2 = 4, x = 0$

19. $x^2 - \frac{1}{4}y^2 = 1, z = 0$

21. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

23. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

25. $\mathbf{r}(t) = 3\cosh t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{senh} t\,\mathbf{j}$

27. $\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos t)\mathbf{i} + (-2 + \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

31. (a) $\mathbf{u} = (1 + 4t^2)^{-1/2}(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j})$, (b) $\mathbf{u}(P) = 5^{-1/2}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$, (c) $(1 + w)\mathbf{i} + (1 + 2w)\mathbf{j}$

33. (a) $\mathbf{u} = (1 + 9t^4)^{-1/2}(\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j})$, (b) $\mathbf{u}(P) = 145^{-1/2}(\mathbf{i} + 12\mathbf{j})$, (c) $(2 + w)\mathbf{i} + (8 + 12w)\mathbf{j}$

35. (a) $\mathbf{u} = (4\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)^{-1/2}(-2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})$, (b) $\mathbf{u}(P) = (2/5)^{1/2}(-2^{1/2}\mathbf{i} + 2^{-1/2}\mathbf{j})$, (c) $2^{1/2}(1 - w)\mathbf{i} + 2^{-1/2}(1 + w)\mathbf{j}$

37. (a) $\mathbf{u} = (1/5)(-3\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$, (b) $t = \frac{1}{2}\pi$, $\mathbf{u}(P) = (1/5)(-3\mathbf{i} + 4\mathbf{k})$, (c) $-3w\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + (2\pi + 4w)\mathbf{k}$

39. $\operatorname{senh} 1 = 1.175$

41. $8(\sqrt{1000} - 1)/27 = 9.073$

43. Start from $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$.

Problemas de la sección 8.6, página 520

1. Eje x positivo, $3\mathbf{i}$, 3, $\mathbf{0}$

3. Eje z positivo, $8t\mathbf{k}$, $8t$, $8\mathbf{k}$

5. Círculo, $-6\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{i} + 6\cos 2t\,\mathbf{j}$, 6, $-12\cos 2t\,\mathbf{i} - 12\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{j}$

7. Hipérbola $xy = 1, x > 0$, $e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}$, $(2\cosh 2t)^{1/2}$, $e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$

9. Segmento $-1 \leqq y \leqq 1$ sobre el eje y, $\cos t\,\mathbf{j}$, $|\cos t|$, $-\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

11. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{a}_0 t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$ ($\mathbf{a}_0$, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{r}_0$ vectores constantes)

13. (a) $\cos t\,\mathbf{j}$, $-\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, (b) at $\pm\mathbf{j}$, (c) at $\pm\mathbf{j}$

15. $[3\operatorname{sen} t\cos t/(\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t)](\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - 2\cos t\,\mathbf{j})$

17. $\mathbf{v}(0) = 2\omega R\mathbf{i}$, $\mathbf{a}(0) = -\omega^2 R\mathbf{j}$, $\mathbf{v}(\pi/\omega) = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}(\pi/\omega) = \omega^2 R\mathbf{j}$

19. $|\mathbf{a}| = \omega^2 R = |\mathbf{v}|^2/R = 30^2/(30 \cdot 86400 \cdot 365/2\pi) = 5.98 \cdot 10^{-6}$ [km/s^2]

21. $R = 3960 + 80$ mi $= 2.133 \cdot 10^7$ pies, $g = |\mathbf{a}| = \omega^2 R = |\mathbf{v}|^2/R$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{gR} = \sqrt{6.61 \cdot 10^8} = 25700$ [pies/s] $= 17500$ [mi/h]

Problemas de la sección 8.7, página 523

3. $\mathbf{r}(t) = [t, \; y(t), \; 0]$, $\mathbf{r}' = [1, \; y', \; 0]$, $\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r}' = 1 + y'^2$, $\mathbf{r}'' = [0, \; y'', \; 0]$, etc.

5. $2/(1 + 4x^2)^{3/2}$

7. $a/(a^2 + c^2)$

9. $6/\sqrt{t}\,(4 + 9t)^{3/2}$

15. $3/(1 + 9t^2 + 9t^4)$

Problemas de la sección 8.8, página 526

1. $(e^{2t} + \text{sen}\, t \cos t)/\sqrt{e^{2t} + \text{sen}^2 t}$
3. $(\cos t)^{(\sin t)-1}[\cos^2 t \ln(\cos t) - \text{sen}^2 t]$
5. $(2 + 3e^t - e^{3t})/(e^{2t} + e^{-t})^2$
7. $e^{2u}\, \text{sen}\, 2v,\ e^{2u} \cos 2v$
9. $-(u^2 + v^2)^{-3}u,\ -(u^2 + v^2)^{-3}v$

Problemas de la sección 8.9, página 533

1. $y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
3. $2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$
5. $y^{-1}\mathbf{i} - xy^{-2}\mathbf{j}$
7. $e^x\, \text{sen}\, y\, \mathbf{i} + e^x \cos y\, \mathbf{j}$
9. $(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$
11. $-(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$
13. $-2z(x^2 + y^2)^{-2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + (x^2 + y^2)^{-1}\mathbf{k}$
15. $4yz(y^2 + z^2)^{-2}(z\mathbf{i} - y\mathbf{j})$
17. $x - y + z$
19. e^{xy}
21. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$
23. $x/y + \frac{1}{2}z^2$
29. $1/\sqrt{5}$
31. $-\sqrt{2}$
33. 0
35. $-2e^2/\sqrt{13}$
37. $7/3$
39. $0.8\mathbf{i} - 0.6\mathbf{j}$
41. $0.6\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j}$
43. $\mathbf{j}$
45. $(1/5\sqrt{2})(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$
47. La dirección de $-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
49. The direction of $6\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

Problemas de la sección 8.10, página 537

1. 3
3. $2x^2z$
5. 0
7. $(x + y)^2$
9. 0
11. 28
13. 0
15. $2xz/y^3$
17. $6x\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
19. $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$
25. $(a + b + c)(xyz + 1)e^{xyz}$
27. $2(x^2 + x - y^2 - y)e^{x+y}$

Problemas de la sección 8.11, página 540

1. $\mathbf{k}$
3. $\mathbf{0}$
5. 0
7. $e^x[\text{sen}\, z\, (\mathbf{i} - \mathbf{j}) + \cos z\, \mathbf{k}]$
9. $-3y(x^2 + y^2)^{-1}\mathbf{k}$
11. rot $\mathbf{v} = -2z\mathbf{i}$, incompresible $\mathbf{r} = c_1\mathbf{i} + (c_3{}^2t + c_2)\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$
13. curl $\mathbf{v} = -2\mathbf{k}$, incompressible, $x' = y,\ y' = -x,\ x^2 + y^2 = c_1,\ z = c_2$
15. curl $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, div $\mathbf{v} = 2$, compresible $\mathbf{r} = c_1e^t\mathbf{i} + c_2e^t\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$
23. $(1 - y)\mathbf{i} + (1 - z)\mathbf{j} + (1 - x)\mathbf{k}$
25. $2(xz + xy + yz)$
27. $-yz - zx - xy,\ (yz - x^2)\mathbf{i} + (xz - y^2)\mathbf{j} + (xy - z^2)\mathbf{k}$
29. $z(y - x)\mathbf{i} + x(z - y)\mathbf{j} + y(x - z)\mathbf{k}$

Capítulo 8 (cuestionario y problemas de repaso), página 547

21. $[1, 1, -3]$
23. $[16, -20, 44]$
25. $\sqrt{33},\ 3 - \sqrt{14}$
27. $19, 19, 4, 4$
29. $\pm[7, -1, -3]$
31. $0, 0$
33. $-15, 30$
35. $[-3, 5, -6]$
37. $55.5°$
39. 25
41. 0
43. -27
45. 1
47. $-6/\sqrt{35}$
49. If $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ o $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales
51. $-17\mathbf{k}$

53. [21, −3, −1] **55.** [1, −2, 1] **57.** 57
59. 7/6 **61.** $7x - 8y + 6z = 5$ **63.** [256, −4, 1]
65. −2 **67.** $2x^2 + 4(y - z)^2$ **69.** $4xy(4z(x^2 + y^2) + 1)$
71. 0 **73.** 0 **75.** $4\sqrt{2}$
77. $84/\sqrt{481}$ **79.** Hipérbola $\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j}$, $\frac{1}{4}\sqrt{17}$, $\frac{1}{4}\mathbf{j}$

Problemas de la sección 9.1, página 560

1. 2/3 **3.** 82/81 **5.** −38.4 **7.** 6π **9.** 3/2
11. $-e^{-3} + \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{26}{3}$ **13.** −60 **15.** 0
17. −32/3 **19.** $80\sqrt{10}$ **21.** 5 **23.** $3\pi/2$

Problemas de la sección 9.2, página 568

1. $f = 4x - 3y^2 + 5z$; 6 **3.** $f = x^2 + y^3z$; 20
5. $f = x^3y^2z^4$; −324 **7.** $f = -\cos xy$; 2
9. $f = x^2yz^2/2$; $a^2bc^2/2$ **11.** No
13. $f = xe^y - ze^x$; $ae^b - ce^a$ **15.** $f = \operatorname{sen} xy - z$; $\operatorname{sen} ab - c$
17. $f = x^2e^{2z}/2$; $a^2e^{2c}/2$ **19.** No

Problemas de la sección 9.3, página 575

1. 11/6 **3.** 1/8 **5.** $\pi/4$ **7.** $(1 - e^{-4})/2$ **9.** 1/12
11. 2/3 **13.** $a^3/3$ **15.** 8/15 **17.** $\pi/2$
19. $\pi(e^{-1} - e^{-4})$ **21.** 1 **23.** 1
25. $2b/3$, $h/3$ **27.** $I_x = bh^3/12$, $I_y = b^3h/4$
29. $I_x = h^3(b + a)/24$, $I_y = h(a^4 - b^4)/48(a - b)$

Problemas de la sección 9.4, página 582

1. $3a^2$ **3.** 24π **5.** 1 **7.** $2 \cdot 5^7/7$ **9.** 10/3
11. $-\frac{1}{6} + e^{-1} + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^3$ **13.** −1/3 **15.** $9a^4\pi/16$
17. $a^2(3\pi/8 - 1)$ **19.** $4e^2 - 4$ **21.** 80π
23. 2 **25.** $2e - 15/4$ **27.** $4e^4 - 4$ **29.** 16π

Problemas de la sección 9.5, página 588

1. Rectas **k**
3. $x^2/16 + y^2/4 = 1$, rectas, elipses, $2\cos u\,\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} u\,\mathbf{j}$
5. $z = c\sqrt{x^2 + y^2}$, círculos, rectas, $-cu\cos v\,\mathbf{i} - cu\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
7. $z = x^2 + y^2$, círculos, parábolas $-2u^2\cos v\,\mathbf{i} - 2u^2\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
9. $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$, elipses, parábolas
$-2bu^2\cos v\,\mathbf{i} - 2au^2\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + abu\mathbf{k}$

11. $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 + 1 = 0$, elipses, hipérbolas
$-bc \operatorname{senh}^2 u \cos v\, \mathbf{i} - ac \operatorname{senh}^2 u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + ab \cosh u \operatorname{senh} u\, \mathbf{k}$

13. $u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + v\mathbf{k},\ -\mathbf{j} + \mathbf{k}$

15. $u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (1 - u - v)\mathbf{k},\quad \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

17. $\cosh u\, \mathbf{i} + \operatorname{senh} u\, \mathbf{j} + v\mathbf{k}$, $\cosh u\, \mathbf{i} - \operatorname{senh} u\, \mathbf{j}$

19. $u \cos v\, \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + 16u^2\mathbf{k},\ -32u^2 \cos v\, \mathbf{i} - 32u^2 \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + u\mathbf{k}$

21. $u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 16(u^2 + v^2)\mathbf{k},\ -32u\mathbf{i} - 32v\mathbf{j} + \mathbf{k}$

25. $\mathbf{r}_u$ es tangente a las curvas v = *constante* y $\mathbf{r}_v$ es tangente a u = *constante*.

27. $(1/\sqrt{38})(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$

29. $(1/3)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

31. $(1/a)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$

33. $(x^2 + y^2 + 1)^{-1/2}(-y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k})$

37. $z^* = 2\sqrt{2} + y^*$

39. $3x^* + 4y^* = 25$

Problemas de la sección 9.6, página 598

1. -16 **3.** $2e^3 - 3e^2 + 1$ **5.** 7π **7.** -1250π

9. $17h/4$ **11.** $-59/180$ **13.** $-53/2$

15. $2\cosh^3 2 - 2 \approx 104.5$ **17.** $3\sqrt{3}$ **19.** $\pi a^3 h^3/6$

21. $17^{5/2}\pi/6$ **23.** $10^{3/2} - 1$ **25.** $3^{5/2} - 2^{7/2} + 1$

29. $2\pi h$ **31.** $\pi h^4/\sqrt{2}$ **33.** $h\pi + 2h^3\pi/3$

35. Use $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\, du + \mathbf{r}_v\, dv$.

Problemas de la sección 9.7, página 605

1. $8/27$ **3.** 96π **5.** $1/120$ **7.** $8\pi^2$ **9.** $19/180$

11. $2/3$ **13.** $\pi h a^4/2$ **15.** $8\pi a^5/15$ **17.** 16 **19.** $6\pi a^2 h$

21. 2π **23.** $1/6$ **25.** $40\pi/3$ **27.** $384\pi/5$ **29.** $-\pi/8$

Problemas de la sección 9.8, página 611

3. Hacer $f = g$ en (10). **5.** Use (11). **9.** $r = a$, $\cos\phi = 1$

Problemas de la sección 9.9, página 618

1. ± 3 **3.** ± 6 **5.** $\pm(e^2 - 1)$

7. $\pm 2(1 - e^2)$ **11.** 24π **13.** 2π

15. $-1/3$ **17.** $-2/3$ **19.** $-18\pi\sqrt{2}$

Capítulo 9 (cuestionario y problemas de repaso), página 619

17. $2/3$ **19.** $e^2/2$ **21.** $\pm 25\pi$ **23.** 0 **25.** $e^4 + 15$

27. $\pm 12\pi$ **29.** 0 **31.** $8e^{-24}$ **33.** 0

35. $\pm(1 - \cosh 1)$ **37.** $(e^2 - 1)^2/2$ **39.** $1/8$

41. 189/20 **43.** 4/5, 8/15 **45.** $8a/5\pi$, $8a/5\pi$

47. $3\cos u\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,u\,\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, $3\cos u\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,u\,\mathbf{j}$

49. $u\cos v\,\mathbf{i} + u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, $-u\cos v\,\mathbf{i} - u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}$

51. $2u\cos v\,\mathbf{i} + u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$, $-2u^2\cos v\,\mathbf{i} - 4u^2\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + 2u\mathbf{k}$

53. 5/216 **55.** 4/9 **57.** $-4/3 + 8\pi/3$ **59.** 40

Apéndice

3

Material auxiliar

A3.1 FÓRMULAS PARA FUNCIONES ESPECIALES

Respecto a tablas de valores numéricos, consultar el apéndice 5.

Función exponencial e^x (figura 519)

$$e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71353$$

(1) $$e^x e^y = e^{x+y}, \qquad e^x/e^y = e^{x-y}, \qquad (e^x)^y = e^{xy}$$

Logaritmo natural (figura 520)

(2) $$\ln (xy) = \ln x + \ln y, \qquad \ln (x/y) = \ln x - \ln y, \qquad \ln (x^a) = a \ln x$$

$\ln x$ es la inversa de e^x, y $e^{\ln x} = x$, $e^{-\ln x} = e^{\ln (1/x)} = 1/x$.

Logaritmo base diez $\log_{10} x$, o simplemente $\log x$.

(3) $$\log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\ 18917$$

(4) $$\ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914\ 54684$$

$\log x$ es la inversa de 10^x, y $10^{\log x} = x$, $10^{-\log x} = 1/x$.

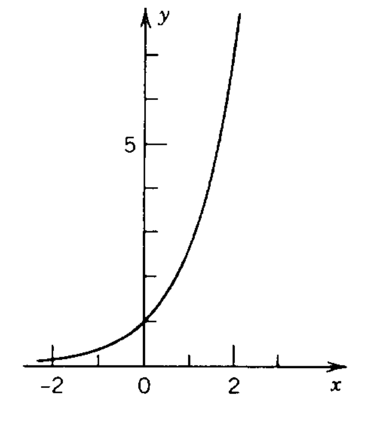


Figura 519. Función exponencial e^x.

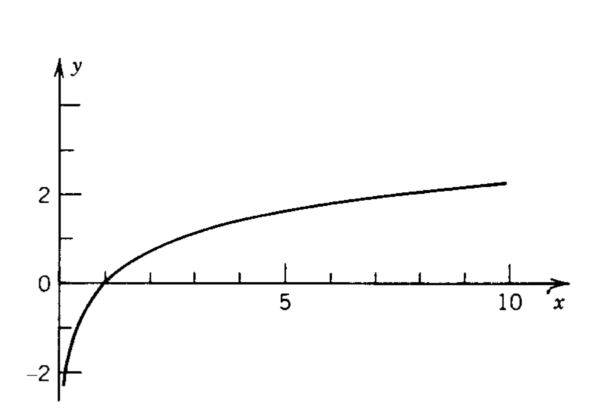


Figura 520. Logaritmo natural $\ln x$.

Funciones seno y coseno (figuras 521, 522). En cálculo, los ángulos se miden en radianes, de modo que sen x y cos x tienen periodo 2π.

sen x es impar, sen x = sen $(-x)$, y cos x es par, cos $(-x) = \cos x$.

$$1° = 0.01745\ 32925\ 19943 \text{ radian}$$

$$1 \text{ radian} = 57°\ 17'\ 44.80625''$$

$$= 57.29577\ 95131°$$

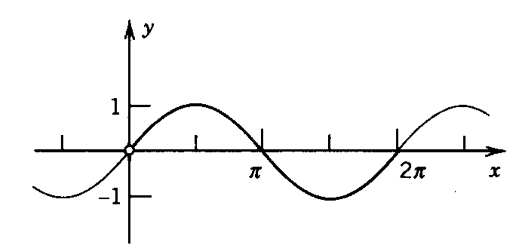


Figura 521. sen x.

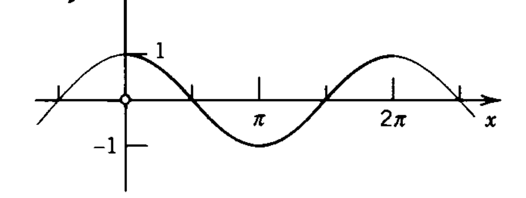


Figura 522. cos x.

(5) $$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

(6) $$\begin{cases} \text{sen}(x + y) = \text{sen}\, x \cos y + \cos x\, \text{sen}\, y \\ \text{sen}(x - y) = \text{sen}\, x \cos y - \cos x\, \text{sen}\, y \\ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y \\ \cos(x - y) = \cos x \cos y + \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y \end{cases}$$

(7) $$\text{sen}\, 2x = 2\, \text{sen}\, x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

(8) $$\begin{cases} \text{sen}\, x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$$

(9) $$\text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\, x, \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(10) $$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x), \qquad \text{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(11) $$\begin{cases} \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y = \tfrac{1}{2}[-\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\ \cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\ \text{sen}\, x \cos y = \tfrac{1}{2}[\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y)] \end{cases}$$

(12) $$\begin{cases} \text{sen}\, u + \text{sen}\, v = 2\, \text{sen}\, \dfrac{u + v}{2} \cos \dfrac{u - v}{2} \\ \cos u + \cos v = 2 \cos \dfrac{u + v}{2} \cos \dfrac{u - v}{2} \\ \cos v - \cos u = 2\, \text{sen}\, \dfrac{u + v}{2}\, \text{sen}\, \dfrac{u - v}{2} \end{cases}$$

(13) $$A \cos x + B\, \text{sen}\, x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \pm \delta), \quad \tan \delta = \frac{\text{sen}\, \delta}{\cos \delta} = \mp \frac{B}{A}$$

(14) $$A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x = \sqrt{A^2 + B^2}\,\mathrm{sen}(x \pm \delta), \quad \tan\delta = \frac{\mathrm{sen}\,\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{A}{B}$$

Tangente, cotangente, secante, cosecante (figuras 523, 524)

(15) $$\tan x = \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\mathrm{sen}\,x}$$

(16) $$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

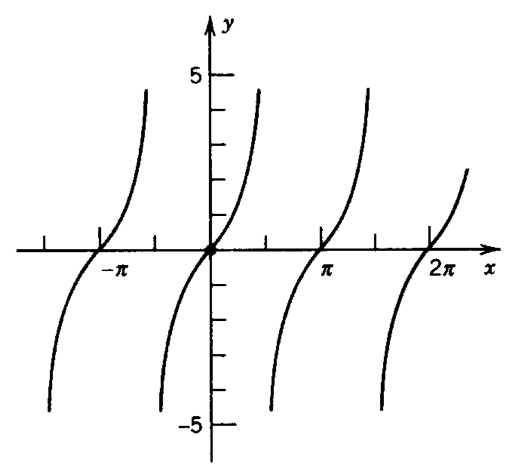


Figura 523. tan *x*.

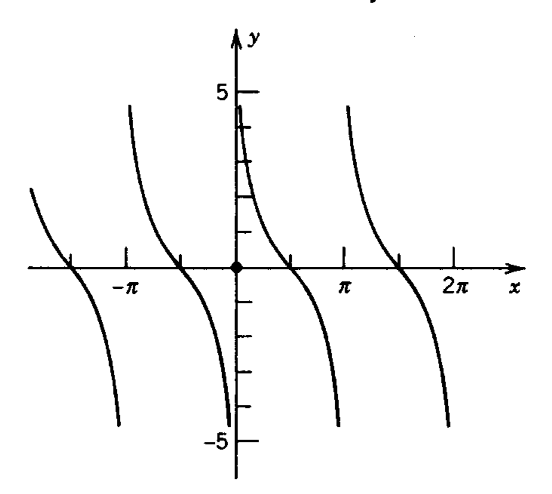


Figura 524. cot *x*.

Funciones hiperbólicas (seno hiperbólico senh, etc.; figuras 525, 526)

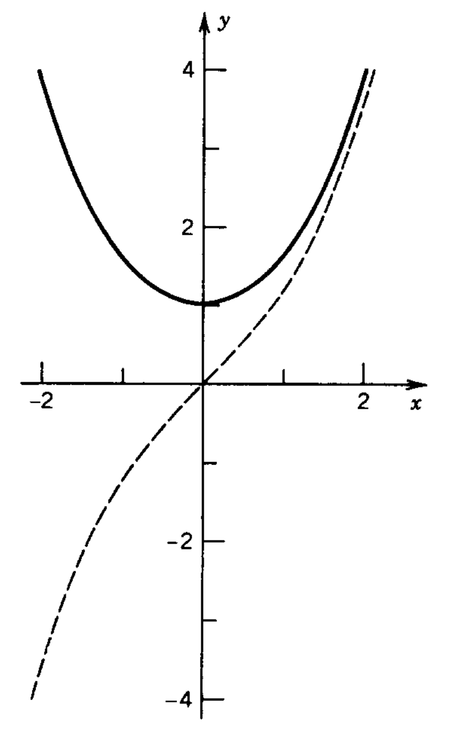


Figura 525. senh *x* (línea discontinua) y cosh *x*.

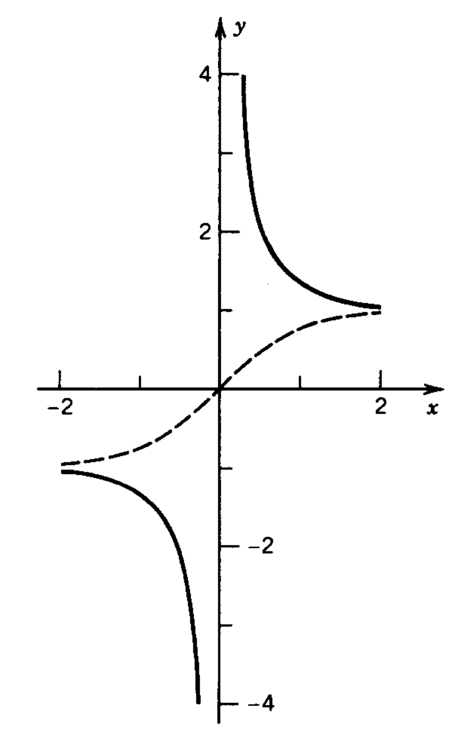


Figura 526. tanh *x* (línea discontinua) y coth *x*.

(17) $$\operatorname{senh} x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

(18) $$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

(19) $$\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x, \qquad \cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$$

(20) $$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

(21) $$\operatorname{senh}^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \qquad \cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

(22) $$\begin{cases} \operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y \\ \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \end{cases}$$

(23) $$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

Función gamma (figura 527 en la tabla A2 del apéndice 5). La función gamma $\Gamma(\alpha)$ está definida por la integral

(24) $$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt \qquad (\alpha > 0)$$

que tiene sentido sólo si $\alpha > 0$ (o, si se considera α complejo, para aquéllos α cuya parte real es positiva). Al integrar por partes se obtiene la importante *relación funcional de la función gamma*,

(25) $$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

A partir de (24) se obtiene fácilmente $\Gamma(1) = 1$; por tanto, si α es un entero positivo, por ejemplo k, entonces mediante la aplicación repetida de (25) se obtiene

(26) $$\Gamma(k + 1) = k! \qquad (k = 0, 1, \cdots).$$

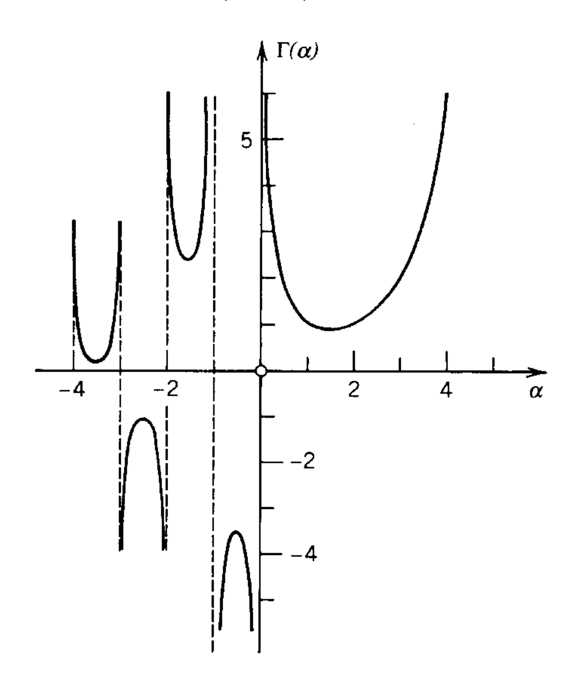


Figura 527. Función gamma.

Lo anterior muestra que *la función gamma puede considerarse como una generalización de la función factorial elemental.*[Algunas veces, para $\Gamma(\alpha)$ se usa la notación $(\alpha - 1)!$, inclusive para valores no enteros de α, y la función gamma también se denomina **función factorial**].

Por aplicación repetida de (25) se obtiene

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

y esta relación puede usarse

(27) $$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots)$$

para definir la función gamma para $\alpha(\neq -1, -2, \cdots)$ negativo, eligiendo para k el menor entero tal que $\alpha + k + 1 > 0$. *Junto con* (24), *entonces con ésto se obtiene una definición de* $\Gamma(\alpha)$ *para todo diferente de cero o para un entero negativo* (figura 527).

Es posible demostrar que la función gamma también puede representarse como el límite de un producto, a saber, mediante la fórmula

(28) $$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots).$$

A partir de (27) o (28) se observa que, para α complejo, la función gamma $\Gamma(\alpha)$ es una función meroforma que tiene polos simples en $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$.

Una aproximación de la función gamma para un gran α positivo está definida por la **fórmula de Stirling**

(29) $$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha}$$

en donde e es la base del logaritmo natural. Por último, se menciona el valor especial

(30) $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Funciones gamma incompletas

(31) $$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt, \qquad Q(\alpha, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt \qquad (\alpha > 0)$$

(32) $$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

Función beta

(33) $$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1}\, dt \qquad (x > 0, y > 0)$$

Representación en términos de funciones gamma:

(34) $$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Función de error (figura 528 y tabla A4 en el apéndice 5)

(35) $$\operatorname{fer} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

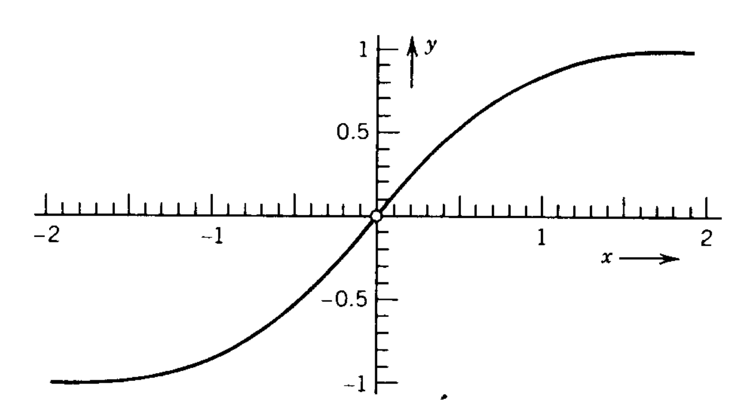


Figura 528. Función de error.

(36) $$\operatorname{fer} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots\right)$$

$\operatorname{fer}(\infty) = 1$, *función de error complementaria*

(37) $$\operatorname{ferc} x = 1 - \operatorname{fer} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\, dt$$

Integrales de Fresnel[1] (figura 529)

(38) $$C(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt, \qquad S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\, dt$$

$C(\infty) = \sqrt{\pi/8}$, $S(\infty) = \sqrt{\pi/8}$, *funciones complementarias*

(39) $$c(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\, dt$$
$$s(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - S(x) = \int_x^\infty \operatorname{sen}(t^2)\, dt$$

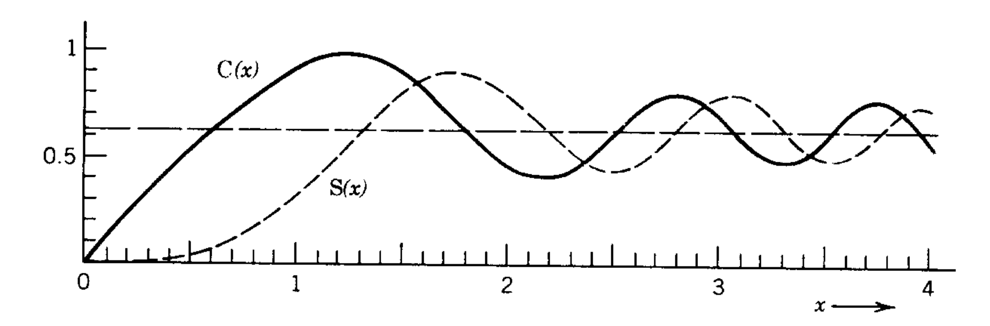


Figura 529. Integrales de Fresnel.

[1] AUGUSTIN FRESNEL (1788-1827), físico y matemático francés. Respecto a tablas, consultar la referencia [1].

Integral del seno (figura 530 y tabla A4 del apéndice 5)

$$\text{Is}(x) = \int_0^x \frac{\text{sen}\, t}{t}\, dt \tag{40}$$

$\text{Is}(\alpha) = \pi/2$, *función complementaria*

$$\text{is}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Is}(x) = \int_x^\infty \frac{\text{sen}\, t}{t}\, dt \tag{41}$$

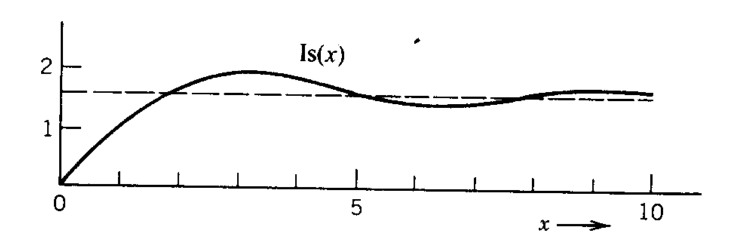


Figura 530. Integral del seno.

Integral del coseno (tabla A4 del apéndice 5)

$$\text{ic}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt \qquad (x > 0) \tag{42}$$

Integral exponencial

$$\text{Ie}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt \qquad (x > 0) \tag{43}$$

Integral logarítmica

$$\text{Il}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \tag{44}$$

A3.2 DERIVADAS PARCIALES

Respecto a fórmulas para diferenciar, consultar la portada interior

Sea $z = f(x, y)$ una función real de dos variables independientes, x y y. Si se mantiene constante y, por ejemplo $y = y_1$ y se considera que x es una variable, entonces $f(x, y_1)$ depende sólo de x. Si existe la derivada de $f(x, y_1)$ con respecto a x para un valor $x = x_1$, entonces el valor de esta derivada se denomina **derivada parcial** de $f(x, y_1)$ *con respecto a x en el punto* (x_1, y_1) y se denota por

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)} \quad \text{o por} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)}$$

Otras notaciones son

$$f_x(x_1, y_1) \quad \text{y} \quad z_x(x_1, y_1);$$

que pueden usarse cuando no se utilizan subíndices para otro efecto y no existe peligro de confusión.

Por tanto, por la definición de derivada se tiene

$$(1) \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_1,\, y_1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x, y_1) - f(x_1, y_1)}{\Delta x}.$$

La derivada parcial de $z = f(x, y)$ con respecto a y se define de manera semejante; ahora se mantiene constante x, por ejemplo igual a x_1, y se deriva $f(x_1, y)$ con respecto a y. Así,

$$(2) \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_1,\, y_1)} = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_1,\, y_1)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_1, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1)}{\Delta y}.$$

Otras notaciones son $f_y(x_1, y_1)$ y $z_y(x_1, y_1)$.

Resulta evidente que los valores de estas dos derivadas parciales dependen en general del punto (x_1, y_1). Por tanto, las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en un punto variable son funciones de x y y. La función $\partial z/\partial x$ se obtiene como en cálculo ordinario, derivando $z = f(x, y)$ con respecto a x, *considerando a y como constante*, y $\partial z/\partial y$ se obtiene derivando $z = f(x, y)$ con respecto a y, *considerando a x como constante*.

Ejemplo 1 Sea $z = f(x, y) = x^2y + x \operatorname{sen} y$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \operatorname{sen} y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x \cos y. \qquad ∎$$

Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ de una función $z = f(x, y)$ tienen una **interpretación geométrica** muy simple. La función $z = f(x, y)$ puede representarse por medio de una superficie en el espacio. La ecuación $y = y_1$ representa entonces un plano vertical que corta la superficie de una curva, y la derivada parcial $\partial z/\partial x$ en un punto (x_1, y_1) es la pendiente de la tangente (es decir, tan α en donde α es el ángulo que se observa en la figura 531) a la curva. De manera semejante, la derivada parcial $\partial z/\partial y$ en (x_1, y_1) es la pendiente de la tangente a la curva $x = x_1$ sobre la superficie $z = f(x, y)$ en (x_1, y_1).

Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ se denominan *primeras derivadas parciales* o *derivadas parciales de primer orden*. Al derivar estas derivadas una vez más se obtienen las *segundas derivadas parciales* (o *derivadas parciales de segundo orden*)[2].

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}. \end{aligned}$$

Puede demostrarse que si todas las derivadas con que se trabaja son continuas, entonces dos derivadas parciales mezcladas son iguales, de modo que entonces no importa el orden de derivación (consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [5].), es decir,

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}.$$

[2] ¡Precaución! En la notación con subíndices, éstos se escriben en el orden en que se deriva, mientras que en la notación "∂" el orden es opuesto.

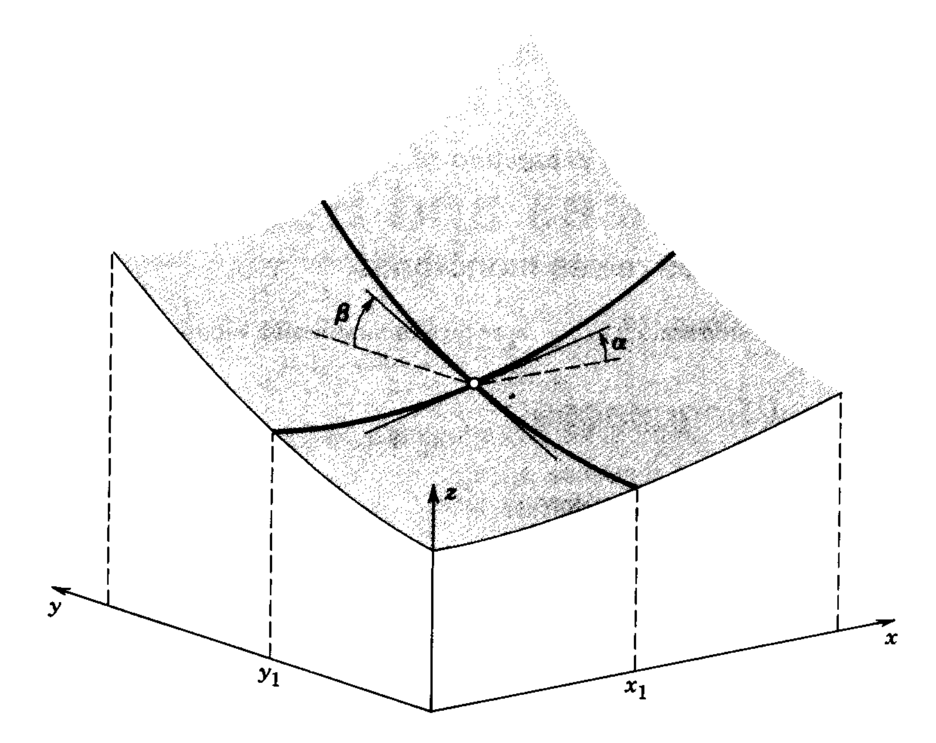


Figura 531. Interpretación geométrica de las primeras derivadas parciales.

Ejemplo 2. Para la función del ejemplo 1,

$$f_{xx} = 2y, \qquad f_{xy} = 2x + \cos y = f_{yx}, \qquad f_{yy} = -x \operatorname{sen} y. \qquad \blacksquare$$

Al derivar las segundas derivadas parciales nuevamente con respecto a x y y, respectivamente, se obtienen las *terceras derivadas parciales o derivadas parciales de tercer orden de* f, etc.

Si se considera una función $f(x, y, z)$ de tres variables independientes, entonces se obtienen las tres primeras derivadas parciales $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ y $f_z(x, y, z)$. Aquí f_x se obtiene al derivar f con respecto a x, *considerando a ambas* y y z *como constantes*. Así, por analogía con (1), ahora se tiene

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1, z_1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x, y_1, z_1) - f(x_1, y_1, z_1)}{\Delta x},$$

etc. Al derivar f_x, f_y, f_z nuevamente de esta manera, se obtienen las segundas derivadas parciales de f, etc.

Ejemplo 3. Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Entonces

$$f_x = 2x + y\,e^z, \qquad f_y = 2y + x\,e^z, \qquad f_z = 2z + xy\,e^z,$$

$$f_{xx} = 2, \qquad f_{xy} = f_{yx} = e^z, \qquad f_{xz} = f_{zx} = y\,e^z,$$

$$f_{yy} = 2, \qquad f_{yz} = f_{zy} = x\,e^z, \qquad f_{zz} = 2 + xy\,e^z. \qquad \blacksquare$$

A3.3 SUCESIONES Y SERIES

Consultar también el capítulo 14.

Sucesiones reales monótonas

Una sucesión real $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se denomina **sucesión monótona** si es **monótona creciente**, es decir,

$$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \cdots$$

o es **monótona decreciente**, es decir,

$$x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq \cdots .$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ se denomina **sucesión acotada** si existe una constante positiva K tal que $|x_n| < K$ para todo n.

Teorema 1 ***Si una sucesión real es monótona y acotada, entonces converge.***

Demostración. Sea $x_1, x_2, \cdots, x_n$ una sucesión creciente monótona y acotada. Entonces sus términos son menores que cierto número B y, como $x_1 \leqq x_n$ para todo n, están en el intervalo $x_1 \leqq x_n \leqq B$, que se denotará por I_0. Se biseca I_0; es decir, se subdivide en dos partes de la misma longitud. Si la mitad derecha (junto con sus puntos extremos) contiene términos de la sucesión, se denota por I_1. Si no contiene términos de la sucesión, entonces la mitad izquierda (junto con sus puntos extremos) se denota por I_1. Este es el primer paso.

En el segundo paso se biseca I_1, se elige una mitad aplicando la regla mencionada, y se denomina I_2, y así sucesivamente (ver la figura 532).

De esta manera se obtienen intervalos cada vez más cortos $I_0, I_1, I_2, \cdots$ con las siguientes propiedades. Cada I_m contiene a todos los I_n para $n > m$. Ningún término de la sucesión está a la derecha de I_m y, como la sucesión es monótona creciente, todos los x_n con n mayor que cierto número N están en I_m; por supuesto en general N depende de m. Las longitudes de los I_m tienden a cero cuando m tiende a infinito. Por tanto, existe exactamente un número, denominado L, que está en todos los intervalos,[3] y ahora es fácil demostrar que la sucesión es convergente con límite L.

De hecho, dado un $\epsilon > 0$, se elige un m tal que la longitud de I_m sea menor que ϵ. Entonces, L y todos los x_n con $n > N(m)$ están en I_m y, por consiguiente, $|x_n - L| < \epsilon$ para todos estos n. Así se completa la demostración para una sucesión creciente. Para una sucesión decreciente la

[3] Esta proposición parece evidente, aunque no lo es; puede considerarse como un axioma del sistema de números reales en la forma siguiente. Sean $J_1, J_2, \cdots$, intervalos cerrados tales que cada J_m contiene a todos los J_n con $n > m$, y las longitudes de los J_m tienden a cero cuando m tiende a infinito. Entonces existe exactamente un número real que está contenido en estos intervalos. Este es el **axioma de Cantor-Dedekind**, denominado así en honor de los matemáticos alemanes GEORG CANTOR (1845-1918), creador de la teoría de conjuntos, y RICHARD DEDEKIND (1831-1916), conocido por su obra fundamental sobre teoría de números. Respecto a mayores detalles, consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [2]. (Se dice que un intervalo I es **cerrado** si sus dos puntos extremos se consideran como puntos que pertenecen al intervalo. Se dice que I es **abierto** si sus dos puntos extremos se consideran fuera del intervalo.)

demostración es igual, excepto que es necesario intercambiar correctamente "derecha" e "izquierda" en la construcción de estos intervalos. ∎

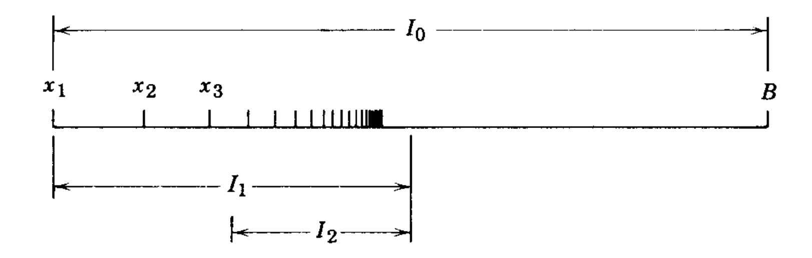


Figura 532. Demostración del teorema 1.

Series reales

Teorema 2 Prueba de Leibniz para series reales.

Sea $x_1, x_2, \cdots, x_n$ real monótona decreciente a cero; es decir,

(1) $$\text{(a) } x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq \cdots, \qquad \text{(b) } \lim_{m\to\infty} x_m = 0.$$

Entonces la serie con términos de signo alternos

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + - \cdots$$

converge, y para el residuo R_n después del n-ésimo término se tiene la estimación

(2) $$|R_n| \leqq x_{n+1}.$$

Demostración. Sea s_n la n-ésima suma parcial de la serie. Entonces, debido a (1a),

$$s_1 = x_1, \qquad s_2 = x_1 - x_2 \leqq s_1,$$

$$s_3 = s_2 + x_3 \geqq s_2, \qquad s_3 = s_1 - (x_2 - x_3) \leqq s_1,$$

de modo que $s_2 \leqq s_3 \leqq s_1$. Procediendo de esta manera se concluye que (figura 533)

(3) $$s_1 \geqq s_3 \geqq s_5 \geqq \cdots \geqq s_6 \geqq s_4 \geqq s_2$$

con lo que se demuestra que las sumas parciales impares constituyen una sucesión monótona acotada, así como las sumas parciales pares. Luego, por el teorema 1, ambas series convergen, por ejemplo,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s, \qquad \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s^*.$$

Entonces, como $s_{2n+1} - s_{2n} = x_{2n+1}$, se observa fácilmente que (1b) implica

$$s - s^* = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0.$$

Por tanto, $s^* = s$ y la serie converge con la suma s.

Se demostrará la estimación (2) para el residuo. Como $s_n \to s$, por (3) se concluye que

$$s_{2n+1} \geqq s \geqq s_{2n} \qquad \text{y también} \qquad s_{2n-1} \geqq s \geqq s_{2n}.$$

Al restar s_{2n} y s_{2n+1}, respectivamente, se obtiene

$$x_{2n+1} \geqq R_{2n} \geqq 0, \qquad 0 \geqq R_{2n-1} \geqq -x_{2n}$$

En estas desigualdades, la primera expresión es igual a x_{2n+1}, la última es igual a $-x_{2n}$, y las expresiones entre los signos de desigualdad son los residuos R_{2n} y R_{2n-1}. Por tanto, las desigualdades pueden escribirse como

y se observa que implican (2). Así se completa la demostración. ∎

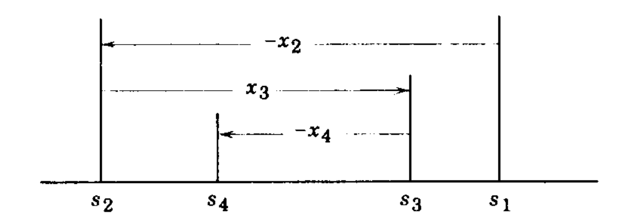


Figura 533. Demostración de la prueba de Leibniz.

Apéndice



Demostraciones adicionales

Sección 2.7, página 120

Demostración del teorema 1 (Unicidad)[1]

Suponiendo que el problema que consta de la ecuación diferencial

(1) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

y las dos condiciones iniciales

(3) $$y(x_0) = K_0, \qquad y'(x_0) = K_1$$

tiene dos soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ en el intervalo I del teorema, se demostrará que su diferencia

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

es idénticamente cero en I; entonces, $y_1 \equiv y_2$ en I, lo cual implica unicidad.

Como (1) es homogénea y lineal, y es una solución de tal ecuación en I, y dado que y_1 y y_2 satisfacen las mismas condiciones iniciales, entonces y satisface las condiciones

(11) $$y(x_0) = 0, \qquad y'(x_0) = 0.$$

Se considerará la función

$$z(x) = y(x)^2 + y'(x)^2$$

y su derivada

$$z' = 2yy' + 2y'y''.$$

Con base en la ecuación diferencial se tiene

$$y'' = -py' - qy.$$

[1] Esta demostración fue sugerida por mi colega, el Prof. A. D. Ziebur. En esta demostración se usan números de fórmula no utilizados en la sección 2.7.

Al sustituir esto en la expresión para z' se obtiene

(12) $$z' = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy'.$$

Así, como y y y' son reales,

$$(y \pm y')^2 = y^2 \pm 2yy' + y'^2 \geqq 0.$$

Con base en esto se obtienen de inmediato las dos desigualdades

(13) (a) $2yy' \leqq y^2 + y'^2 = z$, (b) $-2yy' \leqq y^2 + y'^2 = z$.

Por (13b) se tiene $2yy' \geqq -z$. Juntando lo anterior, $|2yy'| \leqq -z$. Para el último término en (12) ahora se obtiene

$$-2qyy' \leqq |-2qyy'| = |q||2yy'| \leqq |q|z.$$

Usando este resultado, así como $-p \leqq |p|$ y aplicando (13a) al término $2yy'$ en (12) se encuentra

$$z' \leqq z + 2|p|y'^2 + |q|z.$$

Como $y'^2 \leqq y^2 + y'^2$, a partir de esto se obtiene

$$z' \leqq (1 + 2|p| + |q|)z$$

o bien, denotando por h a la función entre paréntesis,

(14a) $$z' \leqq hz \qquad \text{para todo } x \text{ en } I.$$

De manera semejante, con base en (12) y (13) se concluye que

(14b) $$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leqq z + 2|p|z + |q|z = hz. \end{aligned}$$

Las desigualdades (14a) y (14b) son equivalentes a las desigualdades

(15) $$z' - hz \leqq 0, \qquad z' + hz \geqq 0.$$

Factores de integración para las dos expresiones de la izquierda son

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,dx} \qquad \text{y} \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,dx}.$$

Las integrales en los exponentes existen porque h es continua. Como F_1 y F_2 son positivos, entonces a partir de (15) se obtiene

$$F_1(z' - hz) = (F_1 z)' \leqq 0 \qquad \text{y} \qquad F_2(z' + hz) = (F_2 z)' \geqq 0,$$

lo que significa que $F_1 z$ es no creciente y $F_2 z$ es no decreciente en I. Como $z(x_0) = 0$ por (11), entonces se obtiene que cuando $x \leqq x_0$

$$F_1 z \geqq (F_1 z)_{x_0} = 0, \qquad F_2 z \leqq (F_2 z)_{x_0} = 0$$

y de manera semejante, cuando $x \geqq x_0$,

$$F_1 z \leqq 0, \qquad F_2 z \geqq 0.$$

Al dividir entre F_1 y F_2 y observando que estas funciones son positivas, en total se tiene

$$z \leqq 0, \qquad z \geqq 0 \qquad \text{para todo } x \text{ en } I.$$

Lo anterior implica $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ en I. Por tanto, $y \equiv 0$ o $y_1 \equiv y_2$ en I. ∎

Sección 5.4, página 253

Demostración del teorema 2 (Método de Frobenius. Soluciones básicas).

La numeración de las fórmulas en esta demostración es como la del texto en la sección 5.4. Una fórmula adicional que no aparece en esa sección se denominará (A) (ver a continuación).

La ecuación diferencial en el teorema 2 es

$$\text{(1)} \qquad y'' + \frac{b(x)}{x}y' + \frac{c(x)}{x^2}y = 0,$$

en donde $b(x)$ y $c(x)$ son funciones analíticas. La ecuación diferencial puede escribirse como

$$\text{(1')} \qquad x^2y'' + xb(x)y' + c(x)y = 0.$$

La ecuación indicial de (1) es

$$\text{(4)} \qquad r(r-1) + b_0r + c_0 = 0.$$

Las raíces r_1, r_2 de esta ecuación cuadrática determinan la forma general de una base de soluciones de (1), y por tanto existen tres casos posibles, como se muestra en seguida.

Caso 1. (Las raíces no difieren por un entero). Una primera solución de (1) de la forma

$$\text{(5)} \qquad y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$

puede determinarse como en el método de las series de potencias. Respecto a una demostración de que en este caso la ecuación (1) tiene una segunda solución independiente de la forma

$$\text{(6)} \qquad y_2(x) = x^{r_2}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots),$$

consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [A6].

Caso 2 (Raíz doble). La ecuación indicial (4) tiene una raíz doble r si y sólo si $(b_0 - 1)^2 - 4c_0 = 0$, y entonces $r = 1/2(1 - b_0)$. Puede determinarse una primera solución

$$\text{(7)} \qquad y_1(x) = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots), \qquad r = \tfrac{1}{2}(1 - b_0),$$

como en el caso 1. Se demostrará que una segunda solución independiente es de la forma

$$\text{(8)} \qquad y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^r(A_1x + A_2x^2 + \cdots) \qquad (x > 0).$$

Se aplicará el método de reducción de orden (ver la sección 2.7); es decir, se determinará $u(x)$ tal que $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ sea una solución de (1). Al insertar ésto y las derivadas

$$y_2' = u'y_1 + uy_1', \qquad y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

en la ecuación diferencial (1') se obtiene

$$x^2(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + xb(u'y_1 + uy_1') + cuy_1 = 0.$$

Como y_1 es una solución de (1'), la suma de los términos en que aparece u es cero, y esta ecuación se reduce a

$$x^2y_1u'' + 2x^2y_1'u' + xby_1u' = 0.$$

Al dividir entre x^2y_1 e insertar la serie de potencias de b, se obtiene

$$u'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{b_0}{x} + \cdots\right)u' = 0.$$

Aquí y en lo que sigue los puntos designan términos que son constantes o implican potencias positivas de x. Así, a partir de (7) se concluye que

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{x^{r-1}[ra_0 + (r+1)a_1x + \cdots]}{x^r[a_0 + a_1x + \cdots]}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{ra_0 + (r+1)a_1x + \cdots}{a_0 + a_1x + \cdots}\right) = \frac{r}{x} + \cdots.$$

Por tanto, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\text{(A)} \qquad u'' + \left(\frac{2r + b_0}{x} + \cdots\right)u' = 0.$$

Como $r = (1 - b_0)/2$, el término $(2r + b_0)/x$ es igual a $1/x$, y al dividir entre u' se obtiene

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{1}{x} + \cdots.$$

Por integración se obtiene $\ln u' = -\ln x + \ldots$, y por tanto $u' = (1/x)e^{(\cdots)}$. Al desarrollar la función exponencial en potencias de x e integrar una vez más, se observa que u es de la forma

$$u = \ln x + k_1x + k_2x^2 + \cdots.$$

Insertando lo anterior en $y_2 = uy_1$, para y_2 se obtiene una representación de la forma (8).

Caso 3. (Raíces que difieren por un entero). Se escribe $r_1 = r$ y $r_2 = r - p$, en donde p es un entero ***positivo***. Una primera solución

$$\text{(9)} \qquad y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$

puede determinarse como en los casos 1 y 2. Se demostrará que una segunda solución independiente es de la forma

(10) $$y_2(x) = ky_1(x) \ln x + x^{r_2}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots)$$

en donde puede tenerse $k \neq 0$ o $k = 0$. Así como en el caso 2, se hace $y_2 = uy_1$. Los primeros pasos son literalmente como en el caso 2 y se obtiene la ecuación (A),

$$u'' + \left(\frac{2r + b_0}{x} + \cdots\right) u' = 0.$$

Luego, por álgebra elemental, los coeficientes $b_0 - 1$ de r en (4) son iguales al negativo de la suma de las raíces,

$$b_0 - 1 = -(r_1 + r_2) = -(r + r - p) = -2r + p.$$

Por tanto, $2r + b_0 = p + 1$, y al dividir entre u' se obtiene

$$\frac{u''}{u'} = -\left(\frac{p+1}{x} + \cdots\right).$$

Los pasos siguientes son como en el caso 2. Integrando se encuentra

$$\ln u' = -(p + 1) \ln x + \cdots, \qquad \text{así,} \qquad u' = x^{-(p+1)}e^{(\cdots)}$$

en donde los puntos representan alguna serie de potencias enteras no negativas de x. Al desarrollar la función exponencial como antes, se obtiene una serie de potencias de la forma

$$u' = \frac{1}{x^{p+1}} + \frac{k_1}{x^p} + \cdots + \frac{k_{p-1}}{x^2} + \frac{k_p}{x} + k_{p+1} + k_{p+2}x + \cdots.$$

Se integra una vez más. Escribiendo primero el término logarítmico resultante, se obtiene

$$u = k_p \ln x + \left(-\frac{1}{px^p} - \cdots - \frac{k_{p-1}}{x} + k_{p+1}x + \cdots\right).$$

Entonces, por (9) para $y_2 = uy_1$ se obtiene la fórmula

$$y_2 = k_p y_1 \ln x + x^{r_1 - p}\left(-\frac{1}{p} - \cdots - k_{p-1}x^{p-1} + \cdots\right)(a_0 + a_1x + \cdots).$$

Pero ésta es de la forma (10) con $k = k_p$, ya que $r_1 - p = r_2$ y el producto de las dos series implica sólo potencias enteras no negativas de x. ∎

Sección 5.8, página 280

Teorema (Realidad de los eigenvalores)

Si p, q, r y r' en la ecuación de Sturm-Liouville (1) *de la sección* 5.8 *asumen valores reales y son continuos en el intervalo $a \leqq x \leqq b$ y $p(x) > 0$ en todo este intervalo (o $p(x) < 0$ en*

todo este intervalo), entonces todos los eigenvalores del problema de Sturm-Liouville (1), (2), *sección* 5.8, *son reales.*

Demostración. Sea $\lambda = \alpha + i\beta$ un eigenvalor del problema y sea

$$y(x) = u(x) + iv(x)$$

una eigenfunción correspondiente; aquí, α, β, u y v son reales. Al sustituir lo anterior en (1), sección 5.8, se tiene

$$(ru' + irv')' + (q + \alpha p + i\beta p)(u + iv) = 0.$$

Esta ecuación compleja es equivalente al siguiente par de ecuaciones para las partes reales e imaginarias:

$$(ru')' + (q + \alpha p)u - \beta pv = 0,$$

$$(rv')' + (q + \alpha p)v + \beta pu = 0.$$

Al multiplicar la primera ecuación por v, la segunda por $-u$ y sumar los resultados, se obtiene

$$\begin{aligned} -\beta(u^2 + v^2)p &= u(rv')' - v(ru')' \\ &= [(rv')u - (ru')v]'. \end{aligned}$$

La expresión entre corchetes es continua en $a \leqq x \leqq b$, por razones semejantes a las de la demostración del teorema 1, sección 5.8. Integrando sobre x desde a hasta b, entonces se obtiene

$$-\beta \int_a^b (u^2 + v^2)p \, dx = \Big[r(uv' - u'v) \Big]_a^b.$$

Debido a las condiciones en la frontera, el miembro derecho es cero; esto es como en esa demostración. Como y es una eigenfunción, se tiene que $u^2 + v^2 \not\equiv 0$. Dado que y y p son continuos y $p > 0$ (o $p < 0$) en el intervalo $a \leqq x \leqq b$, entonces la integral en la izquierda no es cero. Así, $\beta = 0$, lo que significa que $\lambda = \alpha$ es real. Así se completa la demostración. ▮

Sección 7.8, página 417

Demostración de que la definición de determinante en la sección 7.8 no es ambigua.

Se demostrará que la definición de determinante

$$(1) \qquad D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

según se proporcionó en la sección 7.8 no es ambigua; es decir, que conduce al mismo valor de D sin importar qué renglones o columnas se elijan. (Aquí, en la numeración de las fórmulas se usan números no utilizados en la sección 7.8).

Primero se demostrará que *se obtiene el mismo valor sin importar qué renglón se elija.*

La demostración es por inducción. La proposición es verdadera para un determinante de segundo orden (ver el ejemplo 2). Se supone que es verdadera para un determinante de orden $n-1$ y se demostrará que es verdadera para un determinante D de orden n.

Para lograr este fin se desarrollará D, dado en la definición, en términos de cada uno de dos renglones arbitrarios, por ejemplo, los renglones i y j, y se compararán los resultados. Sin pérdida de generalidad, se supondrá que $i < j$.

Primer desarrollo. D se desarrollará para el i-ésimo renglón. Un término típico en este desarrollo es

$$a_{ik}C_{ik} = a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} M_{ik}. \tag{14}$$

El menor M_{ik} de a_{ik} en D es un determinante de orden $(n-1)$. Por la hipótesis de inducción, este determinante puede desarrollarse para cualquier renglón. Se desarrollará para el renglón correspondiente al j-ésimo renglón de D. Este renglón contiene los elementos a_{jl} $(l \neq k)$. Se trata del $(j-1)$-ésimo renglón de M_{ik}, porque M_{ik} no contiene elementos del j-ésimo renglón de D, e $i < j$. Es necesario distinguir entre dos casos, como sigue.

Caso I. Si $l < k$, entonces el elemento a_{jl} pertenece a la l-ésima columna de M_{ik} (ver la figura 534). Por tanto, el término que implica a a_{jl} en este desarrollo es

$$a_{jl} \cdot (\text{cofactor de } a_{jl} \text{ en } M_{ik}) = a_{jl} \cdot (-1)^{(j-1)+l} M_{ikjl} \tag{15}$$

en donde M_{ikjl} es el menor de a_{jl} en M_{ik}. Como este menor se obtiene a partir de M_{ik} al eliminar el renglón y la columna de a_{jl}, entonces se obtiene a partir de D al eliminar los renglones i-ésimo y k-ésimo y las columnas k-ésima y l-ésima de D. Los desarrollos de los M_{ik} se insertan en los desarrollos de D. Luego, por (14) y (15) se concluye que los términos de la representación resultante de D son de la forma

$$a_{ik}a_{jl} \cdot (-1)^b M_{ikjl} \qquad (l < k) \tag{16a}$$

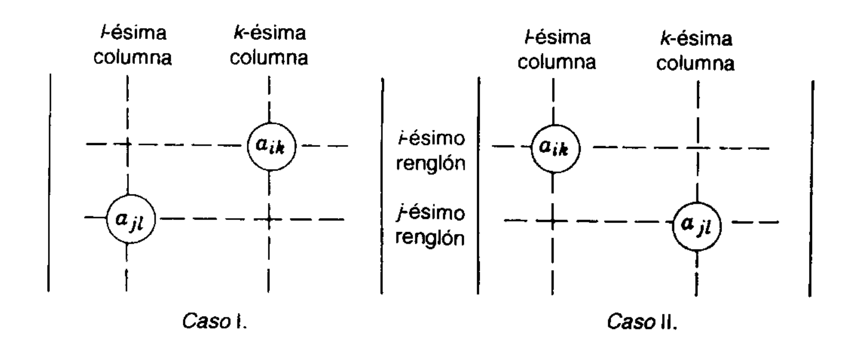


Figura 534. Casos I y II de los dos desarrollos de D.

en donde

$$b = i + k + j + l - 1.$$

Caso II. Si $l > k$, entonces la única diferencia es que a_{jl} pertenece a la $(l - 1)$-ésima columna de M_{ik}, porque M_{ik} no contiene elementos de la k-ésima columna de D, y $k < l$. Este hecho produce un signo negativo adicional en (15) y, en vez de (16a,) por consiguiente se obtiene

$$\text{(16b)} \qquad -a_{ik}a_{jl} \cdot (-1)^b M_{ikjl} \qquad (l > k)$$

en donde b es igual que antes.

Segundo desarrollo. A continuación se desarrollará D, primero para el j-ésimo renglón. Un término típico en este desarrollo es

$$\text{(17)} \qquad a_{jl}C_{jl} = a_{jl} \cdot (-1)^{j+l} M_{jl}.$$

Por la hipótesis de inducción es posible desarrollar el menor M_{jl} de a_{jl} en D para su i-ésimo renglón, que corresponde al i-ésimo renglón de D, ya que $j > i$.

Caso I. Si $k > l$, entonces el elemento a_{ik} en ese renglón pertenece a la $(k - 1)$-ésima columna de M_{jl}, ya que M_{jl} no contiene elementos de la l-ésima columna de D, y $l < k$ (ver la figura 534). Por tanto, el término que implica a a_{ik} en este desarrollo es

$$\text{(18)} \qquad a_{ik} \cdot (\text{cofactor de } a_{ik} \text{ en } M_{jl}) = a_{ik} \cdot (-1)^{i+(k-1)} M_{ikjl},$$

en donde el menor M_{ikjl} de a_{ik} en M_{jl} se obtiene al eliminar los renglones i-ésimo y k-ésimo y las columnas k-ésima y l-ésima de D [y es, por consiguiente, idéntico a M_{ikjl} en (15), de modo que la notación es consistente]. Los desarrollos de los M_{jl} se insertan en los desarrollos de D. Luego, por (17) y (18) se concluye que esto produce una representación cuyos términos son idénticos a los proporcionados por (16a) cuando $l < k$.

Caso II. Si $k < l$, entonces a_{ik} pertenece a la k-ésima columna de M_{jl}, se obtiene un signo negativo adicional y el resultado coincide con el resultado caracterizado por (16b).

Se ha demostrado que los dos desarrollos de D constan de los mismos elementos, y así se ha demostrado la proposición concerniente a los renglones.

La demostración de la proposición concerniente a las *columnas* es bastante semejante; si D se desarrolla en términos de dos columnas arbitrarias, por ejemplo las columnas k-ésima y l-ésima, se encuentra que el término general que implica a $a_{jl}a_{ik}$ es exactamente el mismo que antes. Así se demuestra no sólo que todos los desarrollos por columnas de D producen el mismo resultado, sino también que su valor común es igual al valor común de los desarrollos por renglones de D.

Así se completa la demostración de que *la definición de determinante de orden n no es ambigua.* ∎

Sección 8.3, página 493

***Demostración de la fórmula* (2)**

Se demostrará que en coordenadas cartesianas derechas, el producto vectorial

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = [a_1, \; a_2, \; a_3] \times [b_1, \; b_2, \; b_3]$$

tiene las componentes

(2) $$\boxed{v_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \qquad v_2 = a_3b_1 - a_1b_3, \qquad v_3 = a_1b_2 - a_2b_1.}$$

Basta considerar el caso $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Como **v** es perpendicular tanto a **a** como a **b**, al aplicar el teorema 1 de la sección 8.2 se obtiene $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$ y $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = 0$; en componentes [ver (2), sección 8.2],

(3) $$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 &= 0, \\ b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 &= 0. \end{aligned}$$

Al multiplicar la primera ecuación por b_3, la última por a_3 y restando los resultados, se obtiene

$$(a_3b_1 - a_1b_3)v_1 = (a_2b_3 - a_3b_2)v_2.$$

Al multiplicar la primera ecuación por b_1, la última por a_1 y restando los resultados, se obtiene

$$(a_1b_2 - a_2b_1)v_2 = (a_3b_1 - a_1b_3)v_3.$$

Puede comprobarse fácilmente que estas dos ecuaciones son satisfechas por

(4) $$v_1 = c(a_2b_3 - a_3b_2), \qquad v_2 = c(a_3b_1 - a_1b_3), \qquad v_3 = c(a_1b_2 - a_2b_1),$$

en donde c es una constante. El lector puede verificar mediante inserción que (4) también satisface (3). Luego, cada una de las ecuaciones en (3) representa un plano que pasa por el origen en el espacio $v_1v_2v_3$. Los vectores **a** y **b** son normales a estos planos (ver el ejemplo 6 en la sección 8.2). Como $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, estos vectores no son paralelos y los dos planos no coinciden. Por tanto, su intersección es una recta L que pasa por el origen. Como (4) es una solución de (3) y, al hacer variar a c, representa una recta, se concluye que (4) representa a L, y toda solución de (3) debe ser de la forma (4). En particular, las componentes de **v** deben ser de esta forma, en donde c está por determinar. A partir de (4) se obtiene

$$|\mathbf{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = c^2[(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2].$$

Lo anterior puede escribirse como

$$|\mathbf{v}|^2 = c^2[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2],$$

como puede comprobarse realizando las multiplicaciones indicadas en ambas fórmulas y comparando los resultados. Aplicando (2) de la sección 8.2, entonces se obtiene

$$|\mathbf{v}|^2 = c^2[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2].$$

Al comparar lo anterior con (13) en el conjunto de problemas de la sección 8.3, se concluye que $c = \pm 1$.

Se demostrará que $c = +1$. Esto puede efectuarse como sigue.

Si las direcciones y las longitudes de **a** y **b** se cambian de manera continua y de modo que al final se obtenga $\mathbf{a} = \mathbf{i}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{j}$ (figura 163*a* en la sección 8.3), entonces **v** cambia su longitud y su dirección de manera continua y, al final, $\mathbf{v} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$. Resulta evidente que es posible efectuar el cambio de modo que ambos **a** y **b** permanezcan

diferentes del vector cero y no sean paralelos en ningún instante. Entonces **v** nunca es igual al vector cero, y como el cambio es continuo y c puede asumir sólo los valores $+1$ y -1, entonces se concluye que al final c debe tener el mismo valor que antes. Luego, al final se tendrá **a** = **i**, **b** = **j**, **v** = **k** y por tanto, $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $v_3 = 1$, y las otras componentes en (4) son cero. Así, por (4) se observa que $v_3 = c = +1$. Esto demuestra el teorema 1.

Para un sistema de coordenadas izquierdo, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{k}$ (ver la figura 163*b* en la sección 8.3), con lo que se obtiene $c = -1$. Así se demuestra la proposición que aparece justo después de la fórmula (2). ∎

Sección 8.10, página 534

Demostración del teorema 1 (Invariancia de la divergencia)

Esta demostración se concluirá de dos teoremas (A y B), que se demostrarán en primer lugar.

Teorema A (Ley de transformación para componentes vectoriales)

Para cualquier vector **v**, *las componentes* v_1, v_2, v_3 y v_1^*, v_2^*, v_3^* *en dos sistemas cualesquiera de coordenadas cartesianas* x_1, x_2, x_3 y x_1^*, x_2^*, x_3^*, *respectivamente, están relacionadas por*

$$(1)\qquad \begin{aligned} v_1^* &= c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3 \\ v_2^* &= c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3 \\ v_3^* &= c_{31}v_1 + c_{32}v_2 + c_{33}v_3, \end{aligned}$$

y recíprocamente,

$$(2)\qquad \begin{aligned} v_1 &= c_{11}v_1^* + c_{21}v_2^* + c_{31}v_3^* \\ v_2 &= c_{12}v_1^* + c_{22}v_2^* + c_{32}v_3^* \\ v_3 &= c_{13}v_1^* + c_{23}v_2^* + c_{33}v_3^* \end{aligned}$$

con coeficientes

$$(3)\qquad \begin{array}{lll} c_{11} = \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{i} & c_{12} = \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{j} & c_{13} = \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{k} \\ c_{21} = \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{i} & c_{22} = \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{j} & c_{23} = \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{k} \\ c_{31} = \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{i} & c_{32} = \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{j} & c_{33} = \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{k} \end{array}$$

que satisfacen

$$(4)\qquad \sum_{j=1}^{3} c_{kj}c_{mj} = \delta_{km} \qquad (k, m = 1, 2, 3),$$

en donde la **delta de Kronecker**[2] *está definida por*

$$\delta_{km} = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ 1 & (k = m). \end{cases}$$

e **i, j, k** *e* **i*, j*, k*** *denotan los vectores unitarios en las direcciones positivas* x_1-, x_2–, x_3- y x_1^*–, x_2^*–, x_3^*–, *respectivamente.*

Demostración. Las representaciones de **v** en los dos sistemas son

$$(5) \qquad \text{(a)} \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} \qquad \text{(b)} \quad \mathbf{v} = v_1^*\mathbf{i}^* + v_2^*\mathbf{j}^* + v_3^*\mathbf{k}^*.$$

Como $\mathbf{i}^* \cdot \mathbf{i}^* = 1$, $\mathbf{i}^* \cdot \mathbf{j}^* = 0$, $\mathbf{i}^* \cdot \mathbf{k}^* = 0$, por (5b) se obtiene simplemente $\mathbf{i}^* \cdot \mathbf{v} = v_1^*$ y a partir de ésto y (5a),

$$v_1^* = \mathbf{i}^*\cdot\mathbf{v} = \mathbf{i}^*\cdot v_1\mathbf{i} + \mathbf{i}^*\cdot v_2\mathbf{j} + \mathbf{i}^*\cdot v_3\mathbf{k} = v_1\mathbf{i}^*\cdot\mathbf{i} + v_2\mathbf{i}^*\cdot\mathbf{j} + v_3\mathbf{i}^*\cdot\mathbf{k}.$$

Debido a (3), esta es la primera fórmula en (1), y las otras dos fórmulas se obtienen de manera semejante, considerando $\mathbf{j}^* \cdot \mathbf{v}$ y luego $\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{v}$. La fórmula (2) se concluye siguiendo el mismo razonamiento, tomando $\mathbf{i} \cdot \mathbf{v} = v_1$ de (5a) y luego por (5b) y (3) se obtiene

$$v_1 = \mathbf{i}\cdot\mathbf{v} = v_1^*\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}^* + v_2^*\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}^* + v_3^*\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}^* = c_{11}v_1^* + c_{21}v_2^* + c_{31}v_3^*,$$

y de manera semejante para las otras dos componentes.

A continuación se demostrará (4). (1) y (2) pueden escribirse brevemente como

$$(6) \qquad \text{(a)} \quad v_j = \sum_{m=1}^{3} c_{mj}v_m^*, \qquad \text{(b)} \quad v_k^* = \sum_{j=1}^{3} c_{kj}v_j.$$

Al sustituir v_j en v_k^*, se obtiene

$$v_k^* = \sum_{j=1}^{3} c_{kj} \sum_{m=1}^{3} c_{mj}v_m^* = \sum_{m=1}^{3} v_m^* \left(\sum_{j=1}^{3} c_{kj}c_{mj}\right),$$

en donde $k = 1, 2, 3$. Al tomar $k = 1$, se tiene

$$v_1^* = v_1^*\left(\sum_{j=1}^{3} c_{1j}c_{1j}\right) + v_2^*\left(\sum_{j=1}^{3} c_{1j}c_{2j}\right) + v_3^*\left(\sum_{j=1}^{3} c_{1j}c_{3j}\right).$$

Pero como lo anterior se cumple para *cualquier* vector **v**, entonces la primera suma debe ser 1 y las otras dos sumas, 0. Así se demuestra (4) con $k = 1$ para $m = 1, 2, 3$. Al tomar $k = 2$ y luego $k = 3$ se obtiene (4) con $k = 2$ y 3, para $m = 1, 2, 3$. ∎

La transformación más general de un sistema de coordenadas cartesianas en otro sistema así puede descomponerse en una transformación del tipo recientemente con-

---

[2] LEOPOLD KRONECKER (1823-1891), matemático alemán en Berlín, que realizó importantes contribuciones al álgebra, a la teoría de grupos y a la teoría de números.

Este análisis se mantendrá completamente independiente del capítulo 7, aunque los lectores familiarizados con matrices deben identificar que se está tratando con **transformaciones y matrices ortogonales**, y que este teorema se concluye del teorema 2 en la sección 7.12.

siderado y una traslación. Bajo la traslación, las coordenadas correspondientes difieren simplemente por una constante. Así, se obtiene el

Teorema B (Ley de transformación para coordenadas cartesianas)

La transformación de cualquier sistema de coordenadas cartesianas $x_1x_2x_3$ *en otro sistema de coordenadas cartesianas* $x_1^*x_2^*x_3^*$ *es de la forma*

$$(7)\qquad x_m^* = \sum_{j=1}^{3} c_{mj}x_j + b_m, \qquad m = 1, 2, 3,$$

con coeficientes (3) *y constantes* b_1, b_2 *y* b_3; *recíprocamente,*

$$(8)\qquad x_k = \sum_{n=1}^{3} c_{nk}x_n^* + \tilde{b}_k, \qquad k = 1, 2, 3.$$

***Demostración del teorema* 1 *en la sección* 8.10 (*Invariancia de la divergencia*)**

Se escribe x_1, x_2, x_3 en vez de x, y, z. Entonces, por definición,

$$(9)\qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

También se escribe x_1^*, x_2^*, x_3^* en vez de x^*, y^*, z^*. Debe demostrarse que en estas coordenadas,

$$(10)\qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*}.$$

Por la regla de la cadena para funciones de varias variables (ver la sección 8.8) se obtiene

$$(11)\qquad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_m^*}\frac{\partial x_m^*}{\partial x_j}.$$

En esta fórmula, $\partial x_m^*/\partial x_j = c_{mj}$ por (7); y por (2),

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_m^*} = \sum_{k=1}^{3} c_{kj}\frac{\partial v_k^*}{\partial x_m^*}.$$

Al sustituir todo lo anterior en (11) y sumar sobre j desde 1 hasta 3, y observando (4), se obtiene

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} c_{kj}\frac{\partial v_k^*}{\partial x_m^*}c_{mj}$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \delta_{km}\frac{\partial v_k^*}{\partial x_m^*} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*}.$$

Así se demuestra (10). ∎

Sección 8.11, página 539

Demostración del teorema* 1. *Invariancia del rotacional

De nuevo se escribe x_1, x_2, x_3 en vez de x, y, z, y de manera semejante x_1^*, x_2^*, x_3^* para otro sistema de coordenadas cartesianas, suponiendo que ambos sistemas son derechos. Sean a_1, a_2, a_3 las componentes del rot **v** en las coordenadas $x_1x_2x_3$, según se definió por (1) en la sección 8.11, con

$$x = x_1, \qquad y = x_2, \qquad z = x_3.$$

De manera semejante, sean a_1^*, a_2^*, a_3^* las componentes del rot **v** en el sistema de coordenadas $x_1^*x_2^*x_3^*$. Se demostrará que la longitud y la dirección del rot **v** son independientes de la elección particular de coordenadas cartesianas, como se afirma en el teorema. Lo anterior se efectuará demostrando que las componentes del rot **v** satisfacen la ley de transformación (2), que es característica de las componentes vectoriales. Se considerará a_1. Se aplicarán (6a) y luego la regla de la cadena para funciones de varias variables (sección 8.8). Así se obtiene

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = \sum_{m=1}^{3}\left(c_{m3}\frac{\partial v_m^*}{\partial x_2} - c_{m2}\frac{\partial v_m^*}{\partial x_3}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(c_{m3}\frac{\partial v_m^*}{\partial x_j^*}\frac{\partial x_j^*}{\partial x_2} - c_{m2}\frac{\partial v_m^*}{\partial x_j^*}\frac{\partial x_j^*}{\partial x_3}\right). \end{aligned}$$

A partir de esto y de (7), se obtiene

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{m=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(c_{m3}c_{j2} - c_{m2}c_{j3})\frac{\partial v_m^*}{\partial x_j^*} \\ &= (c_{33}c_{22} - c_{32}c_{23})\left(\frac{\partial v_3^*}{\partial x_2^*} - \frac{\partial v_2^*}{\partial x_3^*}\right) + \cdots \\ &= (c_{33}c_{22} - c_{32}c_{23})a_1^* + (c_{13}c_{32} - c_{12}c_{33})a_2^* + (c_{23}c_{12} - c_{22}c_{13})a_3^*. \end{aligned}$$

Observar lo que se hizo. La doble sumatoria tenía $3 \times 3 = 9$ términos, 3 de los cuales eran cero (cuando $m = j$) y los seis términos restantes se combinaron por pares según era necesario para obtener a_1^*, a_2^*, a_3^*.

A continuación se usarán (3), la identidad de Lagrange (problema 60, sección 8.3), $\mathbf{k}^* \times \mathbf{j}^* = -\mathbf{i}^*$ y $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$. Así,

$$\begin{aligned} c_{33}c_{22} - c_{32}c_{23} &= (\mathbf{k}^*\cdot\mathbf{k})(\mathbf{j}^*\cdot\mathbf{j}) - (\mathbf{k}^*\cdot\mathbf{j})(\mathbf{j}^*\cdot\mathbf{k}) \\ &= (\mathbf{k}^* \times \mathbf{j}^*)\cdot(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i}^*\cdot\mathbf{i} = c_{11}, \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Por tanto, $a_1 = c_{11}a_1^* + c_{21}a_2^* + c_{31}a_3^*$. Esto es de la forma de la primera fórmula en (2) y las otras dos fórmulas de la forma (2) se obtienen de manera semejante. Así se demuestra el teorema para sistemas derechos. Si las coordenadas $x_1x_2x_3$ son izquierdas, entonces $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = +\mathbf{i}$, pero entonces antes del determinante en (1), sección 8.11, se tiene un signo negativo. ∎

Sección 9.2, página 562

Teorema 1 (Independencia con respecto a la trayectoria)

Una integral de línea

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) \tag{1}$$

con F_1, F_2, F_3 *continuas en un dominio* D, *es independiente con respecto a la trayectoria en* D *si y sólo si* $\mathbf{F} = \mathbf{grad}\, f$ *en* D *para alguna* f; *en componentes,*

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad F_3 = \frac{\partial f}{\partial z}. \tag{2'}$$

Demostración. **(a)** El hecho de que (2') implica independencia se demostró en el texto.

(b) Recíprocamente, se supone que (1) es independiente con respecto a la trayectoria en D. Entonces se elige cualquier A: (x_0, y_0, z_0) fijo en D y cualquier B: (x, y, z) en D y f se define como

$$f(x, y, z) = f_0 + \int_A^B (F_1\,dx^* + F_2\,dy^* + F_3\,dz^*), \tag{3}$$

con cualquier f_0 constante y cualquier trayectoria de A a B en D. Como A es fijo y se tiene independencia con respecto a la trayectoria, la integral depende sólo de las coordenadas x, y, z, de modo que (3) define una función $f(x, y, z)$ en D. Se demostrará que $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$ con esta f, empezando con la primera de las tres relaciones (2'). Debido a la independencia con respecto a la trayectoria, es posible integrar desde A hasta B_1: (x_1, y, z) y luego en forma paralela al eje x a lo largo del segmento B_1B en la figura 535 con B_1 elegido de modo que todo el segmento esté en D. Entonces,

$$f(x, y, z) = f_0 + \int_A^{B_1} (F_1\,dx^* + F_2\,dy^* + F_3\,dz^*)$$
$$+ \int_{B_1}^{B} (F_1\,dx^* + F_2\,dy^* + F_3\,dz^*).$$

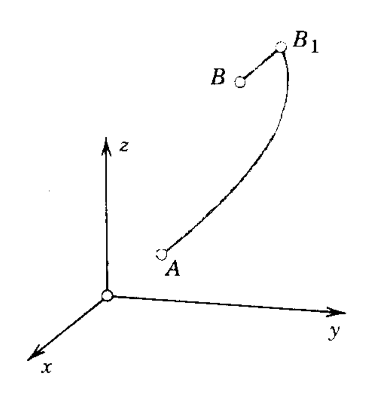


Figura 535. Demostración del teorema 1.

Ahora se toma la derivada parcial con respecto a x en ambos miembros. En el izquierdo se obtiene $\delta f / \delta x$. Se demostrará que en el derecho se obtiene F_1. La derivada de la primera integral es cero porque A: (x_0, y_0, z_0) y B_1: (x_1, y, z) no dependen de x. Se considerará la segunda integral. Como tanto x como y son constantes sobre el segmento B_1B, los términos $F_2\, dy^*$ y $F_3\, dz^*$ no contribuyen a la derivada de la integral. La parte restante puede escribirse como una integral definida,

$$\int_{B_1}^{B} F_1\, dx^* = \int_{x_1}^{x} F_1(x^*, y, z)\, dx^*.$$

Por tanto, su derivada parcial con respecto a x es $F_1(x, y, z)$ y se ha demostrado la primera de las relaciones (2'). Las otras dos fórmulas en (2') se concluyen siguiendo el mismo razonamiento. ∎

Tabla A1. (*Continuación*)

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0.0	$(-\infty)$	$(-\infty)$	2.5	0.498	0.146	5.0	−0.309	0.148
0.5	−0.445	−1.471	3.0	0.377	0.325	5.5	−0.339	−0.024
1.0	0.088	−0.781	3.5	0.189	0.410	6.0	−0.288	−0.175
1.5	0.382	−0.412	4.0	−0.017	0.398	6.5	−0.173	−0.274
2.0	0.510	−0.107	4.5	−0.195	0.301	7.0	−0.026	−0.303

Tabla A2. Función gamma [ver (24) en el apéndice 3]

α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$
1.00	1.000 000	1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384
1.02	0.988 844	1.22	0.913 106	1.42	0.886 356	1.62	0.895 924	1.82	0.936 845
1.04	0.978 438	1.24	0.908 521	1.44	0.885 805	1.64	0.898 642	1.84	0.942 612
1.06	0.968 744	1.26	0.904 397	1.46	0.885 604	1.66	0.901 668	1.86	0.948 687
1.08	0.959 725	1.28	0.900 718	1.48	0.885 747	1.68	0.905 001	1.88	0.955 071
1.10	0.951 351	1.30	0.897 471	1.50	0.886 227	1.70	0.908 639	1.90	0.961 766
1.12	0.943 590	1.32	0.894 640	1.52	0.887 039	1.72	0.912 581	1.92	0.968 774
1.14	0.936 416	1.34	0.892 216	1.54	0.888 178	1.74	0.916 826	1.94	0.976 099
1.16	0.929 803	1.36	0.890 185	1.56	0.889 639	1.76	0.921 375	1.96	0.983 743
1.18	0.923 728	1.38	0.888 537	1.58	0.891 420	1.78	0.926 227	1.98	0.991 708
1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384	2.00	1.000 000

Tabla A3. Función factorial

n	$n!$	log ($n!$)	n	$n!$	log ($n!$)	n	$n!$	log ($n!$)
1	1	0.000 000	6	720	2.857 332	11	39 916 800	7.601 156
2	2	0.301 030	7	5 040	3.702 431	12	479 001 600	8.680 337
3	6	0.778 151	8	40 320	4.605 521	13	6 227 020 800	9.794 280
4	24	1.380 211	9	362 880	5.559 763	14	87 178 291 200	10.940 408
5	120	2.079 181	10	3 628 800	6.559 763	15	1 307 674 368 000	12.116 500

Tabla A4. Función de error, integrales del seno y del coseno [ver (35), (40), (42) en el apéndice 3]

x	fer x	Ic(x)	ic(x)	x	fer x	Ic(x)	ic(x)
0.0	0.0000	0.0000	∞	2.0	0.9953	1.6054	−0.4230
0.2	0.2227	0.1996	1.0422	2.2	0.9981	1.6876	−0.3751
0.4	0.4284	0.3965	0.3788	2.4	0.9993	1.7525	−0.3173
0.6	0.6039	0.5881	0.0223	2.6	0.9998	1.8004	−0.2533
0.8	0.7421	0.7721	−0.1983	2.8	0.9999	1.8321	−0.1865
1.0	0.8427	0.9461	−0.3374	3.0	1.0000	1.8487	−0.1196
1.2	0.9103	1.1080	−0.4205	3.2	1.0000	1.8514	−0.0553
1.4	0.9523	1.2562	−0.4620	3.4	1.0000	1.8419	0.0045
1.6	0.9763	1.3892	−0.4717	3.6	1.0000	1.8219	0.0580
1.8	0.9891	1.5058	−0.4568	3.8	1.0000	1.7934	0.1038
2.0	0.9953	1.6054	−0.4230	4.0	1.0000	1.7582	0.1410

Tabla A5. Distribución binomial

Función de probabilidad $f(x)$ ver (2), sección 23.6 y función de distribución $F(x)$

n	x	p = 0.1 $f(x)$	p = 0.1 $F(x)$	p = 0.2 $f(x)$	p = 0.2 $F(x)$	p = 0.3 $f(x)$	p = 0.3 $F(x)$	p = 0.4 $f(x)$	p = 0.4 $F(x)$	p = 0.5 $f(x)$	p = 0.5 $F(x)$
		0.		0.		0.		0.		0.	
1	0	9000	0.9000	8000	0.8000	7000	0.7000	6000	0.6000	5000	0.5000
	1	1000	1.0000	2000	1.0000	3000	1.0000	4000	1.0000	5000	1.0000
2	0	8100	0.8100	6400	0.6400	4900	0.4900	3600	0.3600	2500	0.2500
	1	1800	0.9900	3200	0.9600	4200	0.9100	4800	0.8400	5000	0.7500
	2	0100	1.0000	0400	1.0000	0900	1.0000	1600	1.0000	2500	1.0000
3	0	7290	0.7290	5120	0.5120	3430	0.3430	2160	0.2160	1250	0.1250
	1	2430	0.9720	3840	0.8960	4410	0.7840	4320	0.6480	3750	0.5000
	2	0270	0.9990	0960	0.9920	1890	0.9730	2880	0.9360	3750	0.8750
	3	0010	1.0000	0080	1.0000	0270	1.0000	0640	1.0000	1250	1.0000
4	0	6561	0.6561	4096	0.4096	2401	0.2401	1296	0.1296	0625	0.0625
	1	2916	0.9477	4096	0.8192	4116	0.6517	3456	0.4752	2500	0.3125
	2	0486	0.9963	1536	0.9728	2646	0.9163	3456	0.8208	3750	0.6875
	3	0036	0.9999	0256	0.9984	0756	0.9919	1536	0.9744	2500	0.9375
	4	0001	1.0000	0016	1.0000	0081	1.0000	0256	1.0000	0625	1.0000
5	0	5905	0.5905	3277	0.3277	1681	0.1681	0778	0.0778	0313	0.0313
	1	3281	0.9185	4096	0.7373	3602	0.5282	2592	0.3370	1563	0.1875
	2	0729	0.9914	2048	0.9421	3087	0.8369	3456	0.6826	3125	0.5000
	3	0081	0.9995	0512	0.9933	1323	0.9692	2304	0.9130	3125	0.8125
	4	0005	1.0000	0064	0.9997	0284	0.9976	0768	0.9898	1563	0.9688
	5	0000	1.0000	0003	1.0000	0024	1.0000	0102	1.0000	0313	1.0000
6	0	5314	0.5314	2621	0.2621	1176	0.1176	0467	0.0467	0156	0.0156
	1	3543	0.8857	3932	0.6554	3025	0.4202	1866	0.2333	0938	0.1094
	2	0984	0.9841	2458	0.9011	3241	0.7443	3110	0.5443	2344	0.3438
	3	0146	0.9987	0819	0.9830	1852	0.9295	2765	0.8208	3125	0.6563
	4	0012	0.9999	0154	0.9984	0595	0.9891	1382	0.9590	2344	0.8906
	5	0001	1.0000	0015	0.9999	0102	0.9993	0369	0.9959	0938	0.9844
	6	0000	1.0000	0001	1.0000	0007	1.0000	0041	1.0000	0156	1.0000
7	0	4783	0.4783	2097	0.2097	0824	0.0824	0280	0.0280	0078	0.0078
	1	3720	0.8503	3670	0.5767	2471	0.3294	1306	0.1586	0547	0.0625
	2	1240	0.9743	2753	0.8520	3177	0.6471	2613	0.4199	1641	0.2266
	3	0230	0.9973	1147	0.9667	2269	0.8740	2903	0.7102	2734	0.5000
	4	0026	0.9998	0287	0.9953	0972	0.9712	1935	0.9037	2734	0.7734
	5	0002	1.0000	0043	0.9996	0250	0.9962	0774	0.9812	1641	0.9375
	6	0000	1.0000	0004	1.0000	0036	0.9998	0172	0.9984	0547	0.9922
	7	0000	1.0000	0000	1.0000	0002	1.0000	0016	1.0000	0078	1.0000
8	0	4305	0.4305	1678	0.1678	0576	0.0576	0168	0.0168	0039	0.0039
	1	3826	0.8131	3355	0.5033	1977	0.2553	0896	0.1064	0313	0.0352
	2	1488	0.9619	2936	0.7969	2965	0.5518	2090	0.3154	1094	0.1445
	3	0331	0.9950	1468	0.9437	2541	0.8059	2787	0.5941	2188	0.3633
	4	0046	0.9996	0459	0.9896	1361	0.9420	2322	0.8263	2734	0.6367
	5	0004	1.0000	0092	0.9988	0467	0.9887	1239	0.9502	2188	0.8555
	6	0000	1.0000	0011	0.9999	0100	0.9987	0413	0.9915	1094	0.9648
	7	0000	1.0000	0001	1.0000	0012	0.9999	0079	0.9993	0313	0.9961
	8	0000	1.0000	0000	1.0000	0001	1.0000	0007	1.0000	0039	1.0000

Tabla A6. Distribución de Poisson

Función de probabilidad $f(x)$ ver (5), sección 23.6 y función de distribución $F(x)$

x	$\mu = 0.1$ $f(x)$	$F(x)$	$\mu = 0.2$ $f(x)$	$F(x)$	$\mu = 0.3$ $f(x)$	$F(x)$	$\mu = 0.4$ $f(x)$	$F(x)$	$\mu = 0.5$ $f(x)$	$F(x)$
	0.		0.		0.		0.		0.	
0	9048	0.9048	8187	0.8187	7408	0.7408	6703	0.6703	6065	0.6065
1	0905	0.9953	1637	0.9825	2222	0.9631	2681	0.9384	3033	0.9098
2	0045	0.9998	0164	0.9989	0333	0.9964	0536	0.9921	0758	0.9856
3	0002	1.0000	0011	0.9999	0033	0.9997	0072	0.9992	0126	0.9982
4	0000	1.0000	0001	1.0000	0003	1.0000	0007	0.9999	0016	0.9998
5							0001	1.0000	0002	1.0000

x	$\mu = 0.6$ $f(x)$	$F(x)$	$\mu = 0.7$ $f(x)$	$F(x)$	$\mu = 0.8$ $f(x)$	$F(x)$	$\mu = 0.9$ $f(x)$	$F(x)$	$\mu = 1$ $f(x)$	$F(x)$
	0.		0.		0.		0.		0.	
0	5488	0.5488	4966	0.4966	4493	0.4493	4066	0.4066	3679	0.3679
1	3293	0.8781	3476	0.8442	3595	0.8088	3659	0.7725	3679	0.7358
2	0988	0.9769	1217	0.9659	1438	0.9526	1647	0.9371	1839	0.9197
3	0198	0.9966	0284	0.9942	0383	0.9909	0494	0.9865	0613	0.9810
4	0030	0.9996	0050	0.9992	0077	0.9986	0111	0.9977	0153	0.9963
5	0004	1.0000	0007	0.9999	0012	0.9998	0020	0.9997	0031	0.9994
6			0001	1.0000	0002	1.0000	0003	1.0000	0005	0.9999
7									0001	1.0000

x	$\mu = 1.5$ $f(x)$	$F(x)$	$\mu = 2$ $f(x)$	$F(x)$	$\mu = 3$ $f(x)$	$F(x)$	$\mu = 4$ $f(x)$	$F(x)$	$\mu = 5$ $f(x)$	$F(x)$
	0.		0.		0.		0.		0.	
0	2231	0.2231	1353	0.1353	0498	0.0498	0183	0.0183	0067	0.0067
1	3347	0.5578	2707	0.4060	1494	0.1991	0733	0.0916	0337	0.0404
2	2510	0.8088	2707	0.6767	2240	0.4232	1465	0.2381	0842	0.1247
3	1255	0.9344	1804	0.8571	2240	0.6472	1954	0.4335	1404	0.2650
4	0471	0.9814	0902	0.9473	1680	0.8153	1954	0.6288	1755	0.4405
5	0141	0.9955	0361	0.9834	1008	0.9161	1563	0.7851	1755	0.6160
6	0035	0.9991	0120	0.9955	0504	0.9665	1042	0.8893	1462	0.7622
7	0008	0.9998	0034	0.9989	0216	0.9881	0595	0.9489	1044	0.8666
8	0001	1.0000	0009	0.9998	0081	0.9962	0298	0.9786	0653	0.9319
9			0002	1.0000	0027	0.9989	0132	0.9919	0363	0.9682
10					0008	0.9997	0053	0.9972	0181	0.9863
11					0002	0.9999	0019	0.9991	0082	0.9945
12					0001	1.0000	0006	0.9997	0034	0.9980
13							0002	0.9999	0013	0.9993
14							0001	1.0000	0005	0.9998
15									0002	0.9999
16									0000	1.0000

Tabla A7. Distribución normal

Valores de la función de distribución $\Phi(z)$ [ver (4), sección 23.7]

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, $\Phi(0) = 0.5000$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
	0.		**0.**		**0.**		**0.**		**0.**		**0.**
0.01	5040	0.51	6950	1.01	8438	1.51	9345	2.01	9778	2.51	9940
0.02	5080	0.52	6985	1.02	8461	1.52	9357	2.02	9783	2.52	9941
0.03	5120	0.53	7019	1.03	8485	1.53	9370	2.03	9788	2.53	9943
0.04	5160	0.54	7054	1.04	8508	1.54	9382	2.04	9793	2.54	9945
0.05	5199	0.55	7088	1.05	8531	1.55	9394	2.05	9798	2.55	9946
0.06	5239	0.56	7123	1.06	8554	1.56	9406	2.06	9803	2.56	9948
0.07	5279	0.57	7157	1.07	8577	1.57	9418	2.07	9808	2.57	9949
0.08	5319	0.58	7190	1.08	8599	1.58	9429	2.08	9812	2.58	9951
0.09	5359	0.59	7224	1.09	8621	1.59	9441	2.09	9817	2.59	9952
0.10	5398	0.60	7257	1.10	8643	1.60	9452	2.10	9821	2.60	9953
0.11	5438	0.61	7291	1.11	8665	1.61	9463	2.11	9826	2.61	9955
0.12	5478	0.62	7324	1.12	8686	1.62	9474	2.12	9830	2.62	9956
0.13	5517	0.63	7357	1.13	8708	1.63	9484	2.13	9834	2.63	9957
0.14	5557	0.64	7389	1.14	8729	1.64	9495	2.14	9838	2.64	9959
0.15	5596	0.65	7422	1.15	8749	1.65	9505	2.15	9842	2.65	9960
0.16	5636	0.66	7454	1.16	8770	1.66	9515	2.16	9846	2.66	9961
0.17	5675	0.67	7486	1.17	8790	1.67	9525	2.17	9850	2.67	9962
0.18	5714	0.68	7517	1.18	8810	1.68	9535	2.18	9854	2.68	9963
0.19	5753	0.69	7549	1.19	8830	1.69	9545	2.19	9857	2.69	9964
0.20	5793	0.70	7580	1.20	8849	1.70	9554	2.20	9861	2.70	9965
0.21	5832	0.71	7611	1.21	8869	1.71	9564	2.21	9864	2.71	9966
0.22	5871	0.72	7642	1.22	8888	1.72	9573	2.22	9868	2.72	9967
0.23	5910	0.73	7673	1.23	8907	1.73	9582	2.23	9871	2.73	9968
0.24	5948	0.74	7704	1.24	8925	1.74	9591	2.24	9875	2.74	9969
0.25	5987	0.75	7734	1.25	8944	1.75	9599	2.25	9878	2.75	9970
0.26	6026	0.76	7764	1.26	8962	1.76	9608	2.26	9881	2.76	9971
0.27	6064	0.77	7794	1.27	8980	1.77	9616	2.27	9884	2.77	9972
0.28	6103	0.78	7823	1.28	8997	1.78	9625	2.28	9887	2.78	9973
0.29	6141	0.79	7852	1.29	9015	1.79	9633	2.29	9890	2.79	9974
0.30	6179	0.80	7881	1.30	9032	1.80	9641	2.30	9893	2.80	9974
0.31	6217	0.81	7910	1.31	9049	1.81	9649	2.31	9896	2.81	9975
0.32	6255	0.82	7939	1.32	9066	1.82	9656	2.32	9898	2.82	9976
0.33	6293	0.83	7967	1.33	9082	1.83	9664	2.33	9901	2.83	9977
0.34	6331	0.84	7995	1.34	9099	1.84	9671	2.34	9904	2.84	9977
0.35	6368	0.85	8023	1.35	9115	1.85	9678	2.35	9906	2.85	9978
0.36	6406	0.86	8051	1.36	9131	1.86	9686	2.36	9909	2.86	9979
0.37	6443	0.87	8078	1.37	9147	1.87	9693	2.37	9911	2.87	9979
0.38	6480	0.88	8106	1.38	9162	1.88	9699	2.38	9913	2.88	9980
0.39	6517	0.89	8133	1.39	9177	1.89	9706	2.39	9916	2.89	9981
0.40	6554	0.90	8159	1.40	9192	1.90	9713	2.40	9918	2.90	9981
0.41	6591	0.91	8186	1.41	9207	1.91	9719	2.41	9920	2.91	9982
0.42	6628	0.92	8212	1.42	9222	1.92	9726	2.42	9922	2.92	9982
0.43	6664	0.93	8238	1.43	9236	1.93	9732	2.43	9925	2.93	9983
0.44	6700	0.94	8264	1.44	9251	1.94	9738	2.44	9927	2.94	9984
0.45	6736	0.95	8289	1.45	9265	1.95	9744	2.45	9929	2.95	9984
0.46	6772	0.96	8315	1.46	9279	1.96	9750	2.46	9931	2.96	9985
0.47	6808	0.97	8340	1.47	9292	1.97	9756	2.47	9932	2.97	9985
0.48	6844	0.98	8365	1.48	9306	1.98	9761	2.48	9934	2.98	9986
0.49	6879	0.99	8389	1.49	9319	1.99	9767	2.49	9936	2.99	9986
0.50	6915	1.00	8413	1.50	9332	2.00	9772	2.50	9938	3.00.	9987

Tabla A8. Distribución normal

Valores de z para valores dados de $\Phi(z)$ [ver (4), sección 23.7] y $D(z) = \Phi(z) - \Phi(-z)$
Ejemplo: $z = 0.279$ si $\Phi(z) = 61\%$; $z = 0.860$ si $D(z) = 61\%$.

%	z(Φ)	z(D)	%	z(Φ)	z(D)	%	z(Φ)	z(D)
1	−2.326	0.013	41	−0.228	0.539	81	0.878	1.311
2	−2.054	0.025	42	−0.202	0.553	82	0.915	1.341
3	−1.881	0.038	43	−0.176	0.568	83	0.954	1.372
4	−1.751	0.050	44	−0.151	0.583	84	0.994	1.405
5	−1.645	0.063	45	−0.126	0.598	85	1.036	1.440
6	−1.555	0.075	46	−0.100	0.613	86	1.080	1.476
7	−1.476	0.088	47	−0.075	0.628	87	1.126	1.514
8	−1.405	0.100	48	−0.050	0.643	88	1.175	1.555
9	−1.341	0.113	49	−0.025	0.659	89	1.227	1.598
10	−1.282	0.126	50	0.000	0.674	90	1.282	1.645
11	−1.227	0.138	51	0.025	0.690	91	1.341	1.695
12	−1.175	0.151	52	0.050	0.706	92	1.405	1.751
13	−1.126	0.164	53	0.075	0.722	93	1.476	1.812
14	−1.080	0.176	54	0.100	0.739	94	1.555	1.881
15	−1.036	0.189	55	0.126	0.755	95	1.645	1.960
16	−0.994	0.202	56	0.151	0.772	96	1.751	2.054
17	−0.954	0.215	57	0.176	0.789	97	1.881	2.170
18	−0.915	0.228	58	0.202	0.806	97.5	1.960	2.241
19	−0.878	0.240	59	0.228	0.824	98	2.054	2.326
20	−0.842	0.253	60	0.253	0.842	99	2.326	2.576
21	−0.806	0.266	61	0.279	0.860	99.1	2.366	2.612
22	−0.772	0.279	62	0.305	0.878	99.2	2.409	2.652
23	−0.739	0.292	63	0.332	0.896	99.3	2.457	2.697
24	−0.706	0.305	64	0.358	0.915	99.4	2.512	2.748
25	−0.674	0.319	65	0.385	0.935	99.5	2.576	2.807
26	−0.643	0.332	66	0.412	0.954	99.6	2.652	2.878
27	−0.613	0.345	67	0.440	0.974	99.7	2.748	2.968
28	−0.583	0.358	68	0.468	0.994	99.8	2.878	3.090
29	−0.553	0.372	69	0.496	1.015	99.9	3.090	3.291
30	−0.524	0.385	70	0.524	1.036			
31	−0.496	0.399	71	0.553	1.058	99.91	3.121	3.320
32	−0.468	0.412	72	0.583	1.080	99.92	3.156	3.353
33	−0.440	0.426	73	0.613	1.103	99.93	3.195	3.390
34	−0.412	0.440	74	0.643	1.126	99.94	3.239	3.432
35	−0.385	0.454	75	0.674	1.150	99.95	3.291	3.481
36	−0.358	0.468	76	0.706	1.175	99.96	3.353	3.540
37	−0.332	0.482	77	0.739	1.200	99.97	3.432	3.615
38	−0.305	0.496	78	0.772	1.227	99.98	3.540	3.719
39	−0.279	0.510	79	0.806	1.254	99.99	3.719	3.891
40	−0.253	0.524	80	0.842	1.282			

Tabla A9. Dígitos aleatorios

Ver la sección 24.2

Renglón	Columna número									
No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	87331	82442	28104	26432	83640	17323	68764	84728	37995	96106
1	33628	17364	01409	87803	65641	33433	48944	64299	79066	31777
2	54680	13427	72496	16967	16195	96593	55040	53729	62035	66717
3	51199	49794	49407	10774	98140	83891	37195	24066	61140	65144
4	78702	98067	61313	91661	59861	54437	77739	19892	54817	88645
5	55672	16014	24892	13089	00410	81458	76156	28189	40595	21500
6	18880	58497	03862	32368	59320	24807	63392	79793	63043	09425
7	10242	62548	62330	05703	33535	49128	66298	16193	55301	01306
8	54993	17182	94618	23228	83895	73251	68199	64639	83178	70521
9	22686	50885	16006	04041	08077	33065	35237	02502	94755	72062
10	42349	03145	15770	70665	53291	32288	41568	66079	98705	31029
11	18093	09553	39428	75464	71329	86344	80729	40916	18860	51780
12	11535	03924	84252	74795	40193	84597	42497	21918	91384	84721
13	35066	73848	65351	53270	67341	70177	92373	17604	42204	60476
14	57477	22809	73558	96182	96779	01604	25748	59553	64876	94611
15	48647	33850	52956	45410	88212	05120	99391	32276	55961	41775
16	86857	81154	22223	74950	53296	67767	55866	49061	66937	81818
17	20182	36907	94644	99122	09774	29189	27212	79000	50217	71077
18	83687	31231	01133	41432	54542	60204	81618	09586	34481	87683
19	81315	12390	46074	47810	90171	36313	95440	77583	28506	38808
20	87026	52826	58341	76549	04105	66191	12914	55348	07907	06978
21	34301	76733	07251	90524	21931	83695	41340	53581	64582	60210
22	70734	24337	32674	49508	49751	90489	63202	24380	77943	09942
23	94710	31527	73445	32839	68176	53580	85250	53243	03350	00128
24	76462	16987	07775	43162	11777	16810	75158	13894	88945	15539
25	14348	28403	79245	69023	34196	46398	05964	64715	11330	17515
26	74618	89317	30146	25606	94507	98104	04239	44973	37636	88866
27	99442	19200	85406	45358	86253	60638	38858	44964	54103	57287
28	26869	44399	89452	06652	31271	00647	46551	83050	92058	83814
29	80988	08149	50499	98584	28385	63680	44638	91864	96002	87802
30	07511	79047	89289	17774	67194	37362	85684	55505	97809	67056
31	49779	12138	05048	03535	27502	63308	10218	53296	48687	61340
32	47938	55945	24003	19635	17471	65997	85906	98694	56420	78357
33	15604	06626	14360	79542	13512	87595	08542	03800	35443	52823
34	12307	27726	21864	00045	16075	03770	86978	52718	02693	09096
35	02450	28053	66134	99445	91316	25727	89399	85272	67148	78358
36	57623	54382	35236	89244	27245	90500	75430	96762	71968	65838
37	91762	78849	93105	40481	99431	03304	21079	86459	21287	76566
38	87373	31137	31128	67050	34309	44914	80711	61738	61498	24288
39	67094	41485	54149	86088	10192	21174	39948	67268	29938	32476
40	94456	66747	76922	87627	71834	57688	04878	78348	68970	60048
41	68359	75292	27710	86889	81678	79798	58360	39175	75667	65782
42	52393	31404	32584	06837	79762	13168	76055	54833	22841	98889
43	59565	91254	11847	20672	37625	41454	86861	55824	79793	74575
44	48185	11066	20162	38230	16043	48409	47421	21195	98008	57305
45	19230	12187	86659	12971	52204	76546	63272	19312	81662	96557
46	84327	21942	81727	68735	89190	58491	55329	96875	19465	89687
47	77430	71210	00591	50124	12030	50280	12358	76174	48353	09682
48	12462	19108	70512	53926	25595	97085	03833	59806	12351	64253
49	11684	06644	57816	10078	45021	47751	38285	73520	08434	65627

Tabla A9. Dígitos aleatorios (*continuación*)

Renglón No.	Columna número 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	12896	36576	68686	08462	65652	76571	70891	09007	04581	01684
51	59090	05111	27587	90349	30789	50304	70650	06646	70126	15284
52	42486	67483	65282	19037	80588	73076	41820	46651	40442	40718
53	88662	03928	03249	85910	97533	88643	29829	21557	47328	36724
54	69403	03626	92678	53460	15465	83516	54012	80509	55976	46115
55	56434	70543	38696	98502	32092	95505	62091	39549	30117	98209
56	58227	62694	42837	29183	11393	68463	25150	86338	95620	39836
57	41272	94927	15413	40505	33123	63218	72940	98349	57249	40170
58	36819	01162	30425	15546	16065	68459	35776	64276	92868	07372
59	31700	66711	26115	55755	33584	18091	38709	57276	74660	90392
60	69855	63699	36839	90531	97125	87875	62824	03889	12538	24740
61	44322	17569	45439	41455	34324	90902	07978	26268	04279	76816
62	62226	36661	87011	66267	78777	78044	40819	49496	39814	73867
63	27284	19737	98741	72531	52741	26699	98755	19657	08665	16818
64	88341	21652	94743	77268	79525	44769	66583	30621	90534	62050
65	53266	18783	51903	56711	38060	69513	61963	80470	88018	86510
66	50527	49330	24839	42529	03944	95219	88724	37247	84166	23023
67	15655	07852	77206	35944	71446	30573	19405	57824	23576	23301
68	62057	22206	03314	83465	57466	10465	19891	32308	01900	67484
69	41769	56091	19892	96253	92808	45785	52774	49674	68103	65032
70	25993	72416	44473	41299	93095	17338	69802	98548	02429	85238
71	22842	57871	04470	37373	34516	04042	04078	35336	34393	97573
72	55704	31982	05234	22664	22181	40358	28089	15790	33340	18852
73	94258	18706	09437	96041	90052	80862	20420	24323	11635	91677
74	74145	20453	29657	98868	56695	53483	87449	35060	98942	62697
75	88881	12673	73961	89884	73247	97670	69570	88888	58560	72580
76	01508	56780	52223	35632	73347	71317	46541	88023	36656	76332
77	92069	43000	23233	06058	82527	25250	27555	20426	60361	63525
78	53366	35249	02117	68620	39388	69795	73215	01846	16983	78560
79	88057	54097	49511	74867	32192	90071	04147	46094	63519	07199
80	85492	82238	02668	91854	86149	28590	77853	81035	45561	16032
81	39453	62123	69611	53017	34964	09786	24614	49514	01056	18700
82	82627	98111	93870	56969	69566	62662	07353	84838	14570	14508
83	61142	51743	38209	31474	96095	15163	54380	77849	20465	03142
84	12031	32528	61311	53730	89032	16124	58844	35386	45521	59368
85	31313	59838	29147	76882	74328	09955	63673	96651	53264	29871
86	50767	41056	97409	44376	62219	35439	70102	99248	71179	26052
87	30522	95699	84966	26554	24768	72247	84993	85375	92518	16334
88	74176	19870	89874	64799	03792	57006	57225	36677	46825	14087
89	17114	93248	37065	91346	04657	93763	92210	43676	44944	75798
90	53005	11825	64608	87587	05742	31914	55044	41818	29667	77424
91	31985	81539	79942	49471	46200	27639	94099	42085	79231	03932
92	63499	60508	77522	15624	15088	78519	52279	79214	43623	69166
93	30506	42444	99047	66010	91657	37160	37408	85714	21420	80996
94	78248	16841	92357	10130	68990	38307	61022	56806	81016	38511
95	64996	84789	50185	32200	64382	29752	11876	00664	54547	62597
96	11963	13157	09136	01769	30117	71486	80111	09161	08371	71749
97	44335	91450	43456	90449	18338	19787	31339	60473	06606	89788
98	42277	11868	44520	01113	11341	11743	97949	49718	99176	42006
99	77562	18863	58515	90166	78508	14864	19111	57183	85808	59385

Tabla A10. Distribución *t*

Valores de z para valores dados de la función de distribución $F(z)$ (ver la página 728)
Ejemplo: Para 9 grados de libertad, $z = 1.83$ cuando $F(z) = 0.95$.

$F(z)$	Número de grados de libertad									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.33	0.29	0.28	0.27	0.27	0.27	0.26	0.26	0.26	0.26
0.7	0.73	0.62	0.58	0.57	0.56	0.55	0.55	0.55	0.54	0.54
0.8	1.38	1.06	0.98	0.94	0.92	0.91	0.90	0.89	0.88	0.88
0.9	3.08	1.89	1.64	1.53	1.48	1.44	1.42	1.40	1.38	1.37
0.95	6.31	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.90	1.86	1.83	1.81
0.975	12.7	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.37	2.31	2.26	2.23
0.99	31.8	6.97	4.54	3.75	3.37	3.14	3.00	2.90	2.82	2.76
0.995	63.7	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	3.17
0.999	318.3	22.3	10.2	7.17	5.89	5.21	4.79	4.50	4.30	4.14

$F(z)$	Número de grados de libertad									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
0.7	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.53	0.53	0.53	0.53
0.8	0.88	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87	0.86	0.86	0.86	0.86
0.9	1.36	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	1.33	1.33	1.33	1.33
0.95	1.80	1.78	1.77	1.76	1.75	1.75	1.74	1.73	1.73	1.73
0.975	2.20	2.18	2.16	2.15	2.13	2.12	2.11	2.10	2.09	2.09
0.99	2.72	2.68	2.65	2.62	2.60	2.58	2.57	2.55	2.54	2.53
0.995	3.11	3.06	3.01	2.98	2.95	2.92	2.90	2.88	2.86	2.85
0.999	4.03	3.93	3.85	3.79	3.73	3.69	3.65	3.61	3.58	3.55

$F(z)$	Número de grados de libertad									
	22	24	26	28	30	40	50	100	200	∞
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.25	0.25	0.25
0.7	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.52
0.8	0.86	0.86	0.86	0.86	0.85	0.85	0.85	0.85	0.84	0.84
0.9	1.32	1.32	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	1.29	1.28
0.95	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.68	1.68	1.66	1.65	1.65
0.975	2.07	2.06	2.06	2.05	2.04	2.02	2.01	1.98	1.97	1.96
0.99	2.51	2.49	2.48	2.47	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.33
0.995	2.82	2.80	2.78	2.76	2.75	2.70	2.68	2.63	2.60	2.58
0.999	3.51	3.47	3.44	3.41	3.39	3.31	3.26	3.17	3.13	3.09

Tabla A11. Distribución ji cuadrada

Valores de z para valores dados de la función de distribución $F(z)$ (ver la página 730)
Ejemplo: Para 3 grados de libertad, $z = 11.34$ cuando $F(z) = 0.99$.

$F(z)$	Número de grados de libertad									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.96	23.59	25.19

$F(z)$	Número de grados de libertad									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.005	2.60	3.07	3.57	4.07	4.60	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43
0.01	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26
0.025	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59
0.05	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85
0.95	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41
0.975	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17
0.99	24.73	26.22	27.69	29.14	30.58	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57
0.995	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00

$F(z)$	Número de grados de libertad									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.005	8.0	8.6	9.3	9.9	10.5	11.2	11.8	12.5	13.1	13.8
0.01	8.9	9.5	10.2	10.9	11.5	12.2	12.9	13.6	14.3	15.0
0.025	10.3	11.0	11.7	12.4	13.1	13.8	14.6	15.3	16.0	16.8
0.05	11.6	12.3	13.1	13.8	14.6	15.4	16.2	16.9	17.7	18.5
0.95	32.7	33.9	35.2	36.4	37.7	38.9	40.1	41.3	42.6	43.8
0.975	35.5	36.8	38.1	39.4	40.6	41.9	43.2	44.5	45.7	47.0
0.99	38.9	40.3	41.6	43.0	44.3	45.6	47.0	48.3	49.6	50.9
0.995	41.4	42.8	44.2	45.6	46.9	48.3	49.6	51.0	52.3	53.7

$F(z)$	Número de grados de libertad							
	40	50	60	70	80	90	100	>100 (Aproximación)
0.005	20.7	28.0	35.5	43.3	51.2	59.2	67.3	$\frac{1}{2}(h - 2.58)^2$
0.01	22.2	29.7	37.5	45.4	53.5	61.8	70.1	$\frac{1}{2}(h - 2.33)^2$
0.025	24.4	32.4	40.5	48.8	57.2	65.6	74.2	$\frac{1}{2}(h - 1.96)^2$
0.05	26.5	34.8	43.2	51.7	60.4	69.1	77.9	$\frac{1}{2}(h - 1.64)^2$
0.95	55.8	67.5	79.1	90.5	101.9	113.1	124.3	$\frac{1}{2}(h + 1.64)^2$
0.975	59.3	71.4	83.3	95.0	106.6	118.1	129.6	$\frac{1}{2}(h + 1.96)^2$
0.99	63.7	76.2	88.4	100.4	112.3	124.1	135.8	$\frac{1}{2}(h + 2.33)^2$
0.995	66.8	79.5	92.0	104.2	116.3	128.3	140.2	$\frac{1}{2}(h + 2.58)^2$

En la última columna, $h = \sqrt{2m - 1}$, en donde m es el número de grados de libertad.

Tabla A12. Distribución *F* con (*m*, *n*) grados de libertad

Valores de z para los cuales la función de distribución $F(z)$ [ver (13), sección 24.7] tiene el valor **0.95**

Ejemplo: Para (7, 4) grados de libertad, $z = 6.09$ si $F(z) = 0.95$.

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
32	4.15	3.30	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

Tabla A12. Distribución *F* con (*m*, *n*) grados de libertad (*continuación*)

Valores de z para los cuales la función de distribución $F(z)$ [ver (13), sección 24.7] tiene el valor **0.95**

n	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 30$	$m = 40$	$m = 50$	$m = 100$	∞
1	242	246	248	250	251	252	253	254
2	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	8.79	8.70	8.66	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
4	5.96	5.86	5.80	5.75	5.72	5.70	5.66	5.63
5	4.74	4.62	4.56	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
6	4.06	3.94	3.87	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	3.64	3.51	3.44	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
8	3.35	3.22	3.15	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
9	3.14	3.01	2.94	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
10	2.98	2.85	2.77	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
11	2.85	2.72	2.65	2.57	2.53	2.51	2.46	2.40
12	2.75	2.62	2.54	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
13	2.67	2.53	2.46	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21
14	2.60	2.46	2.39	2.31	2.27	2.24	2.19	2.13
15	2.54	2.40	2.33	2.25	2.20	2.18	2.12	2.07
16	2.49	2.35	2.28	2.19	2.15	2.12	2.07	2.01
17	2.45	2.31	2.23	2.15	2.10	2.08	2.02	1.96
18	2.41	2.27	2.19	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
19	2.38	2.23	2.16	2.07	2.03	2.00	1.94	1.88
20	2.35	2.20	2.12	2.04	1.99	1.97	1.91	1.84
22	2.30	2.15	2.07	1.98	1.94	1.91	1.85	1.78
24	2.25	2.11	2.03	1.94	1.89	1.86	1.80	1.73
26	2.22	2.07	1.99	1.90	1.85	1.82	1.76	1.69
28	2.19	2.04	1.96	1.87	1.82	1.79	1.73	1.65
30	2.16	2.01	1.93	1.84	1.79	1.76	1.70	1.62
32	2.14	1.99	1.91	1.82	1.77	1.74	1.67	1.59
34	2.12	1.97	1.89	1.80	1.75	1.71	1.65	1.57
36	2.11	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.62	1.55
38	2.09	1.94	1.85	1.76	1.71	1.68	1.61	1.53
40	2.08	1.92	1.84	1.74	1.69	1.66	1.59	1.51
50	2.03	1.87	1.78	1.69	1.63	1.60	1.52	1.44
60	1.99	1.84	1.75	1.65	1.59	1.56	1.48	1.39
70	1.97	1.81	1.72	1.62	1.57	1.53	1.45	1.35
80	1.95	1.79	1.70	1.60	1.54	1.51	1.43	1.32
90	1.94	1.78	1.69	1.59	1.53	1.49	1.41	1.30
100	1.93	1.77	1.68	1.57	1.52	1.48	1.39	1.28
150	1.89	1.73	1.64	1.53	1.48	1.44	1.34	1.22
200	1.88	1.72	1.62	1.52	1.46	1.41	1.32	1.19
1000	1.84	1.68	1.58	1.47	1.41	1.36	1.26	1.08
∞	1.83	1.67	1.57	1.46	1.39	1.35	1.24	1.00

Tabla A12. Distribución *F* con (*m*, *n*) grados de libertad (*continuación*)
Valores de z para los cuales la función de distribución $F(z)$ [ver (13), sección 24.7] tiene el valor **0.99**

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$
1	4052.	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022
2	98.5	99.0	99.2	99.3	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98
36	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95
38	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.79
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
70	7.01	4.92	4.08	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64
90	6.93	4.85	4.01	3.54	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59
150	6.81	4.75	3.92	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

Tabla A12. Distribución *F* con (*m*, *n*) grados de libertad (*continuación*)

Valores de z para los cuales la función de distribución $F(z)$ [ver (13), sección 24.7] tiene el valor **0.99**

n	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 30$	$m = 40$	$m = 50$	$m = 100$	∞
1	6056	6157	6209	6261	6287	6300	6330	6366
2	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	27.2	26.9	26.7	26.5	26.4	26.4	26.2	26.1
4	14.5	14.2	14.0	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	10.1	9.72	9.55	9.38	9.29	9.24	9.13	9.02
6	7.87	7.56	7.40	7.23	7.14	7.09	6.99	6.88
7	6.62	6.31	6.16	5.99	5.91	5.86	5.75	5.65
8	5.81	5.52	5.36	5.20	5.12	5.07	4.96	4.86
9	5.26	4.96	4.81	4.65	4.57	4.52	4.42	4.31
10	4.85	4.56	4.41	4.25	4.17	4.12	4.01	3.91
11	4.54	4.25	4.10	3.94	3.86	3.81	3.71	3.60
12	4.30	4.01	3.86	3.70	3.62	3.57	3.47	3.36
13	4.10	3.82	3.66	3.51	3.43	3.38	3.27	3.17
14	3.94	3.66	3.51	3.35	3.27	3.22	3.11	3.00
15	3.80	3.52	3.37	3.21	3.13	3.08	2.98	2.87
16	3.69	3.41	3.26	3.10	3.02	2.97	2.86	2.75
17	3.59	3.31	3.16	3.00	2.92	2.87	2.76	2.65
18	3.51	3.23	3.08	2.92	2.84	2.78	2.68	2.57
19	3.43	3.15	3.00	2.84	2.76	2.71	2.60	2.49
20	3.37	3.09	2.94	2.78	2.69	2.64	2.54	2.42
22	3.26	2.98	2.83	2.67	2.58	2.53	2.42	2.31
24	3.17	2.89	2.74	2.58	2.49	2.44	2.33	2.21
26	3.09	2.82	2.66	2.50	2.42	2.36	2.25	2.13
28	3.03	2.75	2.60	2.44	2.35	2.30	2.19	2.06
30	2.98	2.70	2.55	2.39	2.30	2.25	2.13	2.01
32	2.93	2.66	2.50	2.34	2.25	2.20	2.08	1.96
34	2.89	2.62	2.46	2.30	2.21	2.16	2.04	1.91
36	2.86	2.58	2.43	2.26	2.17	2.12	2.00	1.87
38	2.83	2.55	2.40	2.23	2.14	2.09	1.97	1.84
40	2.80	2.52	2.37	2.20	2.11	2.06	1.94	1.80
50	2.70	2.42	2.27	2.10	2.01	1.95	1.82	1.68
60	2.63	2.35	2.20	2.03	1.94	1.88	1.75	1.60
70	2.59	2.31	2.15	1.98	1.89	1.83	1.70	1.54
80	2.55	2.27	2.12	1.94	1.85	1.79	1.66	1.49
90	2.52	2.24	2.09	1.92	1.82	1.76	1.62	1.46
100	2.50	2.22	2.07	1.89	1.80	1.73	1.60	1.43
150	2.44	2.16	2.00	1.83	1.73	1.66	1.52	1.33
200	2.41	2.13	1.97	1.79	1.69	1.63	1.48	1.28
1000	2.34	2.06	1.90	1.72	1.61	1.54	1.38	1.11
∞	2.32	2.04	1.88	1.70	1.59	1.52	1.36	1.00

Tabla A13. Función de distribución $F(x) = P(T\ \ x)$ de la variable aleatoria T en la sección 24.11

Si $n = 3$, entonces $F(2) = 1 - 0.167 = 0.833$.

Si $n = 4$, entonces $F(3) = 1 - 0.375 = 0.625$, $F(4) = 1 - 0.167 = 0.833$, etc.

x	n = 3
	0.
0	167
1	500

x	n = 4
	0.
0	042
1	167
2	375

x	n = 5
	0.
0	008
1	042
2	117
3	242
4	408

x	n = 6
	0.
0	001
1	008
2	028
3	068
4	136
5	235
6	360
7	500

x	n = 7
	0.
1	001
2	005
3	015
4	035
5	068
6	119
7	191
8	281
9	386
10	500

x	n = 8
	0.
2	001
3	003
4	007
5	016
6	031
7	054
8	089
9	138
10	199
11	274
12	360
13	452

x	n = 9
	0.
4	001
5	003
6	006
7	012
8	022
9	038
10	060
11	090
12	130
13	179
14	238
15	306
16	381
17	460

x	n = 10
	0.
6	001
7	002
8	005
9	008
10	014
11	023
12	036
13	054
14	078
15	108
16	146
17	190
18	242
19	300
20	364
21	431
22	500

x	n = 11
	0.
8	001
9	002
10	003
11	005
12	008
13	013
14	020
15	030
16	043
17	060
18	082
19	109
20	141
21	179
22	223
23	271
24	324
25	381
26	440
27	500

x	n = 20
	0.
50	001
51	002
52	002
53	003
54	004
55	005
56	006
57	007
58	008
59	010
60	012
61	014
62	017
63	020
64	023
65	027
66	032
67	037
68	043
69	049
70	056
71	064
72	073
73	082
74	093
75	104
76	117
77	130
78	144
79	159
80	176
81	193
82	211
83	230
84	250
85	271
86	293
87	315
88	339
89	362
90	387
91	411
92	436
93	462
94	487

x	n = 19
	0.
43	001
44	002
45	002
46	003
47	003
48	004
49	005
50	006
51	008
52	010
53	012
54	014
55	017
56	021
57	025
58	029
59	034
60	040
61	047
62	054
63	062
64	072
65	082
66	093
67	105
68	119
69	133
70	149
71	166
72	184
73	203
74	223
75	245
76	267
77	290
78	314
79	339
80	365
81	391
82	418
83	445
84	473
85	500

x	n = 18
	0.
38	001
39	002
40	003
41	003
42	004
43	005
44	007
45	009
46	011
47	013
48	016
49	020
50	024
51	029
52	034
53	041
54	048
55	056
56	066
57	076
58	088
59	100
60	115
61	130
62	147
63	165
64	184
65	205
66	227
67	250
68	275
69	300
70	327
71	354
72	383
73	411
74	441
75	470
76	500

x	n = 17
	0.
32	001
33	002
34	002
35	003
36	004
37	005
38	007
39	009
40	011
41	014
42	017
43	021
44	026
45	032
46	038
47	046
48	054
49	064
50	076
51	088
52	102
53	118
54	135
55	154
56	174
57	196
58	220
59	245
60	271
61	299
62	328
63	358
64	388
65	420
66	452
67	484

x	n = 16
	0.
27	001
28	002
29	002
30	003
31	004
32	006
33	008
34	010
35	013
36	016
37	021
38	026
39	032
40	039
41	048
42	058
43	070
44	083
45	097
46	114
47	133
48	153
49	175
50	199
51	225
52	253
53	282
54	313
55	345
56	378
57	412
58	447
59	482

x	n = 15
	0.
23	001
24	002
25	003
26	004
27	006
28	008
29	010
30	014
31	018
32	023
33	029
34	037
35	046
36	057
37	070
38	084
39	101
40	120
41	141
42	164
43	190
44	218
45	248
46	279
47	313
48	349
49	385
50	423
51	461
52	500

x	n = 14
	0.
18	001
19	002
20	002
21	003
22	005
23	007
24	010
25	013
26	018
27	024
28	031
29	040
30	051
31	063
32	079
33	096
34	117
35	140
36	165
37	194
38	225
39	259
40	295
41	334
42	374
43	415
44	457
45	500

x	n = 13
	0.
14	001
15	001
16	002
17	003
18	005
19	007
20	011
21	015
22	021
23	029
24	038
25	050
26	064
27	082
28	102
29	126
30	153
31	184
32	218
33	255
34	295
35	338
36	383
37	429
38	476

x	n = 12
	0.
11	001
12	002
13	003
14	004
15	007
16	010
17	016
18	022
19	031
20	043
21	058
22	076
23	098
24	125
25	155
26	190
27	230
28	273
29	319
30	369
31	420
32	473

Índice

C

E

F

J

K

L

M

N

O

R

T

U

V

W

La edición, composición, diseño e impresión de esta obra fueron realizados
bajo la supervisión de GRUPO NORIEGA EDITORES.
Balderas 95, Col. Centro. México, D.F. C.P. 06040
1217280000803530DP9200IE

Derivación	Integración
$(cu)' = cu'$ (c constante)	$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$
$(u+v)' = u' + v'$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
$(uv)' = u'v + v'u$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + c$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$
$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ (Regla de la cadena)	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$
	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$
	$\int \tan x\,dx = -\ln\|\cos x\| + c$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\int \cot x\,dx = \ln\|\operatorname{sen} x\| + c$
$(e^x)' = e^x$	$\int \sec x\,dx = \ln\|\sec x + \tan x\| + c$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$\int \csc x\,dx = \ln\|\csc x - \cot x\| + c$
$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{a} + c$
$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + c$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} + c$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + c$
$(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$	$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c$
$(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$	$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + c$
$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$	$\int \cot^2 x\,dx = -\cot x - x + c$
$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$
$(\operatorname{arc\,cos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx) + c$
$(\operatorname{arc\,tan} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx) + c$
$(\operatorname{arc\,cot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	

Algunas constantes

$$
\begin{aligned}
e &= 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536 \\
\sqrt{e} &= 1.64872\ 12707\ 00128\ 14685 \\
e^2 &= 7.38905\ 60989\ 30650\ 22723
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi &= 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846 \\
\pi^2 &= 9.86960\ 44010\ 89358\ 61883 \\
\sqrt{\pi} &= 1.77245\ 38509\ 05516\ 02730
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log_{10} \pi &= 0.49714\ 98726\ 94133\ 85435 \\
\ln \pi &= 1.14472\ 98858\ 49400\ 17414 \\
\log_{10} e &= 0.43429\ 44819\ 03251\ 82765 \\
\ln 10 &= 2.30258\ 50929\ 94045\ 68402
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1.41421\ 35623\ 73095\ 04880 \\
\sqrt[3]{2} &= 1.25992\ 10498\ 94873\ 16477 \\
\sqrt{3} &= 1.73205\ 08075\ 68877\ 29353 \\
\sqrt[3]{3} &= 1.44224\ 95703\ 07408\ 38232 \\
\ln 2 &= 0.69314\ 71805\ 59945\ 30942 \\
\ln 3 &= 1.09861\ 22886\ 68109\ 69140
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma &= 0.57721\ 56649\ 01532\ 86061 \\
\ln \gamma &= -0.54953\ 93129\ 81644\ 82234 \quad \text{(see Sec. 5.7)} \\
1^\circ &= 0.01745\ 32925\ 19943\ 29577 \text{ rad} \\
1 \text{ rad} &= 57.29577\ 95130\ 82320\ 87680^\circ \\
&= 57^\circ 17' 44.806''
\end{aligned}
$$

Coordenadas polares

$$x = r \cos \theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$dx\, dy = r\, dr\, d\theta$$

Series

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \quad (|x| < 1)$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m} \quad (|x| < 1)$$

$$\arctan x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2m+1} \quad (|x| < 1)$$

Alfabeto griego

α	Alpha	ν	Nu
β	Beta	ξ	Xi
γ, Γ	Gamma	o	Omicron
δ, Δ	Delta	π	Pi
ϵ	Epsilon	ρ	Rho
ζ	Zeta	σ, Σ	Sigma
η	Eta	τ	Tau
$\theta, \vartheta, \Theta$	Theta	υ, Υ	Upsilon
ι	Iota	ϕ, φ, Φ	Phi
κ	Kappa	χ	Chi
λ, Λ	Lambda	ψ, Ψ	Psi
μ	Mu	ω, Ω	Omega

Vectores

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Obra complementaria:

MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA
Volumen II

- Series e integrales y transformadas de Fourier
- Ecuaciones diferenciales parciales
- Números complejos. Funciones analíticas complejas
- Integración compleja
- Series de potencias, series de Taylor, series de Laurent
- Integración por el método de residuos
- Mapeo conforme
- Análisis complejo aplicado a la teoría del potencial
- Métodos numéricos en general
- Métodos numéricos en álgebra lineal
- Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales
- Optimización no restringida, programación lineal
- Gráficas y optimización combinatoria
- Teoría de probabilidad
- Estadística matemática


ÁREA: MAT. APLICADAS
ISBN 968-18-5310-5
9 789681 853105

e-mail: limusa@noriega.com.mx
www.noriega.com.mx